Новикова Наталья Владимировна

Экономико-математические методы и модели

Конспект лекций

Минск, 2010

Оглавление

Рекомендуемая литература: ... 3
Лекция 1. Технология построения и анализа экономико-математической модели. ... 4
Лекция 2. Экономико-математические модели оптимизационных задач. ... 8
Лекция 3. Модели управления запасами. Модель Уилсона. ... 12
Лекция 4. Модели управления запасами с конечной интенсивностью поставки. ... 16
Лекция 5. Модели теории массового обслуживания. СМО с отказами. ... 20
Лекция 6. Модели теории массового обслуживания. СМО с ожиданием. ... 23
Лекция 7. Игры с природой. ... 26
Лекция 8. ЭММ межотраслевого баланса. ... 31
Лекция 9. Статистическое моделирование. ... 38
Лекция 10. Среднесрочное прогнозирование. ... 42
Координаты автора ... 46

Рекомендуемая литература:

1. Экономико-математические методы и модели. Под ред. А.В. Кузнецова, Минск, БГЭУ, 2000 г.
2. Высшая математика: Мат. программирование.: Учеб.пособие/ А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; Под общ. ред. А.В. Кузнецова. — Мн.: Выш. шк., 1994
3. Экономико-математические методы и прикладные модели/Под ред. В.В.Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999.

Лекция 1. Технология построения и анализа экономико-математической модели.

Вопросы:

1. Предмет и задачи курса «Экономико-математические методы и модели».
2. Технология построения экономико-математических моделей (ЭММ).
3. Классификация моделей.

1. Предмет и задачи курса «Экономико-математические методы и модели».

Предметом изучения дисциплины «Экономико-математические методы и модели» являются количественные характеристики экономических процессов, протекающих в производстве, изучение их взаимосвязей.

В курсе рассматриваются модели линейного программирования, балансовые и игровые модели, модели систем массового обслуживания.

Основным понятием курса является понятие математической модели.

В общем случае, *модель* – это отражение реального объекта. Такое отражение объекта может быть представлено схемой, эскизом, фотографией, моделью описательного характера в виде графиков и таблиц и т.д.

Математическая модель – это система математических уравнений, неравенств, формул, формул и различных математических выражений, описывающих реальный объект, составляющие его характеристики и взаимосвязи между ними. Процесс построения математической модели называют *математическим моделированием*.

Моделирование и построение математической модели экономического объекта позволяют свести экономический анализ производственных процессов к математическому анализу и принятию эффективных решений.

2. Технология построения экономико-математических моделей (ЭММ).

Содержанием любой экономико-математической модели является выраженная в формально-математических соотношениях экономическая сущность условий задачи и поставленной цели. В модели экономическая величина представляется математическим соотношением, но не всегда математическое соотношение является экономическим. Описание экономических условий математическими соотношениями – результат того, что модель устанавливает связи и зависимости между экономическими параметрами или величинами. Наиболее полное законченное определение экономико-математической модели дал академик В. С. Немчинов: "Экономико-математическая модель представляет собой концентрированное выражение общих взаимосвязей и закономерностей экономического явления в математической форме".

По содержанию различают экономико-математические и экономико-статистические модели. Различие между ними состоит в характере функциональных зависимостей, связывающих их величины. Так, экономико-статистические модели связаны с показателями, сгруппированными различными способами. Статистические модели устанавливают зависимость между показателями и определяющими их факторами в виде линейной и нелинейной функции. Экономико-математические модели включают в себя систему ограничений, целевую функцию.

Система ограничений состоит из отдельных математических уравнений или неравенств, называемых *балансовыми уравнениями* или *неравенствами.*

Целевая функция связывает между собой различные величины модели. Как правило, в качестве цели выбирается экономический показатель (прибыль, рентабельность, себестоимость, валовая продукция и т. д.). Поэтому целевую функцию иногда взывают *экономической, критериальной.* Целевая функция – функция многих переменных величин и может иметь свободный член.

Критерий оптимальности - экономический показатель, выражающийся при помощи целевой функции через другие экономические показатели. Одному и тому же критерию оптимальности могут соответствовать несколько разных, но эквивалентных целевых функций. Модели с одной и той же системой ограничений могут иметь различные критерии оптимальности и различные целевые функции. Смешивать понятия критерия оптимальности и целевой функции нельзя. Критерий оптимальности есть понятие модельное, экономическое. Критерии оптимальности могут быть натуральные и стоимостные. Одни из критериев – максимизируемые, другие – минимизируемые. Из минимизируемых критериев является критерий совокупных затрат труда всех видов, предложенный А. Г. Аганбегяном и А. Г. Гранбергом. Он выражается целевой функцией $\overline{L}x$, где $\overline{L} = \left[l^{js}\right]$ – вектор совокупных затрат труда, элементы которого означают объемы затрат труда в каждом js-м технологическом способе при его единичной интенсивности. Из максимизируемых критериев можно выделить такие, как: число наборов конечных продуктов, валовая, конечная, чистая и условно чистая продукция, прибыль, рентабельность

Решением экономико-математической модели, или *допустимым планом* называется набор значений неизвестных, который удовлетворяет ее системе ограничений. Модель имеет множество решений, или множество допустимых планов, и среди них нужно найти единственное, удовлетворяющее системе ограничений и целевой функции. Допустимый план, удовлетворяющий целевой функции, называется *оптимальным.* Среди допустимых планов, удовлетворяющих целевой функции, как правило, имеется единственный план, для которого целевая функция и критерий оптимальности имеют максимальное или минимальное значение. Если модель задачи имеет множество оптимальных планов, то для каждого из них значение целевой функции одинаково.

Если экономико-математическая модель задачи линейна, оптимальный план достигается в крайней точке области изменения переменных величин системы ограничений. В случае нелинейной модели оптимальных планов и оптимальных значений целевой функции может быть несколько. Поэтому необходимо определять экстремальные планы и экстремальные значения целевой функции. План, для которого целевая функция модели имеет экстремальное значение, называют *экстремальным планом,* или экстремальным решением.

Целевая функция, зависящая от переменных величин в заданной области изменения последних, всегда достигает наибольшего и наименьшего значения или вовсе его не имеет. Экстремальные значения целевой функции достигаются внутри, а оптимальные значения достигаются также и на границе области изменения переменных величин. Поэтому экстремальные значения целевой функции могут совпадать с оптимальными, однако это не значит, что все оптимальные значения целевой функции есть экстремальные. Для нелинейных моделей иногда существуют экстремальные значения целевой функции, а для линейных моделей экстремальных планов и экстремальных значений целевой функции быть не может.

Таким образом, для принятия оптимального решения любой экономической задачи необходимо построить ее экономико-математическую модель, по структуре включающую в себе систему ограничений, целевую функцию, критерий оптимальности и решение.

Методика построения экономико-математической модели состоит в том, чтобы экономическую сущность задачи представить математически, используя различные символы, переменные и постоянные величины, индексы и другие обозначения.

Все условия задачи необходимо записать в виде уравнений или неравенств. Поэтому, в первую очередь необходимо определить систему переменных величин, которые могут для конкретной задачи обозначить искомый объем производства продукции на предприятии, количество перевозимого груза поставщиками конкретным потребителям и т. д. Как правило, для обозначения переменных величин используются буквы: *x, y, z,* а также их модификации. Например, модификация переменной *x:* $\overline{x}$, $\tilde{x}$, x_1, x', x_{ij}, x_{isj}.. и т.д. Аналогичные модификации могут быть и для других переменных, используемых в модели. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ могут обозначать объемы производства продукции соответственно первого, второго и так далее n-го вида. Переменные x_{isj}. могут обозначать объемы производства продукции i-го вида изготовленной на s-ом оборудовании j-м технологическим способом. Для индексации, как правило, используются латинские буквы: *i, j, s, l.* Количество переменных может обозначаться буквами *n, k, m. Но* каждой переменной для конкретной задачи дается словесное пояснение.

Целевую функцию – цель задачи – чаще всего обозначают буквами f, *F, Z.* Постоянные величины обычно обозначают буквами: *a, b, c, d* и т. д.

Ограничения модели должны отражать все условия, формулирующие оптимальный план. Однако практически учесть все условия задачи для достижения цели невозможно, достаточно учесть основные условия. Естественно, полученная модель будет упрощенной по сравнению с реальной, которая отражала все условия поставленной задачи.

Итак, в упрощенном виде экономико-математическая модель представляет собой:

1) систему ограничений - равенства, неравенства вида больше или равно ($\geq$), меньше или равно ($\leq$);

2) условия неотрицательности переменных, исходя из экономической или физической сущности переменных $\left(x_j \geq 0 \quad j=\overline{1,n}\right)$;

3) целевую функцию.

Математически общую модель задачи можно представить в виде:

Найти значения *n* переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений

$f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $\{\leq,=,\geq\}$ b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$; (1)

и максимизируют или минимизируют целевую функцию

$Z = f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ (2)

Если на переменные налагается условие неотрицательности, тогда в модель задачи вводится условие

$\left(x_j \geq 0 \quad j=\overline{1,n}\right)$ (3)

Иногда на переменные налагается условие целочисленности, тогда его можно записать в виде

$x_j = 0$, или 1, или 2, или 3 и т. д. (4)

Если ограничения (1) и целевая функция (2) линейны относительно переменных, то модель называют *линейной.* В случае, если хотя бы одна из функций f_i *и* Z нелинейна, то модель называют *нелинейной.*

3. Классификация моделей.

Экономико-математические модели подразделяются на

- статистические
- балансовые
- оптимизационные

Статистические модели – это модели, в которых описываются корреляционно-регрессионные зависимости результата производства от одного или нескольких независимых факторов. Эти модели широко используются для построения производственных функций, а также при анализе экономических систем.

Балансовые модели представляют систему балансов производства и распределения продукции и записываются в форме квадратных матриц. Балансовые модели служат для установления пропорций и взаимосвязей при планировании различных отраслей народного хозяйства.

Оптимизационные модели представляют систему математических уравнений, линейных или нелинейных, подчиненных определенной целевой функции и служащих для отыскания наилучших (оптимальных) решений конкретной экономической задачи. Эти модели относятся к классу экстремальных задач и описывают условия функционирования экономической системы.

Классификация экономико-математических моделей может быть различной и условной. Это зависит от того, на базе каких признаков строится модель.

По *функциональному* признаку модели подразделены на модели планирования, модели бухгалтерского учета, модели экономического анализа, модели информационных процессов

По признаку *размерности* модели классифицируются на макромодели, локальные модели и микромодели

Макроэкономические модели строятся для изучения народного хозяйства республики в целом на базе укрупненных показателей.

К локальным экономическим моделям можно отнести модели, с помощью которых анализируются и прогнозируются некоторые показатели развития отрасли. Например, модель прогноза производительности труда.

Микромодели на предприятиях разрабатываются для углубленного анализа структуры производства. При построении микромоделей широко используются методы математической статистики - корреляционный и регрессионный, индексный и выборочный методы.

Оптимизационные модели могут носить детерминированный и стохастический характер. В детерминированных моделях результат решения однозначно зависит от входных данных. В стохастических вероятностных моделях – определенный набор входных данных может дать, а может и не дать соответствующего результата.

Лекция 2. Экономико-математические модели оптимизационных задач.

Вопросы:

1. ЭММ задачи производственного планирования.
2. ЭММ задачи транспортных перевозок.
3. ЭММ задачи распределения производственной программы предприятия.
4. ЭММ задачи оптимизации состава промышленных смесей.
5. ЭММ задачи раскроя материалов.

1. ЭММ задачи производственного планирования.

Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объединение и т.д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов, может выпускать *n* различных видов продукции (товаров), известных под номерами, обозначаемыми индексом j ($j = \overline{1,n}$). Ее будем обозначать $П_j$.

При производстве этих видов продукции предприятие должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т.д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют *ингредиентами* R_i. Пусть их число равно *m*; припишем им индекс i ($i = \overline{1,m}$). Они ограничены, и их количества равны соответственно $b_1,\ldots, b_i,\ldots, b_m$ условных единиц. Таким образом, $b = (b_1;\ldots;b_i;\ldots;b_m)$ – вектор ресурсов.

Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т.д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации C_j ($j = \overline{1,n}$), т.е. $c = (c_1;\ldots;c_j;\ldots;c_n)$ – вектор цен.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы продукции j-го вида. Матрицу коэффициентов a_{ij} называют *технологической* и обозначают буквой *A*. Имеем $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$.

Обозначим через $x = (x_1;\ldots;x_j;\ldots;x_n)$ план производства, показывающий, какие виды товаров $П_1;\ldots;П_j;\ldots;П_n$ нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах.

Так как c_j – цена реализации единицы j-й продукции, цена реализованных x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общий объем реализации

$$Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

Это выражение – целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как $a_{ij}x_j$ — расход i-го ресурса на производство x_j единиц j-й продукции, то, просуммировав расход i-го ресурса на выпуск всех *n* видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить b_i ($i = \overline{1,m}$) единиц:

$$a_{i1}x_1 + \ldots a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i .$$

Чтобы искомый план $x^* = (x_1;\ldots;x_j;\ldots;x_n)$ был реален, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объемы x_j выпуска продукции:

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,n})$$

Таким образом, модель задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид: найти

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

Так как переменные x_j входят в функцию Z(x) и систему ограничений только в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j являются постоянными в планируемый период, то (1) -(3) — задача линейного программирования.

2. ЭММ задачи транспортных перевозок.

Рассмотрим простейший вариант модели транспортной задачи, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям; при этом имеется баланс между суммарным спросом потребителей и возможностями поставщиков по их удовлетворению. Причем потребителям безразлично, из каких пунктов производства будет поступать продукция, лишь бы их заявки были полностью удовлетворены. Так как от схемы прикрепления потребителей к поставщикам существенно зависит объем транспортной работы, возникает задача, о наиболее рациональном прикреплении, правильном, направлении перевозок грузов, при котором потребности полностью удовлетворяются, вся продукция от поставщиков вывозится, а затраты на транспортировку минимальны.

Задача формулируется так. Имеется *m* пунктов производства, в каждом из которых сосредоточено a_i $(i = \overline{1,m})$ единиц однородного продукта. Этот продукт нужно доставить *n* потребителям, где потребность составляет b_j $(j = \overline{1,n})$ единиц. Причем $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Известны величины c_{ij} – затраты на перевозку единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Обозначим через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Матрица $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ называется *матрицей тарифов*, $X = \lfloor x_{ij} \rfloor$ – *матрицей перевозок*. С целью удобства построения математической модели матрицы тарифов и перевозок совмещают в одну, именуемую *макетом транспортной задачи* (табл. 1).

Таблица 1

a_i \ b_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Математическая модель транспортной задачи: целевая функция, описывающая транспортные затраты,

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (4)$$

минимизируется при ограничениях:

на возможности поставщиков – весь продукт из пунктов производства должен быть вывезен:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (5)$$

на спрос потребителей, который должен быть удовлетворен:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (6)$$

при условии неотрицательности переменных, исключающем обратные перевозки:

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n}) \qquad (7)$$

3. ЭММ задачи распределения производственной программы предприятия.

В задаче о наилучшем использовании ресурсов определяется оптимальный план выпуска продукции. Пусть при производстве какого-то общественно необходимого продукта используется *n* технологий. При этом требуется *m* видов ресурсов, заданных объемами b_i ($i = \overline{1,m}$). Эффективности технологий, т. е. количество конечной продукции (в ден. ед.), производимой в единицу времени по j-й ($j = \overline{1,n}$) технологии, обозначим c_j. Пусть, далее, a_{ij} – расход i-го ресурса в единицу времени по j-й технологии. В качестве неизвестной величины x_j примем интенсивность использования j-й технологии, т.е. время, в течение которого продукция производится по j-й технологии. Пренебрегая временем переналадок, необходимым для перехода от одной технологии к другой, получаем следующую математическую модель задачи: найти план интенсивностей использования технологий $x^* = (x_1;...;x_j;...;x_n)$, обеспечивающий максимум выпуска продукции в стоимостном выражении:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (8)$$

при ограничениях на лимитируемые ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = \overline{1,m} \qquad (9)$$

и условии неотрицательности

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (10)$$

4. ЭММ задачи оптимизации состава промышленных смесей.

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих, смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигают на первый план следующую, задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

Модель задачи о наилучшем составе смеси рассмотрим на примере задачи о диете. Имеются пищевые продукты, известные под номерами 1,2,...,*n*. Они содержат различные питательные вещества, обозначаемые номерами 1,2,,.. , m (углеводы, белки, жиры, витамины, микроэлементы и др.). Единица *j*-го продукта содержит a_{ij} единиц i-го питательного вещества. Для нормальной жизнедеятельности в заданный промежуток времени нужно потреблять не менее b_i единиц i-го питательного вещества. Обозначим через c_j стоимость единицы продукта j-го вида. Требуется выбрать рацион минимальной стоимости, содержащий необходимые количества питательных веществ. План задачи –

это количества x_j продуктов каждого вида, обеспечивающие необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на исходные продукты.

Математическая модель задачи: найти

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (11)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = \overline{1,m} \qquad (12)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) \qquad (13)$$

5. ЭММ задачи раскроя материалов.

Суть задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму. Рассмотрим простейшую модель раскроя по одному измерению. Более сложные постановки ведут к задачам целочисленного программирования.

Модель задачи раскроя по одному измерению длинномерных материалов (прутков, труб, профильного проката и др.) может быть сформулирована так. Пусть имеется *N* штук исходного материала, длина каждой штуки равна *L*. Нужны заготовки *m* видов, длины которых равны l_i ($i = \overline{1,m}$). Известна потребность в заготовках каждого вида, она равна b_j. Изучение вопроса раскроя (построение технологической карты раскроя) показывает, что можно выделить *n* приемлемых вариантов раскроя исходного материала длиной *L* на заготовки длиной l_i. Обозначим через a_{ij} количество заготовок i-го вида, получаемое при раскрое единицы исходного материала по j-му ($j = \overline{1,n}$) варианту, c_j – отходы при раскрое единицы исходного материала по j-му варианту. План задачи $x^* = (x_1;...;x_j;...;x_n)$, где x_j – количество единиц исходного материала, планируемое к раскрою по j-му варианту.

Функция цели — минимум отходов, получаемых при раскрое:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (14)$$

при ограничениях: на число единиц исходного материала

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq N \qquad (15)$$

на удовлетворение ассортиментного спроса потребителей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = \overline{1,m} \qquad (16)$$

и условии неотрицательности

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) \qquad (17)$$

Лекция 3. Модели управления запасами. Модель Уилсона.

Вопросы:

1. ЭММ формирования запасов. Типы издержек.
2. Модель Уилсона с бесконечной интенсивностью поставки без дефицита.
3. Точка размещения заказа.

1.ЭММ формирования запасов. Типы издержек.

Одним из важнейших этапов планирования работы любой производственной единицы — цеха, предприятия или объединения предприятий – является определение рационального уровня запасов сырья, полуфабрикатов, инструментов. Основными причинами создания производственных запасов служат необходимость обеспечения бесперебойного снабжения производственного процесса, периодичность производства различных видов продукции поставщиками, осуществление транспортировки большинства видов продукции от поставщика к потребителю партиями, а также несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Предметом теории управления запасами является отыскание такой организации поставок или производства, при которых суммарные затраты на функционирование системы были минимальными. Под *организацией поставок* понимается определение объемов поставок и периодичность заказов, а при планировании производства нескольких видов продукции на одном и том же оборудовании – определение размера партии и периодичности запуска продукции в производство. Существует четыре основных вида затрат, которые могут оказать влияние на выбор решения по управлению запасами:

- затраты на приобретение запасов,
- затраты на организацию заказа,
- издержки хранения запасов,
- потери от дефицита.

Затраты, которые не зависят от принимаемых решений, не учитываются при анализе. Так, затраты на приобретение продукции целесообразно учитывать только, если цена единицы продукций зависит от величины партии, что обычно выражается в виде оптовых скидок.

К затратам на организацию заказа, учитываемым в анализе функционирования систем управления запасами, относят постоянные расходы по размещению заказов: расходы на разъезды и командировки, почтово-телеграфные расходы, транспортные расходы, не зависящие от размера партии.

В общем случае в стоимость поставки, кроме постоянных, входят затраты, пропорциональные объему партии и количеству заказываемых номенклатур. Однако принимаемые решения никак не влияют на величину затрат, пропорциональных размеру партии. Затраты, пропорциональные количеству номенклатур в заказе, учитываются только в многономенклатурных (многопродуктовых) моделях. Эти затраты представляют собой стоимостное выражение трудозатрат, связанных с поиском и обработкой информации по отдельным продуктам, упаковкой у поставщика, а также приемом и размещением на складе потребителя.

Если складскую систему снабжает предприятие-поставщик то при условии серийного выпуска продукции стоимость переналадки оборудования перед выпуском очередной партии тоже попадает в эту категорию затрат. Иногда сюда относят также издержки вследствие более низкой производительности труда и более высокого процента брака в начале производственного периода. В литературе затраты, связанные с началом выпуска очередной партии, называют *затратами на подготовительно-заключительные операции.*

К издержкам хранения запасов, учитываемым моделях управления запасами относятся лишь издержки, зависящие от величины запасов. К ним относятся издержки физического присутствия материальных ценностей на складе (естественная убыль, плата за производственные фонды) и потери от иммобилизации средств в запасах. Если рассматривать средства, вложенные в запасы как банковскую ссуду, то издержки задаются процентной ставкой.

Потери от дефицита на промышленных предприятиях исчисляются как суммарные потери прибыли в расчете на одну денежную единицу стоимости дефицитных материалов. Прибыль предприятия при дефиците может снизиться за счет простоя производственных мощностей и рабочих, переналадки производственного процесса, замены дефицитных материалов другими, более дорогими, выпуск продукции в сверхурочное время после ликвидации причины простоя, штраф за нарушение сроков поставки.

Многообразие реальных ситуаций вызвало необходимость разработки разнообразных моделей управления запасами. Основным фактором, влияющим на тип модели, является характер спроса или потребности в материальных ресурсах. Спрос может быть детерминированным или вероятностным. В свою очередь детерминированный спрос может быть статическим, неизменным во времени, или динамическим, изменяющимся во времени. Вероятностный спрос может быть стационарным, с неизменной во времени плотностью вероятности, и нестационарным с изменяющейся во времени плотностью вероятности.

Другим важным фактором, учитывающимся при построении модели, является срок выполнения заказа, т. е. интервал времени между моментом размещения заказа и его поставкой. Если этот фактор учитывается, то модель называется моделью с запаздыванием поставок.

В модели может быть учтена интенсивность поставок. При пополнении запасов из внешнего источника обычно доставляется вся партия одновременно. Пополнение запаса с некоторой интенсивностью чаще осуществляется самим предприятием, когда продукция одного цеха используется другим.

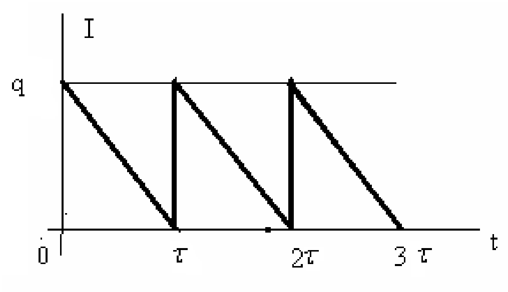
Число видов продукции учитывается в модели при условии наличия взаимосвязи между ними. Связь может возникать до поставки и после нее. Взаимодействие до поставки проявляется в снабжении из одного источника (заказ на несколько партий различных видов продукции подается одновременно), в требовании комплектности, в ограниченной мощности оборудования. Взаимодействие после поставки имеет место, когда несколько видов продукции хранится в одном складском помещении или ограничена величина оборотных средств, вложенных в запасы.

В работе системы может допускаться дефицит или наоборот выдвигаться требование бездефицитной работы.

2. Модель Уилсона с бесконечной интенсивностью поставки без дефицита. Точка размещения заказа.

Простейшая модель оптимальной партии поставки строится при следующих предположениях: спрос ν в единицу времени является постоянным; заказанная партия доставляется одновременно; дефицит недопустим; затраты K на организацию поставки постоянны и не зависят от величины q партии; издержки содержания единицы продукции в течение единицы времени составляют s.

На рис. 1 показана динамика изменения уровня I запасов.



Уровень запаса снижается равномерно от q до 0, после чего подается заказ на доставку новой партии величиной q. Заказ выполняется мгновенно и уровень запаса восстанавливается до величины q. Интервал времени длиной τ между поставками называют циклом. Издержки в течение цикла $L_ц$ состоят из стоимости заказа K и затрат на содержание запаса, которые пропорциональны средней величине запаса $\overline{I} = q/2$ и длине цикла τ =q/ν ,

$$L_ц = K + s\frac{q}{2}\frac{q}{\nu}$$

Разделив это выражение на длину цикла, получим издержки в единицу времени

$$L = K\frac{\upsilon}{q} + s\frac{q}{2} \qquad (1)$$

Оптимальный размер партии определяется из уравнения

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{K\upsilon}{q^2} + \frac{s}{2} = 0$$

(необходимый признак экстремума). Отсюда находится оптимальный размер q* партии:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}} \qquad (2)$$

Так как ${d^2L}\big/{d^2q} > 0$ (достаточный признак экстремума), то для всех q > 0 выражение (2) является минимумом функции затрат (1). Уравнение (2) известно под многими названиями. Его называют формулой наиболее экономной величины заказа, формулой Уилсона, формулой квадратного корня. Чтобы найти оптимальные параметры работы системы, подставляем значение q* в соответствующие выражения. Получаем, что оптимальная стратегия предусматривает заказ q* через каждые

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\upsilon}}$$

единиц времени. Наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени

$$L^* = \sqrt{2Ks\upsilon} = sq^*$$

Пример. Жидкие продукты нескольких видов разливаются в пакеты на одной линии упаковки. Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют 700 ден. ед., потребность в продуктах составляет 140000 л в месяц, стоимость хранения 1 л в течение месяца — 4 ден. ед. Определить оптимальные параметры системы. Сравнить минимальные затраты с затратами при действующей системе разлива одного продукта в течение трех дней.

Решение. Оптимальные параметры:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 700 \cdot 140000}{4}} = 7000(\textit{литров})$$

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 700}{4 \cdot 140000}} = 0{,}05(\textit{месяца}) = 1{,}5(\textit{дня})$$

$$L^* = \sqrt{2 \cdot 700 \cdot 4 \cdot 140000} = 28000(\textit{ден.ед})$$

При действующей системе τ_∂ = 3 (дня) = 0,1 (месяца), $q_\partial = \tau_\partial \cdot \nu$ = 14000 (литров). Величина затрат при действующей системе

$$L = \frac{700 \cdot 140000}{14000} + \frac{4 \cdot 140000}{2} = 35000(\textit{ден.ед.})$$

3. Точка размещения заказа.

В реальных ситуациях следует учитывать время выполнения заказа Θ. Для обеспечения бесперебойного снабжения заказ должен подаваться в момент, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на время выполнения заказа. Этот уровень называется точкой возобновления заказа и обозначается r. Для систем, в которых дефицит не допускается, заказ должен размещаться в момент, когда величина наличного запаса равна

$$r = \Theta\upsilon - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]q^*$$

где [.] - целая часть числа (.).

Для обеспечения бездефицитной работы необходим минимальный начальный запас I_0, величина которого $I_0 = \Theta\upsilon$. Пусть I — фактический начальный запас. Для непрерывной работы необходимо, чтобы $I \geq \Theta\upsilon$. Время потребления начального запаса равно I/υ. Чтобы заказанная партия была доставлена не позже полного расхода начального запаса, ее нужно разместить в момент $t_0 = I/\upsilon - \Theta$. В общем случае заказы нужно размещать в моменты

$$t_k = \left(I/\upsilon - \Theta\right) + k\tau^* \qquad k = 0,1,2.....$$

Лекция 4. Модели управления запасами с конечной интенсивностью поставки.

Вопросы:

1. ЭММ формирования запасов с конечной интенсивностью поставки без дефицита.
2. ЭММ формирования запасов при наличии дефицита с учетом неудовлетворенных требований.

1. ЭММ формирования запасов с конечной интенсивностью поставки без дефицита.

Пусть заказанная партия поступает с интенсивностью λ единиц в единицу времени. Очевидно, система может работать без дефицита, если интенсивность поставок λ превосходит интенсивность потребления υ. Таким образом, рассматривается система типа заводского склада, куда продукция, произведенная одним цехом, поступает с определенной интенсивностью и используется в производстве другого цеха. Изменение уровня запаса для рассматриваемого случая изображено на рис. 1.

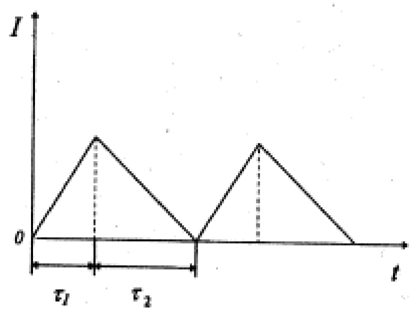


Рисунок 1

В течение времени τ_1 запас одновременно и поступает и расходуется, это время накопления запаса. В течение τ_2 запас только расходуется. Длина цикла $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Учитывая, что максимальный наличный запас $I_м = q\left(1 - \frac{\upsilon}{\lambda}\right)$ издержки системы в единицу времени составят

$$L = \frac{K\upsilon}{q} + \frac{sq}{2}\left(1 - \frac{\upsilon}{\lambda}\right)$$

Оптимальные параметры работы системы определяются обычным образом. Величина оптимальной партии

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}} \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon/\lambda}} \qquad (1)$$

оптимальный период возобновления заказа

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\upsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon/\lambda}} \qquad (2)$$

и его составляющие

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda},$$

$\tau_2^{\ *} = \sqrt{\dfrac{2K}{s\upsilon}}\sqrt{1-\upsilon/\lambda}$ или $\tau_2^{\ *} = \tau^* - \tau_1^{\ *}$

минимальные издержки в единицу времени

$$L^* = \sqrt{2Ks\upsilon}\sqrt{1-\upsilon/\lambda} \qquad (3)$$

В случае, когда интенсивность поставки значительно больше интенсивности потребления $\nu/\lambda \to 0$, а (1), (2) и (3) становятся параметрами обычной системы Уилсона.

В системе с конечной интенсивностью поступления заказа при определении оптимальной точки заказа рассматриваются два случая:

если $\Theta - \left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* < \tau_2^*$, то $r = \Theta\upsilon - \left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]q^*$;

если $\Theta - \left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* > \tau_2^*$; $r = \Theta(\upsilon - \lambda) - \left(\left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]+1\right)\left(\dfrac{\lambda}{\upsilon}+1\right)q^*$

Пример. На склад товар поставляется партиями по q ед. в каждой непосредственно с производственной линии с интенсивностью λ=12 ед. в день. Спрос на товар имеет интенсивность ν=9 ед. в день. Он равномерно и непрерывно удовлетворяется со склада. Организационные издержки одной партии товара K=20 ден. ед., стоимость хранения единицы товара в день s=0,0016072 ден.ед. Как только уровень запаса на складе становится равным нулю, производственная линия начинает его пополнять и работает до тех пор, пока не будет произведено q ед.

Требуется определить размер партии, минимизующий общие затраты L, время каждой отдельной поставки τ_1 и интервал потребления τ.

Решение. Оптимальные параметры:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot 9}{0{,}0016072}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-9/12}} = \sqrt{640000} = 800;$$

$$\tau_1^{\ *} = \frac{800}{12} \approx 66{,}67 \text{ дн.};$$

$$\tau^* = \frac{800}{9} \approx 88{,}89 \text{ дн.}$$

2. ЭММ формирования запасов при наличии дефицита с учетом неудовлетворенных требований.

В некоторых случаях, когда потери из-за дефицита сравнимы с издержками хранения, дефицит допускается. Пусть требования, поступающие в момент отсутствия запаса, берутся на учет. Обозначим через у максимальную величину задолженного спроса (рис.2).

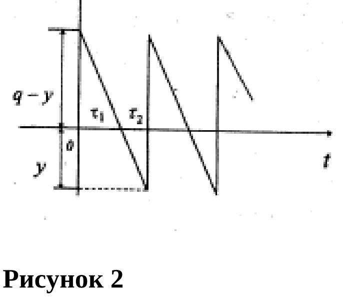


Рисунок 2

Максимальная величина наличного запаса $Y = q - y$ расходуется за время τ_1 (время существования наличного запаса), а затем поступающие требования ставятся на учет в течение времени τ_2 (время дефицита). При поступлении очередной партии в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Штрафы, связанные с дефицитом единицы запаса в единицу времени, составляют d. Затраты на хранение продукции пропорциональны средней величине запаса $\frac{q-y}{2}$ и времени его существования $\frac{q-y}{\nu}$; аналогично убытки от дефицита пропорциональны средней величине дефицита $\frac{y}{2}$ и времени его существования $\frac{y}{\nu}$. Средние издержки работы системы в течение цикла, включающие затраты на размещение заказа, содержание запаса и потери от дефицита

$$L_ц = K + s\frac{q-y}{2}\frac{q-y}{\nu} + d\frac{y}{2}\frac{y}{\nu}$$

Разделим издержки цикла на его величину $\tau = \frac{q}{\nu}$ и получим издержки работы системы в единицу времени

$$L = \frac{K\nu}{q} + s\frac{(q-y)^2}{2q} + d\frac{y^2}{2q}$$

Откуда обычным способом находим

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}}\sqrt{1+\frac{s}{d}}$$

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}}\frac{1}{\sqrt{1+s/d}}$$

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu}\frac{1}{\sqrt{1+s/d}}$$

Подставив значения q* и y* в соответствующие выражения, найдем другие оптимальные параметры системы

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}}\frac{1}{\sqrt{1+s/d}}$$

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}}\frac{1}{\sqrt{1+s/d}}$$

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{s\nu}}\frac{1}{\sqrt{1+s/d}}$$

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{\upsilon} = \sqrt{\frac{2K}{s\upsilon}}\sqrt{1+s/d}$$

Полезно иметь в виду, что

$$\frac{Y^*}{y^*} = \frac{\tau_2^*}{\tau_1^*} = \frac{s}{d}$$

Для системы с учетом неудовлетворенных требований точка заказа определяется по формуле

$$r = \Theta\upsilon - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]q^* - y^*$$

и может быть отрицательной величиной. Это означает, что заявки на пополнение запаса должны посылаться, когда величина дефицита составляет |r|.

Пример.

Одним из наиболее популярных товаров отдела аудиоаппаратуры крупного универмага является плейер. Спрос на этот товар устойчив и составляет 1300 единиц в год. Закупка плейеров у производителя обходится в 70 ден. ед. за один плейер. Издержки хранения составляют 10% среднегодовой стоимости запасов. Стоимость подачи заказа – 50 ден. ед. Администрацией универмага рассматривается вопрос о сокращении запасов данной продукции. Предполагается, что задолженный спрос будет удовлетворен из новых поставок. Потери, связанные с утратой доверия покупателя оцениваются в 10 ден. ед. в год на один плейер.

Необходимо определить оптимальную величину партии плейеров и издержки, связанные с заказом и хранением товара при условии, что дефицит допустим. Найти величину экономии, которая достигается при введении системы планирования дефицита.

Решение.

Если дефицит недопустим, то партия плейеров составит

$$q_u = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}} \qquad q_u = \sqrt{\frac{2\cdot 50\cdot 1300}{0{,}1\cdot 70}} = 136{,}27 \approx 136 \text{ (штук)}$$

Затраты в течение года

$$L_u = \sqrt{2Ks\upsilon} \qquad L_u = \sqrt{2\cdot 50\cdot 1300\cdot 0{,}1\cdot 70} = 952 \text{ (ден.ед).}$$

Оптимальная партия в условиях планирования дефицита

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}}\sqrt{1+\frac{s}{d}} \qquad q^* = \sqrt{\frac{2\cdot 50\cdot 1300}{0{,}1\cdot 70}}\sqrt{1+\frac{0{,}1\cdot 70}{10}} = 176{,}8 \approx 177 \text{ (штук)}$$

Максимальный уровень задолженного спроса равен

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\upsilon}{s}}\frac{1}{\sqrt{1+s/d}} \qquad y^* = \frac{7}{10}\sqrt{\frac{2\cdot 50\cdot 1300}{7}}\sqrt{1+\frac{7}{10}} = 73{,}23 \approx 73 \text{ (штук)}$$

Затраты в течение года

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu}\frac{1}{\sqrt{1+s/d}} \qquad L^* = \sqrt{2\cdot 50\cdot 1300\cdot 0{,}1\cdot 70}\frac{1}{\sqrt{1+7/10}} \approx 732 \text{ (ден.ед).}$$

Таким образом, если универмаг будет использовать модель планирования дефицита, экономия составит 952 - 732 = 220 ден. ед. Снижение затрат достигается за счет уменьшения затрат на хранение товара.

Лекция 5. Модели теории массового обслуживания. СМО с отказами.

Вопросы:

1. ЭММ теории массового обслуживания.
2. Основные параметры системы массового обслуживания (СМО): интенсивность входящего потока требований, пропускная способность приборов.
3. СМО с отказами. Формулы Эрланга.

1. ЭММ теории массового обслуживания.

Примерами ***систем массового обслуживания (СМО)*** могут служить телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, парикмахерские и другие предприятия, занимающиеся обслуживанием ***массовых*** потоков клиентов или их требований.

СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц — ***каналов*** (число линий связи, число телефонисток, число продавцов и т.д.). СМО могут быть ***одноканальные и многоканальные.***

Работа СМО — это выполнение поступающего на нее ***потока заявок*** (потока требований), которые поступают одна за другой в ***случайные*** моменты времени. Канал обслуживает заявку какое-то время (тоже в общем случае случайное) и освобождается.

Предмет теории массового обслуживания — установление зависимости между характером потока заявок, производительностью отдельного канала, числом каналов и эффективностью обслуживания.

СМО делятся на два основных класса: СМО с ***отказами*** и СМО с ***ожиданием*** (очередностью). В СМО с отказами заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. В СМО с ожиданием заявка становится в очередь. В зависимости от организации очереди могут быть ограниченные или неограниченные, очередь с ограниченным временем ожидания и т.п.

Для классификации СМО важное значение имеет ***дисциплина обслуживания*** (правила обслуживания) заявок: первая пришла — первая обслужена, последняя пришла — первая обслужена, обслуживание с приоритетом и т.п.

Не следует думать, что методы теории массового обслуживания применяются только для задач, связанных с «обслуживающими организациями» в прямом смысле. Теория массового обслуживания широко применяется для систем, которые могут рассматриваться как специфические СМО: системы и сети ЭВМ, системы сбора и обработки информации, автоматизированные цеха и заводы, робототехнические комплексы, системы противовоздушной обороны.

Введем следующие понятия:

n — число каналов СМО;

p_i — вероятность того, что в СМО занято обслуживанием ровно i каналов, например,

p_0 — все каналы свободны,

p_1 — занят один канал и т.д.,

p_n — занято n каналов.

2. Основные параметры системы массового обслуживания (СМО): интенсивность входящего потока требований, пропускная способность приборов.

Основное содержание теории массового обслуживания составляют методы исследования характеристик СМО, находящихся под воздействием так называемых *простейших потоков случайных событий*.

Под ***потоком событий*** понимается последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то моменты времени t_k.

Если t_k-t_{k-1}=*const*, то такой поток будем называть ***регулярным***. Для СМО более типичен случайный поток.

Простейший (или ***стационарный пуассоновский*** поток) обладает следующими свойствами:

1. ***Стационарность*** — когда вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени τ не зависит от того, где расположен этот участок, а зависит только от его длины.

2. Поток является ***потоком без последствия,*** если для двух неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий другого участка.

3. Поток является ***ординарным***, если вероятность попадания двух и более событий на бесконечно малый интервал Δt бесконечно мала.

Первое свойство говорит о постоянной плотности потока (среднем числе заявок в единицу времени).

Второе свойство — заявки поступают независимо друг от друга.

Третье свойство — заявки приходят поодиночке, а не парами, тройками и т.д.

Одно из свойств любых потоков: суммирование большого числа ординарных и стационарных потоков с любым последствием приводит к ***простейшему*** потоку.

Рассмотрим характеристики простейшего потока. Вероятность того, что за время τ произойдет ровно m событий, равна (распределение по закону Пуассона)

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} ,$$

где λ – ***интенсивность*** или ***плотность потока*** (среднее число событий за единицу времени).

Это есть ***показательный закон*** распределения с параметром λ. Математическое ожидание $M[T]$ имеет вид:

$$M[T] = \frac{1}{\lambda}.$$

Основной характеристикой канала СМО является время обслуживания одной заявки $T_{об}$, которое также является случайной величиной. Будем также полагать, что закон распределения времени обслуживания, является показательным:

$$f(t)=\mu e^{-\mu t}$$

где μ – интенсивность потока обслуженных заявок (среднее число обслуженных заявок в единицу времени). Величина μ равна обратному среднему времени обслуживания одной заявки $\mu = 1/\overline{T}_{об}$, $\overline{T_{об}} = M[T_{об}]$ — среднее время обслуживания заявки каналом.

3. СМО с отказами. Формулы Эрланга.

В СМО с отказами заявка, пришедшая в систему и заставшая все каналы занятыми, покидает систему и в дальнейшем обслуживании не участвует. Полагаем, что поток заявок, приходящий в систему, простейший с интенсивностью λ, а время обслуживания канала показательное с параметром μ.

Величина $\rho=\lambda/\mu$ называется ***приведенной интенсивностью потока заявок*** или ***интенсивностью нагрузки канала.***

Дадим конечные формулы для предельных вероятностей в такой системе ***(формулы Эрланга):***

1. Вероятность того, что в системе находится 0 требований:

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} ,$$

2. Вероятность того, что в системе находится k требований:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0,$$

$$P_1=\rho p_0, P_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_{0,\ldots,}\ P_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

3. Вероятность отказа СМО

$$P_{от} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = p_n.$$

4. Относительная пропускная способность

$$Q = 1 - P_{от} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

5. Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \lambda \left[1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right].$$

6. Среднее число занятых каналов можно определить как математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей значения 0,1,2,…, n с вероятностями p_0, p_1, …p_n,, т.е.

$$L_{об} = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + \ldots + p_n \cdot n.$$

Подставляя p_i из (1), получим:

$$L_{об} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}(1 - p_n) = \rho(1 - p_n).$$

7. Коэффициент занятости канала

$$K_{зан} = \frac{L_{об}}{n}$$

Пример 1. Заявки по телефону в ремонтную мастерскую поступают с интенсивностью λ, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\overline{T}_{об}$=2 мин. Рассматривая данную СМО, как систему с отказами, определить оптимальное число телефонных номеров, если условием оптимальности считать принятие в среднем из каждых 100 заявок не менее 90.

Из условий примера λ=90 (1/час), $\mu=1/\overline{T}_{об}=30$ (1/час), $\rho=\lambda/\mu=3$. Проведем расчет основных параметров СМО при $n=1, 2, 3,\ldots$, до тех пор, пока величина Q не станет больше или равна 0,9, т.е. найдем минимальное n, при котором $Q\geq 0,9$.

Для вычисления используем формулы:

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

$$Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Последовательно при известном $\rho=3$ для $n=1, 2, 3, 4,\ldots$ найдем $Q_1=0,2$, $Q_2=0,47$, $Q_3=0,65$, $Q_4=0,79$, $Q_5=0,9$, $Q_6=0,95$. Таким образом, для обеспечения 90% принятия заявок требуется пять телефонных номеров.

Лекция 6. Модели теории массового обслуживания. СМО с ожиданием.

Вопросы:

1. СМО с ожиданием (с очередью), основные характеристики.
2. СМО с бесконечным числом приборов.

1. СМО с ожиданием (с очередью), основные характеристики.

В этом типе систем заявка, пришедшая в систему и застав все каналы занятыми, не покидает систему, а становится в очередь и ждет до тех пор, пока ее не обслужат. На время ожидания или длину очереди никаких ограничений не устанавливается.

Рассмотрим *n*-канальную СМО с неограниченной очередью. При $\rho/n<1$ предельные вероятности существуют. Если $\rho/n\geq 1$, очередь растет до бесконечности.

Формулы для вычисления вероятностей состояний имеют вид

1. Вероятность того, что в системе находится 0 требований:

$$P_0 = \left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+...+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}$$

2. Вероятность того, что заявка окажется в очереди

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}P_0.$$

3 Среднее число заявок в очереди $L_{оч}$

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}P_0$$

4. Среднее число заявок, находящихся в обслуживании

$$L_{об} = \rho$$

5. Среднее число заявок в системе

$$L_{сис} = L_{оч} + \rho$$

6.Среднее время пребывания заявок в системе (очереди)

$$T_{сис} = \frac{1}{\lambda}L_{сис}$$

7.Среднее время пребывания заявок в системе (очереди)

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda}L_{оч}.$$

Пример.

Мастерская имеет **n = 2** рабочих места для обслуживания клиентов. Поток заявок (клиентов) является простейшим потоком с плотностью λ **=3** [заявки в час]. Среднее время обслуживания одного клиента **Тоб=0,6** [час]. Клиент, заставший все рабочие места, занятыми, становится в очередь и может ждать неограниченное время, пока его не обслужат.

Решение:

$$\mu = \frac{1}{T_{об}} = \frac{1}{0,6} = 1,667, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{1,667} = 1,8$$

В системе будет существовать установившийся режим если р < n, что выполняется. 1,8<2.

Для определения Р оч и Lоч найдем величину Ро - вероятность того, что все каналы свободны, по формуле

$$P_o = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + .. + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}$$

Для нашего случая:

$$P_o = \left(1 + \frac{1{,}8}{1!} + \frac{1{,}8^2}{2!} + \frac{1{,}8^3}{2!(2-1{,}8)}\right)^{-1} = \frac{1}{19} \approx 0{,}053$$

Величины Роч и Lоч вычисляются по формулам:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_o\,, \quad L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!(1-\frac{\rho}{n})^2} P_0$$

Находим вероятность наличие очереди:

$$P_{оч} = \frac{1{,}8^3}{2!(2-1{,}8)} \cdot 0{,}053 \approx 0{,}77$$

$$L_{оч} = \frac{1{,}8^3}{2!(1-\frac{1{,}8}{2})^2} \cdot 0{,}053 \approx 7{,}67$$

2. СМО с бесконечным числом приборов.

Пусть входящий поток требований простейший с интенсивностью λ. Обслуживающие приборы имеют одинаковую пропускную способность μ и время обслуживания распределено по показательному закону.

В этой СМО предполагается, что любое требование, поступающее в систему должно застать прибор свободным от обслуживания.

Так моделируется работа аварийных служб, скорой помощи, системы быстрого питания.

Выходные параметры:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

1. Вероятность того, что в системе находится k требований

$$\mathrm{p}_k = \frac{e^{-\rho}\rho^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Количество обслуживающих приборов n определяется как наиболее вероятное состояние системы.

$$\mathrm{p}_m = \max_k \mathrm{p}_k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Пример.

На станцию скорой помощи поступает в час в среднем 2 вызова. После получения каждого вызова станция должна отправить врача к больному, и время, затрачиваемое на оказание медицинской помощи и дорогу 1,5 ч. Определить сколько машин должно работать.

По условию

$\lambda = 2$, $T_{об} = 1{,}5$.

Тогда

$$\mu = \frac{1}{T_{об}} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}667\,, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{0{,}667} = 3$$

Вероятность того, что поступило 1 требование

$$\mathrm{p}_1 = \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0{,}149$$

Вероятность того, что поступило 2 требования

$$p_2 = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0{,}224$$

Аналогично.

$$p_3 = \frac{e^{-3}3^3}{3!} = 0{,}224$$

$$p_4 = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0{,}158$$

$$p_5 = \frac{e^{-3}3^5}{5!} = 0{,}101$$

$$p_6 = \frac{e^{-3}3^6}{6!} = 0{,}05$$

Наибольшая вероятность соответствует тому, что поступит 2 или 3 требования. То есть должны работать 2 или 3 машины скорой помощи.

Лекция 7. Игры с природой.

Вопросы:

1. Статистические игры (игры с природой).
2. Матрица рисков.
3. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица для выбора оптимальных стратегий.

1. Статистические игры (игры с природой).

В стратегической игре принимают участие «разумные» и «антагонистические» противники (противоборствующие стороны). В таких играх каждая из сторон предпринимает именно те действия, которые наиболее выгодны ей и менее выгодны противнику. Однако очень часто неопределенность, сопровождающая некоторую операцию, не связана с сознательным противодействием противника, а зависит от некой не известной игроку I объективной действительности (природы). Такие ситуации принято называть *играми с природой.* Игрок II – природа – в теории игр не является разумным игроком, так как рассматривается как незаинтересованная инстанция, которая не выбирает для себя оптимальных стратегий. Возможные состояния природы (ее стратегии) реализуются случайным образом.

Рассмотрим игровую постановку задачи принятия решения в условиях неопределенности. Пусть первому игроку необходимо выполнить операцию в недостаточно известной обстановке, относительно состояний которой можно сделать n предположений. Эти предположения $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$ будем рассматривать как стратегии природы. Первый игрок имеет в своем распоряжении m возможных стратегий: A_1, A_2, ..., A_m. Выигрыши a_{ij} игрока I при каждой паре стратегий A_i и $П_j$, предполагаются известными и заданы платежной матрицей $A = \left(a_{ij}\right)$. Задача заключается в определении такой стратегии (чистой или смешанной), которая обеспечила бы игроку I наибольший выигрыш.

Рассмотрим пример, который можно интерпретировать и решить в терминах игр с природой.

Пример. Сельскохозяйственное предприятие имеет три участка земли: влажный A_1, средней влажности A_2 и сухой A_3. Один из этих участков предполагается использовать для выращивания картофеля, а остальные – зеленой массы. Известно, что для получения хорошего урожая картофеля требуется наличие определенного количества влаги в почве в период вегетации. При излишней влажности посаженный картофель на некоторых участках может гнить, а при недостаточном количестве осадков будет плохо развиваться, что приводит к снижению урожайности. Требуется определить, на каком участке сажать картофель, чтобы получить хороший урожай, если известна средняя урожайность картофеля на каждом участке в зависимости от погодных условий. На участке A_1 урожайность составляет 200, 100 и 250 ц с I га при выпадении соответственно нормального количества осадков, больше и меньше нормы. Аналогично на участке A_2 урожайность составляет 230, 120 и 200 ц. а на участке A_3 – 240, 260 и 100 ц.

На данном этапе решения ограничимся построением платежной матрицы. Обозначим через $П_1$, $П_2$, $П_3$ стратегии игрока II (природы), соответствующие количеству осадков меньше нормы, в норме и больше нормы. У сельскохозяйственного предприятия (игрока 1) также три стратегии: A_1 – сажать картофель на влажном участке: A_2 – сажать на участке средней влажности и A_3 – сажать на сухом участке. Выигрыш сельскохозяйственного предприятия при каждой паре стратегий A_i и $П_j$ задается урожайностью картофеля с 1 га (табл. 9).

Таблица 9

II / I	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	250	200	100
A_2	200	230	120
A_3	100	240	260

2. Матрица рисков.

В экономических ситуациях целесообразно не только оценить выигрыш при той или иной игровой ситуации, но и определить разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем, который будет получен в случае применения стратегии A_i в тех же условиях. Эта разность в теории игр называется риском. Риск можно понимать как недополученный выигрыш.

Как и ранее, максимальный выигрыш в j-м столбце обозначим β_j т.е. $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ (величина β_j; характеризует благоприятное состояние природы). Риск игрока при использовании им стратегии A_i в условиях $П_j$ обозначим r_{ij}. Тогда $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $r_{ij} > 0$.

Матрица рисков $R = \left(r_{ij}\right)_{m\times n}$ во многих случаях позволяет более глубоко понять неопределенную ситуацию, чем матрица выигрышей.

Пример. Необходимо произвести пересчет матрицы выигрышей (табл. 9) в матрицу рисков.

Для удобства матрицу выигрышей перепишем в виде табл. 10. Находим значения β_j;, j = 1, 2, 3. :

β_1 =max(250; 200; 100)=250

β_2 =max(200; 230; 240)=240

β_3 =max(100; 120; 260)=260

Таблица 10

II / I	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	250	200	100
A_2	200	230	120
A_3	100	240	260
β_j	250	240	260

Рассчитаем элементы матрицы рисков:

$r_{11} = \beta_1 - a_{11} = 250 - 250 = 0$,

$r_{21} = \beta_1 - a_{21} = 250 - 200 = 50$,

$r_{31} = \beta_1 - a_{31} = 250 - 100 = 150$,

$r_{12} = \beta_2 - a_{12} = 240 - 200 = 40$, … .

Окончательно получим матрицу рисков (табл. 11).

Таблица 11

II / I	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	40	160
A_2	50	10	140
A_3	150	0	0

Элементы матрицы рисков, соответствующие стратегиям A_i в условиях $П_j$ характеризуют общую благоприятность или неблагоприятность для игрока I отдельных состояний природы. Игрок I, применяя стратегию A_3 в условиях $П_1$ рискует потерять урожайность 150 ц/га, а если наступят условия $П_2$ или $П_3$, то его риск равен нулю.

3. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица для выбора оптимальных стратегий.

Критерий Байеса основан на известных вероятностях стратегий природы. Иногда неопределенность ситуации удается в некоторой степени ослабить. Это достигается нахождением вероятностей состояний на основе статистических наблюдений.

Предположим, что вероятности состояний природы известны:

$$P(П_1) = q_1; \quad P(П_2) = q_2; \; \ldots; \; P(П_n) = q_n.$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Обозначив через $\overline{\alpha_i}$, среднее значение (математическое ожидание) выигрыша, которое игрок I стремится максимизировать, будем иметь:

$$\overline{\alpha_i} = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j, \quad i = \overline{1,m}$$

В качестве оптимальной выбирается та из стратегий A_i, $i = \overline{1,m}$, которая соответствует максимальному среднему значению выигрыша:

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{\alpha_i} = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \right\} \qquad (1)$$

Оптимальную стратегию при известных вероятностях состояний природы можно найти, используя показатель риска. Для этого необходимо определить среднее значение риска:

$$\overline{r_i} = r_{i1}q_1 + r_{i2}q_2 + \ldots + r_{in}q_n = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}q_j, \quad i = \overline{1,m}$$

В качестве оптимальной стратегии в данном случае выбирается та, которая обеспечивает минимальное среднее значение риска:

$$\overline{r} = \min_i \overline{r_i} = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_{ij}q_j \right\}.$$

Пример 3. На основе данных примера 1 (см. табл. 9) определить оптимальную стратегию, если известны вероятностные характеристики погодных условий: вероятность выпадения осадков меньше нормы (q_1 = 0,3), равна норме (q_2 = 0,4), больше нормы (q_3 = 0,3).

Средние значения выигрышей для каждой из стратегий игрока I: $\overline{\alpha_1}$ = 185 ц, $\overline{\alpha_2}$ = 188 ц, $\overline{\alpha_3}$ = 204 ц. Максимальное среднее значение выигрыша

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{\alpha_i} = \max\{185, 188, 204\} = 204.$$

Следовательно, оптимальной стратегией является стратегия A_3 (сажать картофель на сухом участке).

!!!!!!!!!Найти решение этой же задачи по критерию риска.

В случае, когда ни оно состояние нельзя предпочесть другому для оценки вероятностей состояний природы используют принцип ***недостаточного основания***

Лапласа, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т.е. $q_1 = q_2 = ... = q_n = \frac{1}{n}$.

Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{\alpha_i} = \max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$$

или минимум среднего риска

$$\overline{r} = \min_i \overline{r_i} = \min_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right\}.$$

Пример 4. На основе данных примера 1 (см. табл. 9) найти решение игры, используя принцип недостаточного основания Лапласа.

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1/4 = 0{,}25$. Тогда

Средние значения выигрышей для каждой из стратегий игрока I: $\overline{\alpha_1}$ = 183,3 ц, $\overline{\alpha_2}$ = 183,3 ц, $\overline{\alpha_3}$ = 200 ц. Максимальное среднее значение выигрыша

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{\alpha_i} = \max\{183{,}3;\ 183{,}3;\ 200\} = 200.$$

Следовательно, оптимальной стратегией является стратегия A_3 (сажать картофель на сухом участке).

!!!!!!!!!Найти решение этой же задачи по критерию риска.

Кроме рассмотренных подходов к решению игр с природой существуют и другие, позволяющие находить оптимальные решения в условиях полной неопределенности, основанные на применении иных критериев.

Максиминный критерий Вальда. Это критерий крайнего пессимизма. В соответствии с этим критерием в качестве оптимальной рекомендуется выбирать ту стратегию, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш, т. е. максиминную стратегию:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Этот критерий, как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма. Согласно ему рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях риск наименьший:

$$r = \min_i \max_j r_{ij} \qquad (2)$$

Критерий Гурвица. Этот критерий называют ***критерием*** *обобщенного* ***максимума*** или ***критерием пессимизма-оптимизма.*** Он имеет следующий вид:

$$S = \max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij})$$

где $0 \le \lambda \le 1$.

Очевидно, что при $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ – в критерий крайнего оптимизма. Коэффициент λ выбирается на основании: субъективных соображений (опыта, здравого смысла и т.д.).

Пример 5. На основе данных примера 1 (см. табл. 9) найти решение игры по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\lambda = 0{,}2$.

Критерий Вальда:

Минимальные значения выигрышей для каждой из стратегий игрока I: α_1 = 100 ц, α_2 = 120 ц, α_3 = 100 ц. Максимальное значение

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max\{100;\ 120;\ 100\} = 120.$$

Следовательно, оптимальной стратегией является стратегия A_2 (сажать картофель на участке средней влажности).

Критерий Сэвиджа:

Максимальные значения рисков для каждой из стратегий игрока I: r_1 = 160 ц, r_2 = 140 ц, r_3 = 150 ц. Минимальное значение

$$r = \min_i r_i = \min\{160; 140; 150\} = 140 .$$

Следовательно, оптимальной стратегией является стратегия A_2 (сажать картофель на участке средней влажности).

Критерий Гурвица:

*S1=0.2*100+0.8*250=20+200=220*
*S2=0.2*120+0.8*230=24+184=208*
*S3=0.2*100+0.8*260=20+208=228*

Max (220,208,228) =228

Следовательно, оптимальной стратегией является стратегия A_3 (сажать картофель на сухом участке).

Лекция 8. ЭММ межотраслевого баланса.

Вопросы:

1. ЭММ межотраслевого баланса (МБ).
2. Экономическая схема МБ.
3. Матрицы межотраслевых потоков, прямых материальных затрат.
4. Математические зависимости в матричных моделях межотраслевого баланса.Уравнение Леонтьева.
5. Матрица полных материальных затрат.

1. ЭММ межотраслевого баланса (МБ).

Эффективное функционирование экономики предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями используют таблицы определенного вида, которые называют таблицами межотраслевого баланса.

Межотраслевой баланс - это таблица статистических данных, в которой отражено производство продукции, и ее распределение между отраслями. С помощью модели межотраслевого баланса можно выполнять плановые расчеты.

Межотраслевой баланс представляет собой экономико-математическую модель процесса воспроизводства, которая в развернутом виде отражает взаимосвязи по производству, распределению, потреблению и накоплению общественного продукта в разрезе отраслей народного хозяйства и в единстве материально-вещественного и стоимостного аспектов воспроизводства.

Межотраслевые балансы могут разрабатываться на плановый и отчетный период в натуральном, натурально-стоимостном и стоимостном выражении.

Межотраслевые балансы в натуральном выражении (в физических измерителях) охватывают только важнейшие виды продукции. Натурально-стоимостной (баланс смешанного типа) охватывает весь общественный продукт. Стоимостной баланс характеризует процесс воспроизводства в денежном выражении.

При построении межотраслевого баланса используется понятие «чистой» отрасли, те. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например агрегирования (объединения) отраслей, исключения внутриотраслевого оборота.

2. Экономическая схема МБ.

Межотраслевой баланс может быть представлен в виде схемы и модели. Схема межотраслевого баланса производства и распределения общественного продукта в стоимостном выражении приведена в табл. 1.

Все народное хозяйство представляется в виде совокупности *n* отраслей. Вся продукция отраслей разделена на промежуточную и конечную.

На схеме использованы обозначения:

x_{ij} – затраты продукции отрасли i ($i=\overline{1,n}$) на производство продукции отрасли j ($j=\overline{1,n}$);

y_i –конечная продукция отрасли i;

x_i - валовая продукция i-й отрасли;

v_j – добавленная стоимость j-ой отрасли.

В схеме МОБ можно выделить три раздела или квадранта.
В схеме МОБ можно выделить три раздела или квадранта.

Таблица 1

Отрасли-производители	Отрасли-потребители				Промежуточное потребление	Конечное потребление	Валовый выпуск
	1	2	…	n			
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_2	x_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n	x_n
Промежуточные затраты	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$
Валовая добавленная стоимость	v_1	v_2	…	v_n	$\sum_{j=1}^{n} v_j$		
Валовый выпуск	x_1	x_2	…	x_n	$\sum_{j=1}^{n} x_j$		

I раздел представляет собой матрицу элементов, стоящих на пересечении *n* первых строк и *n* первых столбцов баланса. Этот раздел отражает межотраслевые взаимосвязи по использованию продукции на текущее производственное (промежуточное) потребление.

Величины $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad (i=\overline{1,n})$ характеризуют производственное потребление продукции i-ой отрасли, величины $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad (j=\overline{1,n})$ суммы производственных затрат j-ой отрасли. Число $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ равно сумме всех производственных затрат всех отраслей. Это так называемый промежуточный продукт народного хозяйства.

II раздел расположен справа от столбца промежуточного потребления. Этот раздел дан укрупненно, в виде одного столбца величин y_i. В развернутой схеме отображается использование на личное и общественное потребление, валовое накопление. Кроме того, в конечный продукт входит сальдо экспорта-импорта продукции. II раздел отражает отраслевую и материально-вещественную структуру конечного использования общественного продукта.

III раздел расположен под первым. Раздел также дан укрупненно, в виде строки величин v_j. В развернутой схеме отражаются элементы добавленной стоимости: потребление основного капитала, прибыль, заработная плата; косвенные налоги, субсидии. III раздел отражает стоимостную структуру валового внутреннего продукта.

В схеме МОБ совмещаются два частных межотраслевых баланса – баланс распределения продукции (I и II раздел) и баланс затрат (I и III раздел).

В I и II разделе представлено распределение произведенной продукции на нужды текущего производственного и конечного потребления. Соотношение показателей выражается системой уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + y_1 = x_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + y_2 = x_2 \\ .... \\ x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + y_n = x_n \end{cases} \qquad (1)$$

В I и III разделах в отраслевом разрезе представлены затраты, осуществленные на производство продукции и добавленная стоимость.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{n1} + v_1 = x_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{n2} + v_2 = x_2 \\ .... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{nn} + v_n = x_n \end{cases} \qquad (2)$$

Объемы валового внутреннего продукта по материально-вещественному и стоимостному составу равны.

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

3. Матрицы межотраслевых потоков, прямых материальных затрат.

Однако для прогнозных расчетов соотношения в виде (1) и (2) малопригодны в силу сложности определения элементов промежуточного потребления x_{ij} $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$.

Поэтому определение последних осуществляют на базе нормативов, называемых *коэффициентами прямых затрат*, или *технологическими коэффициентами*, и выражающихся соотношениями

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,n}$$

Коэффициенты прямых затрат a_{ij} показывают, какое количество продукции i-ой отрасли необходимо для производства единицы валовой продукции j-ой отрасли. В совокупности они образуют матрицу прямых затрат

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

При этом предположении величины *межотраслевых потоков* могут быть определены по формуле

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

4. Математические зависимости в матричных моделях межотраслевого баланса. Уравнение Леонтьева.

Запишем систему (1) с учетом соотношения (3)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = x_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_3 = x_n \end{cases} \qquad (4)$$

Обозначим через $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ вектор валового выпуска, а через $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ вектор конечной продукции.

Запишем (4) в матричной форме

$$AX + Y = X \text{ или } (E - A)X = Y \quad (5)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ – единичная матрица размерности n x n.

Система (4), записанная как векторное уравнение (5) называется уравнением Леонтьева. С его помощью выполняют планирование и прогнозирование в экономике.

5. Матрица полных материальных затрат.

Выразим X из балансового соотношения (5)

$$X = (E - A)^{-1} Y \quad (6)$$

где $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная (E-A). Ее называют матрицей коэффициентов полных затрат и обозначают

$$B = (E - A)^{-1} = (b_{ij})_{n \times n} \quad (7)$$

Тогда $X = BY$

Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, какое количество продукции i-ой отрасли необходимо, для получения единицы конечной продукции j-ой отрасли.

Экономический смысл коэффициентов полных затрат b_{ij} будет понятен, если переписать соотношения (6) с учетом обозначения (7) в развернутом виде.

$$\begin{cases} x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + ... + b_{1n} y_n \\ x_2 = b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + ... + b_{2n} y_n \\ .... \\ x_n = b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + ... + b_{nn} y_n \end{cases} \quad (8)$$

Положим, что осуществляется выпуск конечной продукции лишь одной (пусть первой) отрасли в размере 1 ден. ед., т. е.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Из соотношения (8) очевидно, что для того, чтобы обеспечить конечную продукцию в указанном объеме необходимо обеспечить валовой выпуск продукции отраслей соответственно в объеме b_{11}, b_{21}, ... b_{n1}. Таким образом, элементы первого столбца матрицы B показывают количество валовой продукции отраслей, необходимых для производства единицы конечной продукции первой отрасли. Аналогично можно показать, что элементы j-го столбца матрицы B показывают количество валовой продукции отраслей, необходимых для производства единицы конечной продукции j-й отрасли.

Матрица $B = (E - A)^{-1}$ существует только в том случае, если матрица A является продуктивной, т.е. сумма элементов каждого столбца матрицы коэффициентов прямых затрат меньше 1, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Пример.

При условном делении экономики на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство и прочие отрасли задана матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}54 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}17 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$ и вектор конечной продукции $У= \begin{bmatrix} 30 \\ 17 \\ 10 \end{bmatrix}$

Рассчитать:

1. плановые объемы валовой продукции;
2. величины межотраслевых потоков;
3. условно-чистую продукцию;
4. матрицу полных затрат;
5. составить межотраслевой баланс.

Решение:

Определим, является ли матрица *A* продуктивной. Для этого вычислим суммы элементов этой матрицы по столбцам. Они будут равны 0,92; 0,48; 0,39. Так как максимальная сумма 0,92<1, то матрица будет продуктивной и решение задачи существует.

Модель межотраслевого баланса имеет вид

$(E\text{-}A)x=y$

Вектор спроса *y* известен. Задача межотраслевого баланса заключается в определении вектора выпуска *x*.

1. Решение уравнения можно представить в виде:

$x=(E\text{-}A)^{-1}y$

Найдем $(E\text{-}A)^{-1}$. Сначала находим

$$E - A = \begin{bmatrix} 0{,}46 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}83 & -0{,}1 \\ -0{,}08 & -0{,}06 & 0{,}91 \end{bmatrix}.$$

Далее вычисляем определитель этой матрицы.

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0{,}46 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}83 & -0{,}1 \\ -0{,}08 & -0{,}06 & 0{,}91 \end{vmatrix} = 0{,}46*0{,}83*0{,}91 + (-0{,}25)*(-0{,}1)*(-0{,}08) +$$

+ (-0,3)*(-0,06)*(-0,2) – (-0,08)*0,83*(-0,2) – (-0,3)*(-0,25)*0,91 – (-0,06)*(-0,1)*0,46= =0,3474-0,002-0,0036-0,0133-0,0683-0,0028=0,2576

Находим транспонированную матрицу $(E\text{-}A)^T$:

$$(E - A)^T = \begin{bmatrix} 0{,}46 & -0{,}3 & -0{,}08 \\ -0{,}25 & 0{,}83 & -0{,}06 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}91 \end{bmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы $(E\text{-}A)^T$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0{,}83 & -0{,}06 \\ -0{,}1 & 0{,}91 \end{vmatrix} =0{,}83*0{,}91-(-0{,}06)*(-0{,}1)=0{,}7493;$$

$$A_{12}= -\begin{vmatrix} -0{,}25 & -0{,}06 \\ -0{,}2 & 0{,}91 \end{vmatrix} = -(-0{,}25*0{,}91-(-0{,}06)*(-0{,}2))=0{,}2395;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -0{,}25 & 0{,}83 \\ -0{,}2 & -0{,}1 \end{vmatrix} =-0{,}25*(-0{,}1)-0{,}83*(-0{,}2)=0{,}191;$$

$$A_{21}= -\begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}08 \\ -0{,}1 & 0{,}91 \end{vmatrix} =-(-0{,}3*0{,}91-(-0{,}08)*(-0{,}1))=0{,}281;$$

$A_{22}=\begin{vmatrix} 0,46 & -0,08 \\ -0,2 & 0,91 \end{vmatrix}$=0,46*0,91-(-0,08)*(-0,2)=0,4026;

$A_{23}==-\begin{vmatrix} 0,46 & -0,3 \\ -0,2 & -0,1 \end{vmatrix}$=-(0,46*(-0,1)-(-0,3)*(-0,2))=0,106;

$A_{31}=\begin{vmatrix} -0,3 & -0,08 \\ 0,83 & -0,06 \end{vmatrix}$=(-0,3)*(-0,06)-(-0,08)*0,83=0,0844;

$A_{32}=-\begin{vmatrix} 0,46 & -0,08 \\ -0,25 & -0,06 \end{vmatrix}$= - (0,46*(-0,06)-(-0,08)*(-0,25))=0,0476;

$A_{33}==\begin{vmatrix} 0,46 & -0,3 \\ -0,25 & 0,83 \end{vmatrix}$=0,46*0,83-(-0,3)*(-0,25)=0,3068

Находим искомую матрицу $(E\text{-}A)^{-1}$:

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{\det(E-A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}=\frac{1}{0,2576}\begin{bmatrix} 0,7493 & 0,2395 & 0,191 \\ 0,281 & 0,4026 & 0,106 \\ 0,0844 & 0,0476 & 0,3068 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2,909 & 0,9299 & 0,7416 \\ 1,091 & 1,5632 & 0,4116 \\ 0,3277 & 0,1848 & 1,1912 \end{bmatrix}.$$

Зная $(E\text{-}A)^{-1}$, находим вектор выпуска:

$$x=(E-A)^{-1}y=\begin{bmatrix} 2,909 & 0,9299 & 0,7416 \\ 1,091 & 1,5632 & 0,4116 \\ 0,3277 & 0,1848 & 1,1912 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 17 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 110,51 \\ 63,42 \\ 24,89 \end{bmatrix}$$

2. Для нахождения величин межотраслевых потоков необходимо умножить столбцы матрицы А на найденные значения валового выпуска.

$$C=\begin{bmatrix} 0,54*110,51 & 0,25*63,42 & 0,2*24,89 \\ 0,3*110,51 & 0,17*63,42 & 0,1*24,89 \\ 0,08*110,51 & 0,06*63,42 & 0,09*24,89 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 59,68 & 15,86 & 4,98 \\ 33,15 & 10,78 & 2,49 \\ 8,84 & 3,81 & 2,24 \end{bmatrix}$$

3. Найдем условно-чистую продукцию:

$$v_j=x_j-\sum_{i=1}^{3}x_{ij}$$

$$V=\begin{bmatrix} 110,51 \\ 63,42 \\ 24,89 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 101,66 \\ 30,43 \\ 9,71 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8,84 \\ 32,98 \\ 15,18 \end{bmatrix}$$

4. Матрица полных затрат это матрица $(E\text{-}A)^{-1}$

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 2,909 & 0,9299 & 0,7416 \\ 1,091 & 1,5632 & 0,4116 \\ 0,3277 & 0,1848 & 1,1912 \end{bmatrix}$$

5. Модель межотраслевого баланса имеет вид

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			$\sum$	Конечный продукт	Валовой продукт
	1	*2*	*3*			
1	59,68	15,86	4,98	80,51	30	110,51

2	33,15	10,78	2,49	46,42	17	63,42
3	8,84	3,81	2,24	14,89	10	24,89
$\sum$	101,67	30,44	9,71	141,81	57,00	198,81
y_j	8,84	32,98	15,18			
Валовой продукт	110,51	63,42	24,89			

Лекция 9. Статистическое моделирование.

Вопросы:

1. Статистическое моделирование.
2. Краткосрочное прогнозирование стационарных показателей методом скользящего среднего и экспоненциального взвешенного среднего.
3. Краткосрочное прогнозирование стационарных показателей методом экспоненциального взвешенного среднего.
4. Меры точности прогноза.

1. Статистическое моделирование.

Прогноз – результат экстрополяции прошлого в будущее.

Прогнозы строятся на основании статистических данных и представляют собой несмещенные оценки моделируемого показателя.

Пусть дан временной ряд $d_1, d_2, ... d_t$ некоторого экономического показателя. Временной ряд – это значения некоторого экономического показателя в отдельные моменты времени.

По этим данным строится прогноз $u(t)$ и он является несмещенной оценкой показателя d_{t+1}.

$$u_t = \hat{d}_{t+1}$$

Несмещенная оценка – математическое ожидание этой оценки равно оцениваемому параметру:

$$M(u_t) = M(\hat{d}_{t+1}) = d_{t+1}$$

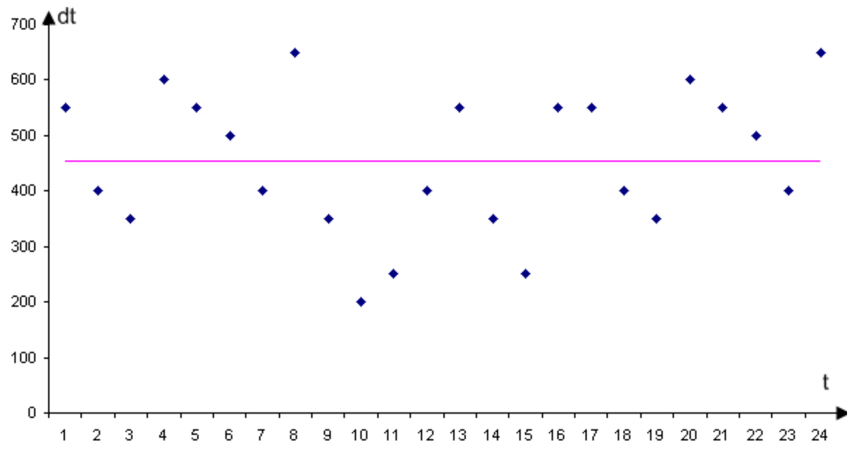
В моделировании строят несмещенные оценки. Однако, если мы имеем объективное предсказание, что этот прогноз не может быть выполнен, то его надо подправлять.

Например, объемы строительства росли в течение нескольких последних лет, следовательно, прогноз на следующий год – ожидается рост.

При прогнозировании экономических показателей различают 2 типа:

1) стационарные;
2) нестационарные.

<u>Стационарные</u> – среднее значение показателя практически остается неизменным.



При прогнозировании таких показателей используют методы краткосрочного прогнозирования:

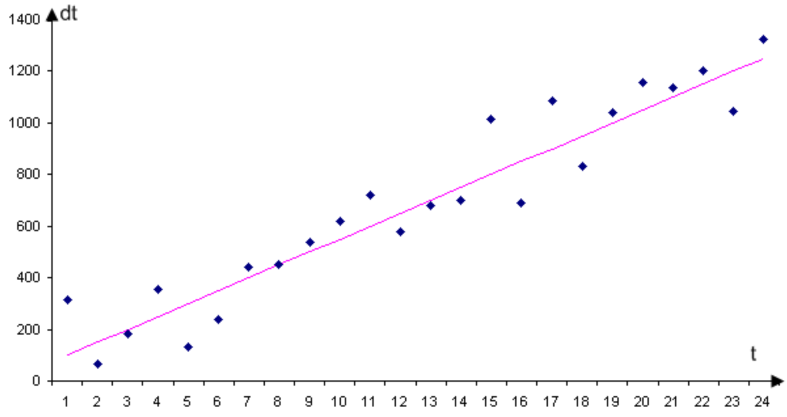
а) метод скользящего среднего;

б) метод экспоненциального взвешенного среднего;

<u>Нестационарные</u> – среднее значение показателя изменяется с течением времени.

При прогнозировании таких показателей используют методы среднесрочного прогнозирования или методы регрессионного выравнивания, с помощью которого строят функцию тренда данного показателя.

Тренд – функция, которая определяет изменение среднего значения моделируемого показателя во времени



2. Краткосрочное прогнозирование стационарных показателей методом скользящего среднего.

Пусть дан временной ряд $d_1, d_2, \ldots d_t$ для моделируемого показателя.

Суть по методу скользящего среднего заключается в том, что прогнозом считают среднее арифметическое последних n значений временного ряда, т.е.

$$u_t = \frac{1}{n}\left(d_t + d_{t-1} + \ldots + d_{t-n+1}\right) \qquad (1)$$

$$u_t = \hat{d}_{t+1}$$

$e_{t+1} = d_{t+1} - u_t$ – ошибка прогноза. (2)

К недостаткам этого метода следует отнести следующее:

1. Для получения прогноза мы должны знать несколько значений временного ряда.

2. При построении прогноза все значения временного ряда в одинаковой степени влияют на прогноз и не учитывается фактор старения данных.

Пример 1.

Спрос на листовое железо по месяцам года.

Месяц	Спрос d_t	Прогноз u_{t-1}	Ошибка e_t
1	60		
2	70		
3	55		
4	80		
5	90	66,25	23,75
6	65	73,75	-8,75
7	70	72,5	-2,5
8	75	76,25	-1,25
9	60	75	-15
10	80	67,5	12,5
11	90	71,25	18,75
12	100	76,25	23,75
13	95	82,5	12,5

Выполнить прогноз по методу скользящего среднего, взяв 4 значения.

$u_4 = \hat{d}_5$, $u_5 = \hat{d}_6$ и т.д.

$$u_4 = \frac{1}{4}\left(d_4 + d_3 + d_2 + d_1\right) = \frac{1}{4}(80 + 55 + 70 + 60) = 66{,}25$$

$$u_5 = \frac{1}{4}\left(d_5 + d_4 + d_3 + d_2\right) = \frac{1}{4}(90 + 80 + 55 + 70) = 73{,}75$$

$$u_6 = \frac{1}{4}\left(d_6 + d_5 + d_4 + d_3\right) = \frac{1}{4}(65 + 90 + 80 + 55) = 72{,}5$$

3. Краткосрочное прогнозирование стационарных показателей методом экспоненциального взвешенного среднего.

Пусть дан временной ряд $d_1, d_2, \ldots d_t$.

Рассмотрим последовательность чисел

$$\alpha;\ (1-\alpha)\alpha;(1-\alpha)^2\alpha;\ \ldots;\ (1-\alpha)^n\alpha;\ \ldots\quad 0 \le \alpha \le 1 \qquad (1)$$

(1) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $q = (1-\alpha)$ и сумма этой прогрессии равна 1.

Последовательность (1) – это последовательность весовых коэффициентов, а сами числа называются весами или весовыми коэффициентами.

При построении прогноза по методу экспоненциального взвешенного среднего все значения временного ряда оказывают влияние на прогноз, но каждое из них входит со своим весовым коэффициентом, причем более поздние входят с большими коэффициентами.

$$u_t = \alpha d_t + \alpha(1-\alpha)d_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 d_{t-2} + \ldots \qquad (2)$$

Запишем предыдущий прогноз u_{t-1}

$$u_{t-1} = \alpha d_{t-1} + \alpha(1-\alpha)d_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 d_{t-3} + \ldots$$

Преобразуем равенство (2)

$$u_t = \alpha d_t + (1-\alpha)(\alpha\, d_{t-1} + \alpha(1-\alpha)d_{t-2} + \ldots)$$

$$u_t = \alpha d_t + (1-\alpha)u_{t-1} = u_{t-1} + \alpha(d_t - u_{t-1})$$

Так как $e_{t+1} = d_{t+1} - u_t$ – ошибка прогноза, то $e_t = d_t - u_{t-1}$

$$u_t = u_{t-1} + \alpha \cdot e_t \qquad (3)$$

Для вычисления прогноза по этому методу требуется:

1) Определить константу α

Так как имеет место следующее соответствие между константами и значениями ряда

α	$\alpha(1-\alpha)$	$\alpha(1-\alpha)^2$
d_t	d_{t-1}	d_{t-2}

α характеризует фактор старения данных (степень старения). Чем больше α к единице, тем быстрее устаревают данные. На практике чаще всего α выбирают 0,2, но в отдельных случаях она может быть другой.

2) Чтобы начать прогноз по этому методу, необходимо задать первоначальный или нулевой прогноз. Обычно его могут определять следующим образом:

а) полагают начальное значение временного ряда $u_0 = d_1$;

б) полагают равным среднему арифметическому из уже известных значений этого моделируемого показателя;

в) методом экспертных оценок.

Пример 2.

По данным примера 1 построить прогноз методом экспоненциального взвешенного среднего с α =0,2. Начальное значение прогноза $u_0 = 70$.

Месяц	Спрос d_t	Прогноз u_{t-1}	Ошибка e_t
1	d_1 60	u_0 70	e_1 -10
2	d_2 70	u_1 68	e_2 2
3	55	68,4	-13,4
4	80	65,72	14,28
5	90	68,576	21,424
6	65	72,8608	-7,8608
7	70	71,28864	-1,28864
8	75	71,030912	3,969088
9	60	71,8247296	-11,82473
10	80	69,4597837	10,540216
11	90	71,5678269	18,432173
12	100	75,2542616	24,745738
13	95	80,2034092	14,796591

$u_1 = u_0 + \alpha \cdot e_1 \qquad u_1 = 70 + 0{,}2 \cdot (-10) = 70 - 2 = 68$

$u_2 = u_1 + \alpha \cdot e_2 \qquad u_2 = 68 + 0{,}2 \cdot 2 = 68 + 0{,}4 = 68{,}4$

$u_3 = u_2 + \alpha \cdot e_3 \qquad u_3 = 68{,}4 + 0{,}2 \cdot (-13{,}4) = 65{,}72$

4. Меры точности прогноза.

Пусть дан временной ряд $d_1, d_2, \ldots d_t$ и по какому-либо методу построен прогноз $u_0, u_1, \ldots u_{t-1}$

Меры точности прогноза:

1) $e_t = d_t - u_{t-1}$ – разность между значениями временного ряда и величиной прогноза

2) Стандартное отклонение

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(d_t - u_{t-1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

σ_t определяет степень точности прогноза. С большой степенью достоверности можно сказать, что прогнозируемое значение будет отклоняться от прогноза на величину $\pm 2\sigma_t$.

3) Средняя абсолютная процентная ошибка

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{e_t}{d_t}\right| \cdot 100\%$$

MAPE определяет степень точности прогноза.

MAPE <10% – высокая точность прогноза;

10% <MAPE <20% – хорошая точность прогноза;

20% <MAPE <50% – удовлетворительная точность прогноза;

MAPE >50% – неудовлетворительная точность прогноза;

Для примера

1) Метод скользящего среднего MAPE =18,21%

2) Метод экспоненциального взвешенного среднего MAPE =15,37%

Лекция 10. Среднесрочное прогнозирование.

Вопросы:

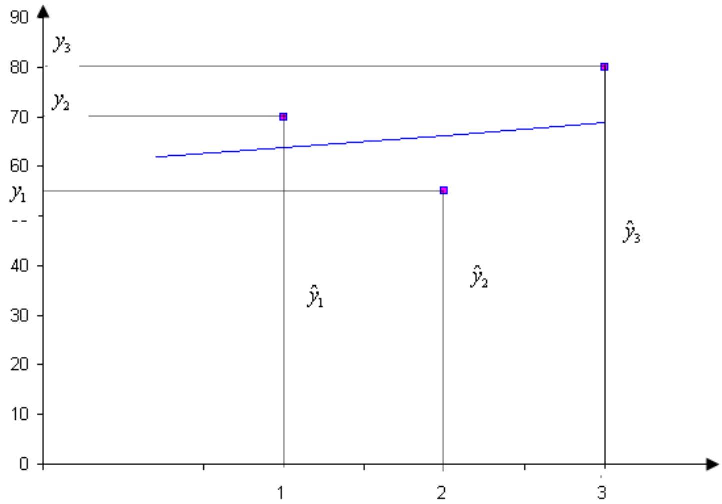
1. Среднесрочное прогнозирование нестационарных показателей. Метод наименьших квадратов.
2. Виды трендов, построение трендов.
3. Типы дисперсий. Коэффициент детерминации.
4. Параметры адекватности в статистическом моделировании. Коэффициенты детерминации и корреляции.
5. Точечный прогноз. Доверительный интервал прогноза.

1. Среднесрочное прогнозирование нестационарных показателей. Метод наименьших квадратов.

Пусть для нестационарного показателя известны значения $y_1, y_2, \dots y_t$ в различные моменты времени.

Основным методом для регрессионного выравнивания является метод наименьших квадратов. Суть МНК заключается в том, что сумма квадратов отклонений фактических значений от значений, вычисленных по уравнению регрессии $\hat{y}_t = f(t)$ должна быть минимальной.

Графически:



$$S = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2 \to \min \qquad (1)$$

Если уравнение регрессии линейное, т.е. $\hat{y}_t = at + b$, то из равенства (1) можно найти коэффициенты a и b.

$$S(a,b) = \sum_{t=1}^{n} (y_t - at - b)^2 \to \min$$

Взяв производные по переменным a и b, приравняв их к нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} n \cdot a + \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot a + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \cdot b = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot y_i \end{cases}$$

Решая эту систему относительно a и b находим коэффициенты уравнения $\hat{y}_t = at + b$.

2. Виды трендов, построение трендов.

Регрессионная зависимость – изменения среднего значения одной случайной величины от другой.

Если $\hat{y}_t = at^b$ – то эту функцию сначала сводят к линейной функции. Для этого ее логарифмируют

$$\ln \hat{y}_t = \ln a + b \cdot \ln t$$

Введя обозначения

$$\ln \hat{y}_t = \hat{Y}_t \qquad \ln a = A \qquad \ln t = T$$

Получаем

$$\hat{Y}_t = A + b \cdot T$$

Затем ее строят как линейную функцию. Находят A и b.

$$a = e^A$$

3. Типы дисперсий. Коэффициент детерминации.

Для определения значимости характеристик в регрессионном анализе требуется оценивать величины дисперсии:

1) общая дисперсия – дисперсия значений ряда наблюдаемого моделируемого показателя от его среднего значения.

$ОД = \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \overline{y}\right)^2$ – сумма квадратов отклонений наблюдаемого значения от среднего.

$y_1, y_2, \dots y_n$ – наблюдаемые значения

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} y_t .$$

2) объясняемая дисперсия – дисперсия значений $\hat{y}_t = f(t)$, вычисленных по уравнению регрессии от среднего значения наблюдаемого показателя

$$Об.Д = \sum_{t=1}^{n} \left(\hat{y}_t - \overline{y}\right)^2 .$$

3) остаточная дисперсия – разность между общей дисперсией и объясняемой дисперсией. Она определяет ту часть дисперсии, которая не объясняется регрессией.

$$Ост.Д = \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2 .$$

y_t – фактические значения, $\hat{y}_t$ – значения, вычисленные по уравнению регрессии.

Коэффициентом детерминации называется отношение объясняемой дисперсии к общей дисперсии.

$$d = \frac{Об.Д}{О.Д}$$

Коэффициент детерминации $0 \le d \le 1$.

В процентном соотношении коэффициент детерминации показывает какой процент дисперсии (изменения значения) моделируемого показателя описывается уравнением регрессии. Поэтому эта характеристика является параметром адекватности регрессионных моделей

4. Параметры адекватности в статистическом моделировании. Коэффициенты детерминации и корреляции.

Из математической статистики: $d = r_B^2$.

r_B – выборочный коэффициент корреляции.

Свойства коэффициента корреляции:

1) $|r_B| \le 1$;

2) если r_B=0, между изучаемыми переменными отсутствует линейная корреляционная зависимость.

3) если r_B=1, регрессионная зависимость становится линейной функциональной зависимостью.

Из свойств 2) и 3) следует: выборочный коэффициент корреляции служит мерой тесноты корреляционной зависимости. Чем он ближе к единице – связь теснее, к нулю – слабее.

На практике эти характеристики интерпретируются следующим образом:

$0{,}1 \le |r_B| \le 0{,}3$ – связь слабая;

$0{,}3 \le |r_B| \le 0{,}7$ – связь существенная;

$0{,}7 \le |r_B| \le 0{,}9$ – связь сильная;

$|r_B| \ge 0{,}9$ – связь очень сильная, близкая к линейной.

Используя этот факт для коэффициента корреляции, для коэффициента детерминации также существуют таблицы пороговых значений. Они зависят от числа наблюдений n и доверительной вероятности γ.

Если при построении модели вычисленное значение коэффициентов корреляции и детерминации больше пороговых значений при данном числе наблюдений n, то построенную модель с заданной вероятностью можно использовать для прогнозирования.

Таблица пороговых значений:

Число наблюдений	r_B	d
5	0,58	0,34
10	0,46	0,21
20	0,32	0,12
50	0,22	0,05

В 90% прогноз согласуется с исходными данными

5. Точечный прогноз. Доверительный интервал прогноза.

Пусть по статистическим данным $y_1, y_2, \ldots y_t$ построено уравнение регрессии $\hat{y}_t = f(t)$, коэффициент детерминации которого больше порогового.

Точечный прогноз – это экстраполяция данного временного ряда, вычисленная по уравнению тренда или уравнению регрессии.

Положим

$t = n+1 \qquad \hat{y}_{n+1} = f(n+1)$

$t = n+2 \qquad \hat{y}_{n+2} = f(n+2)$

Вероятность того, что случайная величина примет конкретные значения равна нулю, т.е.

$P = (y = \hat{y}_{n+1}) = 0$.

Следовательно, точечные прогнозы в экономике являются несостоятельными. Поэтому при прогнозировании используют интервальные прогнозы.

Интервал (доверительный интервал прогноза) – это интервал вида $(\hat{y}_t - \varepsilon; \hat{y}_t + \varepsilon)$.

$\hat{y}_t$ – точечный прогноз, вычисленный по построенной модели или тренду

ε – ошибка прогноза. Она может быть более или менее точной. В простейшем случае ошибка вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = t_{\alpha,k} \cdot \sigma_y ,$$

где $t_{\alpha,k}$ – значение статистики Стьюдента, которые табулированы и определяются по уровню значимости $\alpha = 1 - \gamma$ и числу степеней свободы k=n-2, n – объем выборки.

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}}$ – среднеквадратическое отклонение.

Координаты автора

Все замечания и предложения прошу отправлять по адресу: nnv_it@mail.ru