Оглавление

1 Теория меры и интеграл Лебега

1.1 Некоторые сведения из теории множеств

Под *множеством* понимают совокупность объектов (предметов или понятий), которые рассматриваются как единое целое. Мы будем рассматривать в дальнейшем множества чисел, множества точек, множества функций и т.д. Каждое множество определяется некоторым правилом, по которому можно судить принадлежит ли данный элемент a множеству X или нет.

Приведем основные теоретико – множественные понятия, используемые в дальнейшем.

Пусть A и B – некоторые множества. Множества A и B называются *равными,* если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если $a \in A$, то $a \in B$, и обратно: из $b \in B$ следует $b \in A$. Например, множество четных чисел $\{2,4,6,\dots\}$ является подмножеством множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Если все элементы, из которых состоит A, являются и элементами B (причем случай $A = B$ не исключается), то мы называем A *п*одмножеством B и пишем $A \subseteq B$.

Обозначим через $\mathscr{P}(X)$ множество всех подмножеств множества X. *Пустым множеством* (обозначается $\varnothing$) назовем множество, не содержащее ни одного элемента. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$, называются *собственными.* Множество, которое состоит из одной точки, обозначается $\{a\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, т. е. $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$. Пресечение любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_γ определяется равенством

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \mid x \in A_\gamma,\ \text{для всех } \gamma \in \Gamma\}.$$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B, т. е. $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ или } x \in B\}$. Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если $\{A_\gamma\}$,$\gamma \in \Gamma$, набор произвольных множеств, где γ – индекс каждого, который пробегает некоторое конечное или бесконечное множество индексов Γ, то

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \mid \exists\gamma \in \Gamma, x \in A_\gamma\}.$$

Операции объединения и пересечения множеств коммутативны и ассоциативны, кроме того они взаимно дистрибутивны.

Назовем *разностью* $A \setminus B$ множеств A и B совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B, т. е. $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$. При этом, вообще говоря, не предполагается, что $A \supset B$.

Иногда (например, в теории меры) удобно рассматривать *симметрическую разность* двух множеств A и B, которая определяется как сумма разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$ и обозначается символом $\triangle$. Таким образом, по определению, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Упражнение 1. Показать, что $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Обратим внимание на то, что семейство $\mathscr{P}(X)$ относительно операции $\triangle$ образует абелеву группу с единицей $\varnothing$ и каждое множество при этом противоположно самому себе.

Пусть $A \subset X$, *дополнением* множества A называется множество $CA = X \setminus A$. С понятием дополнения связан принцип двойственности, который основан на двух соотношениях:

1. $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}(CA_\gamma) = C(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$;
2. $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(CA_\gamma) = C(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$.

Упражнение 2. Доказать следующие равенства:
1. $A \setminus B = A \cap (A \triangle B)$;
2. $A \cup B = (A \cap B) \triangle (A \triangle B)$;
3. $(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = A \triangle B$;
4. $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B)$;
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Декартовым или *прямым произведением* множеств X и Y называется множество $X \times Y$, состоящее из упорядоченных пар (x,y), где $x \in X$, $y \in Y$. Произведение $X\times X$ называется *декартовым квадратом* множества X и обозначается X^2. Так, плоскость как совокупность точек, можно представить в виде объединения окружностей различного радиуса, начиная с окружности радиуса $r = 0$.

Часто встречается разбиение на попарно непересекающиеся подмножества, т. е. на классы. Разбиение множества на классы строится на основе некоторого признака – отношения.

Отношением между множествами X и Y называется любое подмножество R из их декартова произведения $X \times Y$. Если $X = Y$, то отношение R называется отношением на множестве X.

Для упорядоченной пары $(x,y) \in R$ используют обозначение xRy и говорят, что x находится в отношении R к y.

Отношение R на множестве X называется *отношением эквивалентности* на X, если для всех $x,y,z \in X$ выполнены условия:

(i) — $(x,x) \in R$ для любого $x \in X$;

(ii) — $(x,y) \in R \to (y,x) \in R$;

(iii) — $(x,y) \in R, (y,z) \in R \to (x,z) \in R$.

Отношение эквивалентности обозначается символом $\sim$. Если на множестве X задано отношение эквивалентности, то множество X разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов. Класс, содержащий элемент x, обозначаем $\hat{x}$.

Отношение R на множестве X называется *отношением порядка*, если оно удовлетворяет условиям (i), (iii) и условию *антисимметричности*, т. е. $(x,y) \in R, (y,x) \in R \Rightarrow x = y$. Отношение порядка принято обозначать символом $\prec$. Таким образом, $a \prec b$ означает, что a подчинен b. Множество X, на котором задано отношение порядка для некоторых пар элементов, называется *упорядоченным множеством*. Например, $\mathscr{P}(X)$ упорядочено по включению.

Пусть $(X, \prec)$ – упорядоченное множество. Подмножество $A \subset X$ называется *л*инейно упорядоченным, если для любых двух элементов a и b из A выполнено либо $a \prec b$ либо $b \prec a$.

Подмножество $A \subset X$ называется *ограниченным сверху*, если существует такой элемент $x \in X$, что $a \prec x$ для всех $a \in A$; $x \in X$ называется *верхней гранью* множества A. Аналогично определяется ограниченность снизу и нижняя грань.

Элемент $\alpha \in A$ называется *наибольшим* в A, если $\alpha \succ a$ для любого $a \in A$; *максимальным* в A, если из того, что $\alpha \prec a$ для $a \in A$ вытекает, что $\alpha = a$. Любой наибольший элемент будет и максимальным, обратное, вообще говоря, неверно.

Упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным*, если любые два элемента этого множества находятся в отношении порядка. У линейно упорядоченного множества все элементы сравнимы между собой.

Лемма 1.1.1 Цорна. *Если в упорядоченном множестве* $(X, \prec)$ *всякое линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, то в* X *существует хотя бы один максимальный элемент.*

Пусть X, Y – произвольные непустые множества. Если каждому элементу $x \in X$ поставить по определенному правилу элемент $y \in Y$, то говорят, что задано *отображение* f множества X на Y. Отображение $f : X \to Y$ иначе называют функцией на множестве X со значением во множестве Y.

Пусть элемент $x \in X$, тогда элемент $y = f(x)$ называют *образом* элемента x при отображении f, а элемент x – *прообразом* элемента y. Если $A \subset X$, то образом множества A является множество $f(A) = \{y \in Y | y = f(x),\ x \in A\}$. Если $B \subset Y$, то полным прообразом множества B будет множество $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) = y,\ y \in B\}$.

Отображение $f|_A : A \to Y$ такое, что $f|_A(a) = f(a)$ для всех $a \in A$ называется *сужением* отображения f на подмножестве A, а f – *продолжением* отображения $f|_A$ на X. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, или *инъекцией*, если для любых элементов x_1, x_2 множества X таких, что $x_1 \neq x_2$, выполнено $f(x_1) \neq f(x_2)$; *сюръективным,* или *сюръекцией*, если каждый элемент множества Y имеет хотя бы один прообраз; *биективным,* или *биекцией*, если оно инъективно и сюръективно одновременно.

Упражнение 3. Доказать следующие соотношения:
1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Два множества X и Y называются *равномощными* или имеющими одинаковую мощность, если существует биективное (взаимно однозначное) отображение множества X на множество Y.

Множество X называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел. Если множество X счетно, то его можно представить (вообще говоря, различными способами) в виде последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Будем говорить, что множество X *не более чем счетно*, если оно либо конечно, либо счетно. Всякое подмножество не более чем счетного множества не более чем счетно. Например, если область определения функции f не более чем счетна, то такой же будет и область ее значений.

Счетными множествами являются множество всех целых чисел, множество всех четных положительных чисел, множество степеней числа 2, множество всех рациональных чисел.

Множество X, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством. Несчетное множество равномощно некоторой своей собственной части. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Несчетными множествами являются множество всех точек отрезка $[a,b]$ или интервала (a,b), множество всех точек на прямой, множество точек плоскости, пространства, поверхности сферы, множество всех прямых на плоскости, множество всех непрерывных функций одной или нескольких переменных.

Задачи

1. Показать, что числа, обладающие двумя различными десятичными разложениями, образуют счетное множество.

2. Выяснить соотношение между образом пересечения двух множеств и пересечением их образов.

3. Доказать, что прообраз дополнения равен дополнению прообраза. Верно ли аналогичное утверждение для образа дополнения.

4. Доказать, что операция симметрической разности удовлетворяет следующему условию

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C).$$

5. Доказать, что

1.$(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cap (A_2 \triangle B_2)$.
2.$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.
3.$(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \setminus (A_2 \triangle B_2)$.

1.2 Кольцо, полукольцо, алгебра множеств

Для введения понятия меры нам понадобится класс множеств, удовлетворяющий по отношению к введенным операциям некоторым определенным условиям замкнутости.

Пусть задано непустое множество X, $\mathscr{P}(X)$ – семейство его подмножеств.

Определение 1.2.1. Непустое семейство $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ называют *кольцом* подмножеств, если оно обладает тем свойством, что из выполнения условий $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$ вытекает, что $A \triangle B \in \mathcal{K}, A \cap B \in \mathcal{K}$.

Утверждение 1.2.1. *Пусть $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ – кольцо. Тогда для любых множеств $A,B \in \mathcal{K}$ выполнено $A \cup B \in \mathcal{K}$ и $A \setminus B \in \mathcal{K}$.*

Доказательство. Поскольку для любых множеств A и B справедливы равенства $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \bigcap (A \triangle B)$, то это означает, что $A \cup B \in \mathcal{K}$ и $A \setminus B \in \mathcal{K}$. $\otimes$

Таким образом, кольцо множеств замкнуто по отношению к взятию суммы и пересечения, вычитанию и образованию симметрической разности. Очевидно, что кольцо замкнуто и по отношению к образованию любых конечных сумм и пересечений, т. е. если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}$, то также $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$. Однако кольцо не замкнуто относительно перехода к дополнению множества.

Любое кольцо содержит $\varnothing$, так как всегда $A \setminus A = \varnothing$. Система, состоящая только из пустого множества, представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Упражнение 4. Показать, что непустая система $G \subset \mathscr{P}(X)$, замкнутая относительно операций пересечения и объединения, либо пересечения и разности, вообще говоря, не является кольцом.

Определение 1.2.2. Кольцо $\mathcal{K}$ называется *алгеброй*, если $X \in \mathcal{K}$. X в этом случае называется *единицей кольца*.

Пример 1. 1). Для любого множества X система $\mathscr{P}(X)$ всех его подмножеств представляет собой алгебру множеств.

2). На числовой прямой $\mathbb{R}$ система его конечных и счетных подмножеств представляет собой кольцо, но не алгебру.

3). Система всех ограниченных подмножеств на $\mathbb{R}$ является кольцом, но не алгеброй.

Заметим, что система всех открытых подмножеств на $\mathbb{R}$ кольцо не образует.

Утверждение 1.2.2. *Пусть непустая система $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ обладает свойствами:*

1) для любого $A \in \mathcal{K}$ его дополнение $X \setminus A = CA \in \mathcal{K}$;

2) для любых $A,B \in \mathcal{K}$ выполнено $A \cup B \in \mathcal{K}$.

Тогда $\mathcal{K}$ является алгеброй.

Доказательство. $X \in \mathcal{K}$, так как $X = A \sqcup (X \setminus A)$. Покажем, что $\mathcal{K}$ является кольцом. Действительно, $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \in \mathcal{K}$, $A \setminus B = A \cap X \setminus B \in \mathcal{K}$,$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{K}$. $\otimes$

Кольцо множеств называется σ - *кольцом*, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \ldots$ содержит и их счетное объединение, т. е. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K}$.

σ – *алгеброй* называют σ - кольцо с единицей.

В теории меры часто приходится расширять произвольную систему множеств до кольца (алгебры) или σ – кольца (σ – алгебры).

Теорема 1.2.1. *Для любой непустой системы множеств $S \subset \mathscr{P}(X)$ существует одно и только одно минимальное кольцо, т. е. такое кольцо множеств $\mathcal{K}(S)$, что содержащее $S \subset \mathcal{K}(S)$ и $\mathcal{K}(S) \subset \mathcal{K}$ для любого кольца $\mathcal{K}$, содержащего S.*

Доказательство. Кольцо $\mathcal{K}$, содержащее S существует, например, $\mathcal{K} = \mathscr{P}(X)$. Легко видеть, что кольцо $\mathcal{K}$ определяется системой S однозначно. Для доказательства его существования рассмотрим множество $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{A \in S} A$ и кольцо $\mathscr{P}(\mathcal{M})$ всех подмножеств множества $\mathcal{M}$. Пусть $\Sigma = \{\mathcal{K} | \mathcal{K} \subset \mathscr{P}(\mathcal{M}), S \subset \mathcal{K}\}$ – множество всех колец, содержащих S. Тогда искомым кольцом будет

$$K(S) = \bigcap_{\mathcal{K} \in \sum} \mathcal{K}. \qquad (1.2.1)$$

$\mathcal{K}(S)$ является наименьшим кольцом, потому что каково бы ни было кольцо $\mathcal{K}$,, содержащее S, пересечение $K \cap \mathcal{K}(S)$ будет кольцом из Σ, так как пересечение любого множества колец есть кольцо (докажите!). То, что $\mathcal{K}(S)$ является кольцом, видно из (**??**). Если A,$B \in \mathcal{K}(S)$, то A,$B \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – кольцо из Σ, поэтому $A \cap B, A \triangle B \in \mathcal{K}(S)$. Кольцо $\mathcal{K}(S)$ включает в себя те и только те множества, которые либо входят в S, либо получаются из семейства S посредством конечного числа операций пересечения и симметрической разности. $\otimes$

Как видно из доказательства теоремы построение $\mathcal{K}(S)$ по произвольной системе S довольно сложно. Поэтому выделим специальный класс множеств, по которому минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$ строится просто.

Определение 1.2.3. Непустая система $S \subset \mathscr{P}(X)$ подмножеств множества X называется *полукольцом*, если она содержит пустое множество, замкнута по отношению к операции пересечения и обладает тем свойством, что если $A, B \in S$, то найдется конечная система $C_1, \ldots, C_n$ попарно непересекающихся множеств из S, что

$$A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k.$$

Заметим, что если S – полукольцо множеств, то для $A, B \in S$ элементы $A \setminus B$ и $A \cup B$ в общем случае могут не принадлежать S.

Пример 2. 1). Всякое кольцо множеств $\mathcal{K}$ является полукольцом.

2). Совокупность S всех полуинтервалов вида $[a,b)$ на числовой прямой $\mathbb{R}$ образует полукольцо, но не кольцо.

3). Совокупность S "полуоткрытых прямоугольников"$[a,b) \times [c,d)$ на плоскости образует полукольцо, которое кольцом не является.

Упражнение 5. Доказать, что прямое произведение полуколец является полукольцом, а прямое произведение колец может не быть кольцом.

Пусть $A \in S$, а множество $A_1 \subset A$, тогда множество A можно представить в виде

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i, \quad A_i \in S, \tag{1.2.2}$$

где A_1 – заданное множество. Действительно, из определения полукольца вытекает, что существует система $C_1, C_2, \ldots, C_n$ из S, что $A \setminus A_1 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i$, тогда $A = A_1 \bigsqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i)$

Формула (1.2.2) задает конечное разложение элемента полукольца.

Лемма 1.2.1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, A \in S$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$, причем все множества $A_i \subset A$. Тогда набор множеств $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ можно дополнить множествами $A_{n+1}, \ldots, A_m \in S$ до конечного разложения*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i (m \geqslant n)$$

множества A.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по n. При $n = 1$ $A_1 \subset A$, поэтому имеем (1.2.2), которое вытекает из определения кольца. Предположим, что утверждение леммы справедливо для $n = k$, т. е.

$$A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup B_1 \ldots \sqcup B_l,$$

где $B_s (s = 1,2,\ldots,l) \in S$ и дополняют систему $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ до разложения множества A.

Докажем, что утверждение леммы справедливо для $n = k + 1$. Рассмотрим множества $B_{s1} = B_s \cap A_{k+1} \in S (s = 1,2,\ldots,l)$. Тогда каждое B_s допускает конечное разложение

$$B_s = \bigsqcup_{j=1}^{r_s} B_{sj}$$

Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{k+1} \bigsqcup \bigsqcup_{s=1}^{l} \bigsqcup_{j=1}^{r_s} B_{sj}$$

искомое разложение для $n = k + 1$. $\otimes$

Теорема 1.2.2. *Пусть $S \subset \mathscr{P}(X)$ – полукольцо, тогда минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, порожденное S, совпадает с системой множеств, допускающих конечные разложения, т. е.*

$$\mathcal{K}(S) = \Big\{ A : A = \bigsqcup_{i=1}^{n(A)} A_i, \quad A_i \in S \Big\}.$$

Доказательство. Покажем, что система множеств $\mathcal{K}(S)$, допускающих конечное разложение своих множеств на множества $A_i \in S$, образует кольцо.

Пусть A,B – произвольные множества из этой системы, тогда $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n(A)} A_i$, $B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m(B)} B_j$, $A_i, B_j \in S$. Рассмотрим множества $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S$, тогда в силу леммы 1.2.1имеют место разложения

$$A_i = \bigsqcup_j C_{ij} \bigsqcup \bigsqcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}, \quad B_j = \bigsqcup_i C_{ij} \bigsqcup \bigsqcup_{l=1}^{s_j} E_{jl} \qquad (1.2.3)$$

где Из равенств (1.2.3) вытекает, что множества $A \cap B$ и $A \triangle B$ допускают разложения

$$A \cap B = \bigsqcup_{i,j} C_{ij}, \quad A \triangle B = \bigsqcup_{i,k} D_{ik} \bigsqcup \bigsqcup_{j,l} E_{jl}$$

и, следовательно, содержатся в системе. $\otimes$

Пример 3. 1). Пусть $X = [a,b)$ – фиксированный полуинтервал, полукольцо $S = \{[\alpha,\beta) \subseteq [a,b)\}$. $\mathcal{K}(S)$ состоит из объединения конечного числа полуинтервалов. $\mathcal{K}(S)$ является алгеброй.

2). Рассмотрим на числовой прямой $\mathbb{R}$ систему S, состоящую из открытых множеств, которые полукольцо не образуют, но могут выступать в качестве порождающей системы. В σ - алгебру, порожденную системой открытых множеств, входят все открытые множества, все замкнутые множества, множества типа G_δ – счетные пересечения открытых множеств, множества типа $G_{\delta\sigma}$ — счетные объединения множеств типа G_δ и т.д. Другими словами, это множества, получающиеся из интервалов применением счетного числа операций объединения, пересечения и разности. Полученная σ – алгебра называется *борелевской*, обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, а её элементы *борелевскими множествами.*

Задачи

1. Обозначим через $X = \{a,b,c\}$ множество, состоящее из трех элементов.

а) Привести пример полукольца $S \subset \mathscr{P}(X)$, которое не является кольцом.

б) При заданном полукольце $S \subset \mathscr{P}(X)$ построить минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$.

2. Доказать, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения и разности, является кольцом.

3. Привести пример, показывающий, что объединение двух колец не является, вообще говоря, кольцом.

4. Пусть $f : X \to Y$ – некоторое отображение, $\mathcal{K}_1 \subset \mathscr{P}(X)$ – кольцо подмножеств. Показать, что система $\{f(A) | \, A \in \mathcal{K}_1\}$ подмножеств в Y не является, вообще говоря, кольцом.

Пусть $\mathcal{K}_2 \subset \mathscr{P}(Y)$ – кольцо подмножеств Y. Что можно сказать о системе $\{f^{-1}(A) | \, A \in \mathcal{K}_2\}$?

1.3 Понятие меры множества. Простейшие свойства меры

Понятие меры множества является естественным обобщением таких понятий как длина отрезка, площадь прямоугольника, объем параллелепипеда и т. д. При построении меры мы будем пользоваться не формулой, выражающей соответственно длину, площадь и объем, а общими их свойствами, такими как неотрицательность и аддитивность. Сначала определим меру для некоторого класса так называемых элементарных множеств. А затем расширим это понятие на более обширный класс множеств – измеримых.

Определение 1.3.1. Пусть на некотором множестве X задано полукольцо $S \subset \mathscr{P}(X)$. Будем говорить, что на S задана *мера*, если каждому элементу $A \in S$ поставлено в соответствие вещественное число $m(A) \in \mathbb{R}$ и при этом выполнены следующие условия:

1)$m(A) \geqslant 0$ (неотрицательность);

2) если $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A, A_i \in S$, то $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$ (аддитивность).

Таким образом, мера первоначально определяется только на полукольце множеств.

Пример 4. 1). На числовой прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим полукольцо $S = \{[a,b) | -\infty < a < b < +\infty\}$ и определим меру $m\big([a,b)\big) = b - a$. Длина полуинтервала удовлетворяет аксиомам меры.

2). На $\mathbb{R}^2$ рассмотрим полукольцо S, состоящее из "полуоткрытых"прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Тогда площадь прямоугольника удовлетворяет аксиомам меры.

3). Рассмотрим полукольцо 1). Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая ограниченная функция. Определим меру полуинтервала $[a,b)$ так: $m_F\big([a,b)\big) = F(b) - F(a)$. Для выполнения аксиомы 1 необходимо и достаточно, чтобы $F(b) - F(a) \geqslant 0$, если $b > a$, т. е чтобы функция F была монотонно неубывающей. Покажем, что аксиома 2 при этом выполняется. Действительно, пусть $[a,b) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} [a_{i-1},a_i)$, где $a_0 = a$, $a_n = b$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m_F\big([a_{i-1},a_i)\big) = \sum_{i=1}^{m} \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) = F(a_n) - F(a_0) =$$

$$= F(b) - F(a) = m_F\big([a,b)\big).$$

4). Пусть на произвольном множестве X задано полукольцо, состоящее из конечных его подмножеств. Можно определить меру любого множества $A \in S$ как количество элементов в нем. Очевидно, что аксиомы меры будут выполняться.

При определении меры множество A представляется в виде конечного числа попарно непересекающихся множеств. Часто приходится на практике представлять A в качестве счетного числа попарно непересекающихся множеств и определять меру A.

Определение 1.3.2. Мера m, заданная на полукольце $S \in \mathscr{P}(X)$ называется *счетно – аддитивной* (σ - аддитивной), если для любых $A_1, A_2, \ldots \in S$ таких, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ выполнено

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{1.3.1}$$

Чуть позже мы остановимся на примерах σ - аддитивных мер. А сейчас рассмотрим простейшие свойства меры. Свойства мы будем рассматривать в случае задания меры на кольце, поскольку каждое кольцо является полукольцом и в отличие от полукольца замкнуто относительно теоретико-множественных операций.

Свойство 1.3.1 (Монотонность меры). Пусть $A,B \in \mathcal{K}$ и при этом $A \subseteq B$. Тогда

$$m(A) \leqslant m(B). \tag{1.3.2}$$

Доказательство. Поскольку справедливо представление множества $B = A \sqcup (B \setminus A)$, причем $B \setminus A \in \mathcal{K}$, то в силу аддитивности меры

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A), \tag{1.3.3}$$

причем $m(B \setminus A) \geqslant 0$. Значит, $m(B) \geqslant m(A)$. $\otimes$

Свойство 1.3.2 (Субтрактивность меры). Если $A, B \in \mathcal{K}$ и $A \subseteq B$, то

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A). \tag{1.3.4}$$

Доказательство. Вытекает из равенства (1.3.2) свойства 1. $\otimes$

Свойство 1.3.3. Пусть $A,B \in \mathcal{K}$, тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \tag{1.3.5}$$

Доказательство. Так как $A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \sqcup B$ и $A \cap B \subset A$, то в силу определения меры и свойства 2 будем иметь $m(A \cup B) = m\big(A \setminus (A \cap B)\big) + m(B) = m(A) - m(A \cap B) + m(B)$. $\otimes$

Свойство 1.3.4. Если $A,B \in \mathcal{K}$, то

$$m(A \triangle B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B). \tag{1.3.6}$$

Доказательство. Заметим, что справедливы следующие представления: $A \triangle B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \sqcup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$. Поэтому, $m(A \triangle B) = m\big(A \setminus (A \cap B)\big) + m\big(B \setminus (A \cap B)\big) = m(A) - m(A \cap B) + m(B) - m(A \cap B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B)$. $\otimes$

Свойство 1.3.5. Для любых множеств $A,B \in \mathcal{K}$ выполняется

$$|m(A) - m(B)| \leqslant m(A \triangle B). \tag{1.3.7}$$

Доказательство. Поскольку для множеств A и B справедливы включения $A \subset (A \triangle B) \cup B$, $B \subset (A \triangle B) \cup B$, то по свойства монотонности меры имеем $m(A) \leqslant m(B) + m(A \triangle B)$ и $m(B) \leqslant m(A) + m(A \triangle B)$. Откуда $|m(A) - m(B)| \leqslant m(A \triangle B)$. $\otimes$

Свойство 1.3.6. Для любых множеств $A,B,C \in \mathcal{K}$ имеет место следующее неравенство

$$m(A \triangle B) \leqslant m(A \triangle C) + m(C \triangle B). \tag{1.3.8}$$

Упражнение 6. Доказать свойство 6.

Свойство 1.3.7 (счетная полуаддитивность меры). Пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{K}$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$ и пусть мера m, заданная на $\mathcal{K}$, σ - аддитивна, тогда

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{1.3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим множество A в виде счетного объединения попарно непересекающихся множеств B_k, определяя их следующими формулами: $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots$ $B_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$. Тогда $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ и

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

поскольку $B_k \subset A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. $\otimes$

Теорема 1.3.1. *Пусть на числовой прямой* $\mathbb{R}$ *задано полукольцо, порожденное системой полуинтервалов* $[a,b)$. *Тогда длина полуинтервала является* σ *- аддитивной мерой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A = [a,b)$, $A_i = [a_i,b_i)$ и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Покажем, что

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

т. е. $b - a = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. Так как $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то в силу монотонности меры имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant b - a$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$ сходится и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leqslant b - a$.

Докажем обратное неравенство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого полуинтервала $A_i = [a_i,b_i)$ построим содержащий его интервал $B_i = \big(a_i - \varepsilon/2^{i+1}, b_i\big)$, т. е. $A_i \subset B_i$. Вместо полуинтервала $A = [a,b)$ возьмем содержащийся в нем отрезок $B = [a, b - \varepsilon/2]$. Имеем $B \subset A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. А это означает, что отрезок B покрыт системой интервалов. Воспользуемся леммой Гейне – Бореля и выделим из этого открытого покрытия конечное открытое подпокрытие, состоящее из n интервалов, т. е. $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$, тогда длина отрезка B не превзойдет суммы длин интервалов B_i, т. е.

$$b - \frac{\varepsilon}{2} - a \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда следует, что

$$b - a \leqslant \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε справедливо неравенство

$$b - a \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i).$$

Таким образом, теорема доказана. $\otimes$

Пример 5. Рассмотрим пример не σ - аддитивной меры.

На числовой прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим полукольцо $S = \{[a,b) \subset \mathbb{R}\}$ и меру зададим с помощью функции

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2, \\ 1, & x \geqslant 1/2 \end{cases}$$

формулой $m_F\big([a,b)\big) = F(b) - F(a)$. Покажем, что мера m не σ - аддитивна. Это означает, что для некоторого полуинтервала существует такое его разбиение, что (1.3.1) не выполняется. Пусть $A = [0,1/2)$ и $A_i = [a_i,a_{i+1})$, $a_1 = 0$, $a_i \to 1/2$ при $i \to \infty$, причем $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогда

$$m_F(A) = F(1/2) - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

Однако $\sum\limits_{i=1}^{n} m_F(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \big(F(a_{i+1} - F(a_i)\big) = 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_F(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m_F(A_i) = 0.$$

А это означает, что (1.3.1) не выполняется.

Пример 6. Приведем примеры σ -аддитивных мер.

1). Пусть x_0 – фиксированная точка множества X. Для любого множества $A \subset X$ положим

$$m(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in A, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Это σ -аддитивная мера на $S = \mathscr{P}(X)$.

2). Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ – счетное множество произвольной природы и числа $p_n \geqslant 0$ таковы, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Пусть $S = \mathscr{P}(X)$ и для каждого $A \subset X$ положим

$$m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n.$$

Легко проверить, что $m(A)$ является σ -аддитивной мерой и $m(X) = 1$. Данный пример имеет отношение к теории вероятностей.

Задачи

1.Пусть m – мера, заданная на алгебре $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ и пусть $m(A)$ и $m(B)$ не меньше, чем $0{,}8m(X)$. Доказать, что $m(A \cap B) \geqslant 0{,}6m(X)$.

2. Пусть $X = Q$ – множество рациональных чисел на $\mathbb{R}$. На σ - алгебре $\mathscr{P}(X)$ определить меру так, чтобы мера каждого рационального числа была положительна, а мера $m(Q) = 1$.

3. Пусть m_1, m_2 – меры на алгебре $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$. Доказать,что $m = \alpha m_1 + \beta m_2$, где α,β – произвольные неотрицательные числа, является мерой на $\mathcal{K}$.

1.4 Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо

Пусть задано множество X и $S \subset \mathscr{P}(X)$ – полукольцо его подмножеств, на котором задана мера m. Продолжим меру на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, порожденное полукольцом S.

Определение 1.4.1. Мера μ, заданная на кольце $\mathcal{K}$, называется *продолжением меры* m, если $S \subset \mathcal{K}$ и $\mu(A) = m(A)$ для любого множества $A \in S$.

Теорема 1.4.1. *Пусть m – мера на полукольце $S \subset \mathscr{P}(X)$ и $\mathcal{K}(S)$ – минимальное кольцо, порожденное S. Тогда на $\mathcal{K}(S)$ существует единственная мера μ, являющаяся продолжением меры m.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{K}(S)$, тогда по теореме 1.2.2 оно представимо в виде $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n(A)} A_i$, $A_i \in S$. Поэтому если на $\mathcal{K}(S)$ определена мера μ, являющаяся продолжением меры m, то,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n(A)} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n(A)} m(A_i). \tag{1.4.1}$$

Из (1.4.1) вытекает однозначность меры μ.

Для доказательства существования продолжения докажем, что формула

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n(A)} m(A_i). \tag{1.4.2}$$

действительно задает продолжение.

Предварительно покажем корректность определения продолжения, т. е. независимость значение $\mu(A)$ от способа разбиения множества A. Пусть $A_i, B_j \in S$ такие, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n(A)} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m(A)} B_j$. Покажем, что $\sum\limits_{i=1}^{n(A)} m(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{m(A)} m(B_j)$. Положим $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S$, $i = \overline{1, n(A)}$, $j = \overline{1, m(A)}$. Тогда $A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} C_{ij}$, $B_j = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_{ij}$, так как для каждого $j = \overline{1,k}$ множества C_{ij} попарно не пересекаются, поскольку попарно не пересекаются множества B_j; аналогично для всех $i = \overline{1,n}$. Поэтому,

$$m(A_i) = \sum_{j=1}^{m} m(C_{ij}), \quad m(B_j) = \sum_{i=1}^{n} m(C_{ij}).$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j).$$

Данные ряды состоят из неотрицательных членов и конечны, поэтому возможна замена порядка суммирования.

Из построения меры μ вытекает, что функция μ неотрицательна. Покажем, что ее аддитивность.

Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, где $A, A_k \in \mathcal{K}(S)$, тогда $A_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n(A_k)} D_{ij}$, $D_{kj} \in S$ и $\mu(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{n(A_k)} m(D_{ij})$. Откуда имеем $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m(k)} D_{kj}$ и

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m(k)} m(D_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

что и требовалось доказать. $\otimes$

Следствие 1.4.1. Если мера m на полукольце $S \subset \mathscr{P}(X)$ является σ – аддитивной, то ее продолжение на $\mathcal{K}(S)$ также обладает свойством σ - аддитивности.

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A, A_k \in \mathcal{K}(S)$. Тогда по теореме 1.2.2 $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$, $A_k = \bigsqcup\limits_{l=1}^{s(k)} B_{kl} \in S$. Обозначим через $C_{jkl} = B_j \cap B_{kl} \in S$. Имеем

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j) = \sum_{j}\sum_{k,l} m(_{jkl}) = \sum_{k}\sum_{j,l} m(_{jkl}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $B_j = \bigsqcup\limits_{k,l} C_{jkl}$, $A_k = \bigsqcup\limits_{j,l} C_{jkl}$ и возможностью менять порядок суммирования в рядах с неотрицательными членами. $\otimes$

Замечание 1.4.1. Предположение о том, что исходная мера задана полукольце, а не на произвольной системе подмножеств существенно для однозначности ее продолжения.

Упражнение 7. Привести пример системы множеств на множестве $X = [0,a) \times [0,a)$, $a > 0$, и меры, для которой продолжение не однозначно.

Элементы из $\mathcal{K}(S)$ будем называть *элементарными множествами.*

По теореме 1.4.1 можно выделить класс множеств известных как множества меры нуль.

Определение 1.4.2. Пусть на $\mathcal{K}(S) \subset \mathscr{P}(X)$ задана σ - аддитивная мера m. Множество $A \subset X$ (необязательно принадлежащее кольцу $\mathcal{K}(S)$) называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный или счетный набор множеств $A_i \in \mathcal{K}(S)$, покрывающий A ($A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$), что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \varepsilon.$$

Пример 7. 1). На множестве $\mathbb{R}$ рассмотрим полукольцо, порожденное системой полуинтервалов, на котором задана естественная мера – длина.

Любое одноточечное множество $A = \{a\}$ является множеством меры нуль. Действительно, $\{a\} \subset [a,a+1/n)$ и

$$m\big([a,a+1/n)\big) = \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

2). Множество рациональных чисел на числовой прямой является множеством меры нуль, поскольку длина как мера — это σ - аддитивная функция.

Задачи

1.5 Непрерывность счетно – аддитивной меры на кольце

Будем рассматривать меру, заданную на кольце $\mathcal{K}$, в частности, это может быть минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$.

Определение 1.5.1. Меру m, заданную на кольце $\mathcal{K}$, называют *непрерывной сверху*, если для любой возрастающей последовательности множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \ldots (A_n \uparrow A)$ такой, что $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in \mathcal{K}$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A). \tag{1.5.1}$$

Определение 1.5.2. Меру m, заданную на кольце $\mathcal{K}$, называют *непрерывной снизу*, если для любой убывающей последовательности множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \ldots (A_n \downarrow A)$ такой, что $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in \mathcal{K}$, справедливо равенство (1.5.1)

Очевидно, что если мера непрерывна сверху, то она непрерывна снизу и наоборот.

Определение 1.5.3. Будем называть меру *непрерывной*, если она непрерывна снизу или сверху.

Теорема 1.5.1. *Мера m, заданная на кольце $\mathcal{K}$, является σ - аддитивной тогда и только тогда, когда она непрерывна.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть мера m на $\mathcal{K}$ σ - аддитивна и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \uparrow A$, $A, A_n \in \mathcal{K}$. Представим множество A в виде объединения попарно непересекающихся множеств следующим образом:

$$A = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \ldots \sqcup (A_n \setminus A_{n-1}) \sqcup \ldots,$$

где $A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{K}$ для всех $n = 2, 3, \ldots$, причем

$$A_n = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \ldots \sqcup (A_n \setminus A_{n-1}).$$

Тогда

$$m(A) = m(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} m(A_n \setminus A_{n-1}),$$

и ряд справа сходится. Значит последовательность его частных сумм имеет предел. Но $S_n = m(A_n) = m(A_1) + \sum\limits_{i=2}^{n} m(A_i \setminus A_{i-1})$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n),$$

т. е. мера непрерывна.

Достаточность. Пусть мера m непрерывна сверху на кольце $\mathcal{K}$. Рассмотрим разложение $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathcal{K}$, в котором положим

$$A_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i,$$

тогда $A_n \uparrow A$, $A_n \in \mathcal{K}$. В силу непрерывности m имеем

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$

что и означает σ - аддитивность меры m. $\otimes$

Замечание 1.5.1. Если мера задана на полукольце и является там непрерывной, то она может оказаться и не σ - аддитивной.

Упражнение 8. Рассмотрите множество $X = [0,1)$ и полукольцо $S = \{[a,b) \cap Q \subset X\}$, на котором задана мера $m\big([a,b) \cap Q\big) = b - a$. Докажите, что данная мера является непрерывной, но не является σ - аддитивной.

1.6 Внешняя мера

В параграфе 1.4 мы показали, что любую меру, заданную на полукольце S, можно единственным образом продолжить на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$. Если мера m на S не является σ - аддитивной, то дальнейшее ее продолжение на более широкий класс множеств в общем случае невозможен. Однако, если мера m σ - аддитивна, то ее можно продолжить на класс множеств, который шире, чем $\mathcal{K}(S)$, с помощью продолжения. Конструкция продолжения была предложена Лебегом в 1902 г. Такое продолжение называется *лебеговым продолжением.* Мы остановимся на том случае, когда $\mathcal{K}(S)$ является алгеброй, т. е. $X \in \mathcal{K}(S)$, и вместо $\mathcal{K}(S)$ будем писать просто $\mathcal{K}$.

Пусть на σ - алгебре $\mathcal{K}$ задана σ - аддитивная мера m. Определим на системе всех подмножеств множества X функцию $\mu^\star$, которая каждому множеству $A \subset X$ ставит в соответствие число $\mu^\star(A)$ по некоторому правилу. Опишем его. Поскольку $X \in \mathcal{K}$, то для каждого множества A существует его покрытие элементами алгебры $\mathcal{K}$, например, $A_1 = X, A_i = \varnothing$, $i = 2, \ldots$. Вычислим меру покрытия и посчитаем точную нижнюю грань по всевозможным покрытиям. Точная нижняя грань существует, потому что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \geqslant 0$, где $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{K}$.

Определение 1.6.1. *Внешней мерой* множества $A \subset X$ называется число $\mu^\star(A) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\mu^\star(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i), \quad A_i \in \mathcal{K}. \tag{1.6.1}$$

Утверждение 1.6.1. *Внешняя мера как функция, заданная на* X, *является продолжением меры* m, *заданной на* $\mathcal{K}(S)$.

Доказательство. Мы должны показать, что для $A \in \mathcal{K}$ справедливо

$$m(A) = \mu^\star(A).$$

Действительно, если $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A, A_i \in \mathcal{K}$, то

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

В неравенстве перейдем к точной нижней грани по всевозможным покрытиям множества A, получим

$$m(A) \leqslant \mu^\star(A).$$

С другой стороны, из определения внешней меры следует, что

$$\mu^\star(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

для любых $A_i \in \mathcal{K}$ таких, что $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Пусть $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \ldots = \varnothing$. Тогда

$$\mu^\star(A) \leqslant m(A).$$

$\otimes$

Внешняя мера в общем мерой не является.

Упражнение 9. Показать, что $\mu^\star$ не является аддитивной функцией.

Отметим некоторые свойства внешней меры.

Свойство 1.6.1. Если $A \in K$, то

$$\mu^\star(A) = m(A). \tag{1.6.2}$$

Доказательство. Данное свойство вытекает из утверждения 1. $\otimes$

Свойство 1.6.2 (Неотрицательность). Для любого множества $A \subset X$

$$\mu^\star(A) \geqslant 0, \quad \mu^\star(\varnothing) = 0. \tag{1.6.3}$$

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{K}$, тогда $m(A) \geqslant 0$, следовательно, $\mu^\star(A) \geqslant 0$. $\varnothing \in \mathcal{K}$ и поэтому $m(\varnothing) = 0 = \mu^\star(A)$. $\otimes$

Свойство 1.6.3 (Монотонность). Пусть $A{,}B \subset X$ и $A \subseteq B$, тогда

$$\mu^\star(A) \leqslant \mu^\star(B). \tag{1.6.4}$$

Доказательство. По определению внешней меры

$$\mu^\star(B) = \inf_{\substack{B \subset \bigcup\limits_i B_i, \\ B_i \in \mathcal{K}}} \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i).$$

Но $A \subseteq B$, поэтому $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, поэтому

$$\mu^\star(A) \leqslant \inf_{\substack{B \subset \bigcup\limits_i B_i, \\ B_i \in \mathcal{K}}} \sum_{i} m(B_i).$$

А значит, $\mu^\star(A) \leqslant \mu^\star(B)$. $\otimes$

Свойство 1.6.4 (Счетная полуаддитивность). Для любой последовательности множеств $B_1{,}B_2{,}\ldots \subseteq X$ имеет место неравенство

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(B_i). \tag{1.6.5}$$

Доказательство. Если ряд справа расходится, то требуемое неравенство (1.6.5) имеет место. Пусть ряд справа сходится. Из определения внешней меры следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое покрытие каждого множества B_i множествами $A_{ik} \in \mathcal{K}$, что $B_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ik}$, и

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(A_{kj}) \leqslant \mu^\star(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{1.6.6}$$

Просуммируем неравенство (1.6.6) по i от 1 до ∞, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(A_{ik}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(B_i) + \varepsilon. \tag{1.6.7}$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{ik},$$

поэтому, переходя в (1.6.7) к точной нижней грани, получим

$$\mu^\star(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(B_i) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получим (1.6.5) $\otimes$

Свойство 1.6.5. Для любых $A,B \subset X$ выполнено

$$|\mu^\star(A) - \mu^\star(B)| \leqslant \mu^\star(A \triangle B). \tag{1.6.8}$$

Свойство 1.6.6. Пусть $A, B, C \subset X$, тогда

$$\mu^\star(A \triangle B) \leqslant \mu^\star(A \triangle C) + \mu^\star(B \triangle C). \tag{1.6.9}$$

Упражнение 10. Доказать справедливость свойств 5), 6).

Для множества $A \subset X$ можно ввести и понятие его внутренней меры.

Определение 1.6.2. *Внутренней мерой* множества $A \subset X$ называется число

$$\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A). \tag{1.6.10}$$

Свойство 1.6.7. Пусть $A \subset X$, тогда

$$\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A). \tag{1.6.11}$$

Доказательство. $X = A \sqcup (X \setminus A)$, тогда

$$m(X) = \mu^*(X) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Откуда следует, что $m(X) - \mu^*(X \setminus A) \leqslant \mu^*(A)$. Но $m(X) - \mu^*(X \setminus A) = \mu_*(A)$, поэтому $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$. $\otimes$

Упражнение 11. Показать, что для внутренней меры $\mu_\star$ справедливы свойства 1 – 4 внешней меры.

Задачи

1. Выяснить, являются ли внешними мерами следующие функции множеств:

а) $\mu^\star(A) = \chi_A(x_0)$, где x_0 – фиксированная точка, χ_A – характеристическая функция множества;

б) $X = N$ и $\nu_n(A)$ равно числу элементов множества $A \cap \{1,2,\ldots,n\}$ и

$$\mu^\star(A) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\nu_n(A).$$

2)

1.7 Измеримые по Лебегу множества и продолжение меры

Покажем, как с помощью понятия внешней меры можно продолжить меру, заданную на алгебре множеств $\mathcal{K}$, в частности, на $\mathcal{K}(S)$, на некоторую σ - алгебру, содержащую $\mathcal{K}$.

Пусть X – произвольное множество, $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ – алгебра его подмножеств, на которой задана σ - аддитивная конечная мера и для каждого множества $A \subset X$ определена внешняя мера μ^*.

Определение 1.7.1. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Лебегу* относительно меры m, если для него выполнено равенство

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X). \tag{1.7.1}$$

У п р а ж н е н и е 12. Доказать, что множество измеримо тогда и только тогда, когда

$$\mu^*(A) = \mu_*(A). \tag{1.7.2}$$

Если множество измеримо, то назовем его мерой внешнюю меру, т. е.

$$\mu(A) = \mu^*(A). \tag{1.7.3}$$

Совокупность измеримых по Лебегу множеств обозначим через Σ.

Заметим, что понятие измеримого множества зависит от исходной меры m, заданной на алгебре $\mathcal{K}$.

П р и м е р 8. Покажем, что множество меры нуль измеримо по Лебегу и $\mu(A) = 0$. Действительно, из определения множества меры нуль вытекает, что $\varepsilon > 0$ найдется система множеств таких, что $A \subset \bigcup\limits_i A_i$, $A_i \in \mathcal{K}$, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$. Тогда $\mu^*(A) = \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_)) = 0$. Откуда $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$, т. е. $\mu_*(A) = 0$.

Следовательно, $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ и поэтому A измеримо.

Перейдем к критерию измеримости множества.

Теорема 1.7.1. *(Критерий измеримости) Пусть задано множество X и алгебра $\mathcal{K}$ с σ - аддитивной конечной мерой m. Тогда для любого множества $A \subset X$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) A измеримо по Лебегу относительно меры m;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество $B \in \mathcal{K}$ такое, что

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{1.7.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $A \subset X$и а $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$. Тогда из определению внешней меры следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое покрытие множества A множествами $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathcal{K}$, и

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.7.5}$$

Последнее неравенство, в частности, означает, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_i)$ сходится. Но тогда найдется номер N_ε такой, что

$$\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} m(B_i) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Обозначим через $B = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} B_i \in \mathcal{K}$ и покажем, что B является искомым множеством. Поскольку $B_i \in \mathcal{K}(S)$, то $B \in \mathcal{K}(S)$. Оценим $\mu^*(A \triangle B)$. Учитывая, что

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

необходимо оценить меры $\mu^*(A \setminus B)$ и $\mu^*(B \setminus A)$. Так как $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, то $A \setminus B \subset \bigcup\limits_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} B_i$ и $\mu^*(A \setminus B) \leqslant \sum\limits_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} m(B_ik) < \frac{\varepsilon}{3}$. Значит,

$$\mu^*(A \setminus B) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.7.6}$$

Рассмотрим множество $B \setminus A$. Тогда $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$. В силу измеримости множества $X \setminus A$ и определения точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая система множеств $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, $C_i \in \mathcal{K}$, что $X \setminus A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ и

$$\mu^*(X \setminus A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) \leqslant \mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.7.7}$$

Тогда

$$B \setminus A \subset B \bigcap (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i)$$

и

$$\mu^*(B \setminus A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i). \tag{1.7.8}$$

Из представления $C_i = (C_i \setminus B) \sqcup (B \cap C_i)$ вытекает, что $m(C_i) = m(C_i \setminus B) + m(B \cap C_i)$. Поэтому (1.7.8) примет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) - \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i \setminus B). \tag{1.7.9}$$

Затем используем представление $X \sqcup (X \setminus A)$, из которого следует, что $X \subset \big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\big) \sqcup \big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (C_i \setminus B)\big)$. Тогда

$$m(X) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) + \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i \setminus B)$$

или

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(C_i \setminus B) \geqslant m(X) - \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \tag{1.7.10}$$

Подставим оценку (1.7.10) в равенство (1.7.9), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) - m(X) + \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) \tag{1.7.11}$$

С учетом соотношений (1.7.5), (1.7.7) и (1.7.8), неравенство (1.7.12) принимает вид

$$\mu^*(B \setminus A) \leqslant \mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3} - m(X) + \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Из последнего неравенства и (1.7.6) следует, что

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Рассмотрим импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A \subset X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathcal{K}$ такое, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Покажем, что

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X).$$

Так как множество $B \in \mathcal{K}$, то $\mu^*(B) + \mu^*(X \setminus B) = m(X)$.По свойству 5 внешней меры имеем неравенства:

$$\mu^*(B) - \varepsilon \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon,$$

$$\mu^*(X \setminus B) - \varepsilon \leqslant \mu^*(X \setminus A) \leqslant \mu^*(X \setminus B) + \varepsilon.$$

Складывая их почленно, получаем

$$m(X) - 2\varepsilon \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) \leqslant m(X) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем,

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X).$$

$\otimes$

Следствие 1.7.1. Множество $A \subset X$ измеримо, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество B такое, что

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{1.7.12}$$

Доказательство. Так как множество B измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $B_1 \in \mathcal{K}(S)$ такое, что $\mu^*(B \triangle B_1) < \varepsilon$. Тогда

$$\mu^*(A \triangle B_1) \leqslant \mu^*(A \triangle B) + \mu^*(B \triangle B_1) < 2\varepsilon,$$

т. е. A измеримо. $\otimes$

Теорема 1.7.2. *Совокупность Σ измеримых по Лебегу множеств образует σ - алгебру множеств, содержащую исходную алгебру $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Предварительно докажем, что Σ образует алгебру. Прежде всего заметим, что в определении измеримости множества A и $X \setminus A$ входят симметрично, поэтому из измеримости A следует измеримость $X \setminus A$. Далее, пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$. Тогда существуют элементарные множества $B_1, B_2 \in \mathcal{K}(S)$ такие, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon/2,\ \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon/2.$$

Так как $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, то

$$mu^*\big((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)\big) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon,$$

Следовательно, множество $A = A_1 \cup A_2$ измеримо.

$$A_1 \cap A_2 = X \setminus \big((X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)\big)$$

и поэтому $A_1 \cap A_2 \in \Sigma$.

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2), A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

Это означает, что $A_1 \setminus A_2,\ A_1 \triangle A_2 \in \Sigma$.

По индукции данные формулы можно распространить на любое конечное число множеств.

Покажем теперь, что Σ является σ - алгеброй. Для этого достаточно доказать, что если система множеств $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$. Можно считать, что $A_j \cap A_i = \varnothing$, если $j \neq i$, т. е. $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Учитывая, что $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$, $A_i \in \Sigma$, то по свойству монотонности внешней меры $\mu^*(A) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \mu^*(A_j)$. Таким образом, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$ является последовательность частных сумм для ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$, состоящего из неотрицательных членов, ограниченной сверху. Поэтому ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ сходящийся, и, значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что

$$\sum_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \varepsilon.$$

Тогда множество $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} A_i \in \Sigma$ и

$$\mu^*(A \triangle C) = \mu^*(\bigsqcup_{j=N_\varepsilon+1}^{\infty} A_j) \leqslant \leqslant \sum_{j=N_\varepsilon+1}^{\infty} \mu^*(A_j) < \varepsilon.$$

Измеримость A вытекает из следствия к теореме 1.7.1. $\otimes$

Следствие 1.7.2. Счетное пересечение измеримых множеств измеримо.

Доказательство. Так как дополнение измеримых множеств измеримо, то из равенства

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)\big)$$

вытекает измеримость A. $\otimes$

Теорема 1.7.3. *Сужение μ внешней меры μ^* на класс измеримых множеств задает счетно-аддитивную меру μ.*

Доказательство. Длят начала покажем, что μ – аддитивная функция. Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$ и $B_1, B_2 \in \mathcal{K}(S)$ такие, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{1.7.13}$$

Положим $A = A_1 \sqcup A_2 \in \Sigma$, $B = B_1 \cup B_2 \in \mathcal{K}(S)$. Тогда

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

и

$$\mu^*(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1 \cup B_2) < 2\varepsilon \tag{1.7.14}$$

По свойству 5 внешней меры

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B) < \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) 2\varepsilon. \tag{1.7.15}$$

Оценим меру элементарного множества B

$$\mu(B) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \tag{1.7.16}$$

В (1.7.16) меру каждого из множеств оценим, используя неравенство (1.7.15). Тогда как только $A_1, A_2 \in \Sigma$

$$\mu(B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 2\varepsilon - 2\varepsilon. \tag{1.7.17}$$

Из (1.7.15) с учетом (1.7.16) имеем

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon \tag{1.7.18}$$

Поскольку (1.7.18) справедливо для любого ε, то

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{1.7.19}$$

С другой стороны, по свойству монотонности внешней меры имеем

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{1.7.20}$$

Из (1.7.19) и (1.7.20) вытекает аддитивность внешней меры, поэтому

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2). \tag{1.7.21}$$

(1.7.19) можно распространить на любое конечное число слагаемых.

Пусть теперь $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ – система попарно непересекающихся множеств из Σ и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A, A_i \in \Sigma$. Покажем, что

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Так как $A \supset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то

$$\mu(A) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \tag{1.7.22}$$

Переходя в (1.7.22) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\mu(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.7.23}$$

С другой стороны, по свойству счетной полуаддитивности

$$\mu(A) = \mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.7.24}$$

Из (1.7.23) и (1.7.24) вытекает требуемое равенство. $\otimes$

Таким образом, лебеговым продолжением меры m, заданной на алгебре $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}(S)$) называется функция $\mu(A)$, определенная на классе измеримых множеств Σ и совпадающая на $\mathcal{K}(\mathcal{K}(S))$ с $\mu(A)$, а на Σ – с $\mu^*(A)$.

В заключении отметим еще одно свойство построенной меры Лебега.

Определение 1.7.2. Мера m, заданная на алгебре $\mathcal{K}$, называется *полной*, если из $m(A) = 0$ следует, что любое подмножество $B \subset A$ принадлежит $\mathcal{K}$ и $m(B) = 0$.

Так как для множества меры нуль любое подмножество является также множеством меры нуль, то получаем, что лебегово продолжение является полной мерой.

Мы рассмотрели продолжение меры, заданной на алгебре $\mathcal{K}$. Если мера определена лишь на кольце, то внешняя мера μ^* определяется только на системе тех множеств A, для которых существуют покрытия элементарными множествами из $\mathcal{K}$.

Расширим понятие измеримости, допуская для меры и бесконечные значения, таким образом, чтобы, как и в предыдущем случае, класс измеримых множеств представлял собой σ - алгебру.

Ограничимся случаем, когда множество X является множеством с σ - конечной мерой.

Определение 1.7.3. Мера μ заданная на кольце $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$, называется *$\sigma$ - конечной*, если существует последовательность множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \ldots$ такая, что $\mu(A_n) < +\infty$ для всех n и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Пример 9. Пусть $X = \mathbb{N}$. На множестве $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ рассмотрим меру μ, полагая $\mu(A) = n$, если множество A содержит n элементов и $\mu(A) = \infty$, если A – бесконечное множество. Очевидно, что μ является σ - конечной мерой; в качестве A_n можно взять, например, $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$.

Пример 10. Длина, как мера на кольце, порожденном полуинтервалами в $\mathbb{R}$, является σ - конечной, так как

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n)$$

и $\mu([-n,n)) = 2n < \infty$.

Упражнение 13. Показать, что если мера μ, заданная на кольце $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ σ - конечна, то X можно представить в виде объединения счетной системы попарно не пересекающихся множеств конечной меры, т. е. $X = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, в частности, $\mathbb{R} = \coprod\limits_{-\infty}^{\infty} [n,n+1)$.

Определение 1.7.4. Множество $A \subset X$ называется *измеримым* относительно σ - конечной меры, если для любого n измеримо множество $A \cap A_n$.

Следовательно, множество $A \subset X$ измеримо, если оно состоит из измеримых в A_n множеств $A \cap A_n$.

Для измеримого множества A можно ввести определение меры множества по формуле

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap A_n).$$

Можно показать, что значение $\mu(A)$ не зависит от способа разбиения множества X.

Задачи

1. Пусть $X = [0,1) \times [0,1)$, S – полукольцо прямоугольников $S = \{[a,b) \times [0,1)\} \subset X$. Продолжить меру $m(A) = b - a$. Описать явный вид лебегова продолжения меры m.

2. Построить пример неизмеримого по Лебегу множества на плоскости, проекции которого на координатные оси измеримы.

3. Рассмотрим в единичном квадрате на плоскости систему (не являющуюся полукольцом) вертикальных и горизонтальных прямоугольников, у которых длина или ширина равна единице, и припишем каждому прямоугольнику меру, равную его площади. Указать хотя бы два различных продолжения меры на алгебру, порожденную этой системой прямоугольников.

4. Пусть $X = \mathbb{N}$ и каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вещественное число p_n так, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_n = 1$. Положим для любого множества $A \subset X$ $m(A) = \sum\limits_{n\in N_A} p_n$, где $N_A = \{n \in N | \, n \in A\}$. Доказать, что m является σ - аддитивной мерой на алгебре $\mathscr{P}(X)$.

5. Привести пример неограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$, мера которого равна нулю.

6. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – измеримое множество. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}$, что $G \supset A$ и $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$.

7. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество G и замкнутое множество F такие, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

8. Пусть $A \subset R$ – измеримое по Лебегу множество, $\mu(A) = p$. Доказать, что для любого $q \in [0,p]$ найдется измеримое множество $A_q \subset A$ такое, что $\mu(A_q) = q$.

9. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – множество положительной конечной меры Лебега. Доказать, что для любого $\alpha \in [0,1]$ найдется полуинтервал $[a,b)$, что $\mu\big(A \cap [a,b)\big) \geqslant \alpha\mu(A)$.

1.8 Мера Лебега на числовой прямой

Одним из важнейших примеров меры является мера Лебега на числовой прямой.

Предварительно рассмотрим ограниченные множества на $\mathbb{R}$. Пусть $X = [a,b)$ – некоторый фиксированный полуинтервал прямой, $S \subset \mathcal{P}(X)$ – полукольцо, состоящее из полуинтервалов $[\alpha,\beta) \subset X$ и $m\big([\alpha,\beta)\big)$. Пусть $\mathcal{K}(S)$ алгебра подмножеств, порожденная полукольцом S, каждый элемент которой имеет вид $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i)$, причем полуинтервалы в правой части попарно не пересекаются. Через m обозначим меру на алгебре $\mathcal{K}(S)$, полученную продолжением меры из полукольца, т. е. $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)$.

Используя вышеизложенную конструкцию продолжения, рассмотрим внешнюю меру любого множества $A \subset [a,b)$.

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i),$$

где точная нижняя грань берется по всем таким наборам полуинтервалов $[\alpha_i,\beta_i)$, что $A \subset \bigcup\limits_i [\alpha_i,\beta_i)$. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Лебегу*, если $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = b - a$. Таким образом, мерой Лебега μ на отрезке называется лебегово продолжение длины.

Упражнение 14. Показать, что мера Лебега ограниченного множества не зависит от выбора полуинтервала $[a,b)$. Точнее, пусть $A \subset [a,b)$ и $A \subset [a',b')$; m и m' – меры Лебега, построенные соответственно для полуинтервалов $[a,b)$ и $[a',b')$. Если A измеримо по мере m', то $m(A) = m'(A)$. Воспользоваться определением измеримости множества.

Рассмотрим измеримые по Лебегу линейные ограниченные множества.

Утверждение 1.8.1. *Множество, состоящее из одной точки, измеримо, и мера его равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = \{a\}$, тогда множество A является множеством меры нуль и поэтому оно измеримо, $\mu(\{a\}) = 0$. $\otimes$

Утверждение 1.8.2. *Всякое не более чем счетное ограниченное множество точек прямой измеримо и мера его равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, тогда $A = \bigcup\limits_{i}^{\infty}\{a_i\}$. Измеримость множества A следует из того, что совокупность Σ измеримых множеств является σ - алгеброй. Благодаря счетной аддитивности меры $m(A) = \sum\limits_{i} m(\{a_i\}) = 0$. $\otimes$

Утверждение 1.8.3. *Любой промежуток измерим и его мера равна его длине.*

Доказательство. $\mu([\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$, так как $[\alpha,\beta) \in S$. Далее

$$[\alpha, \beta] = [\alpha,\beta) \sqcup \{\beta\},$$

поэтому

$$\mu\big([\alpha,\beta]\big) = \mu\big([\alpha,\beta)\big) + \mu\big(\{\beta\}\big) = m\big([\alpha, \beta)\big) + 0 = \beta - \alpha.$$

$(\alpha, \beta) = [\alpha,\beta) \setminus \{\alpha\}$, тогда

$$\mu\big((\alpha, \beta)\big) = \mu\big([\alpha, \beta)\big) - \mu\big(\{\alpha\}\big) = m\big([\alpha,\beta)\big) - 0 = \beta - \alpha.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\otimes$

Утверждение 1.8.4. *Любое ограниченное открытое или замкнутое множество измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Как известно, всякое ограниченное открытое множество G является объединением не более чем счетного числа интервалов $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$. Поскольку $(\alpha_i, \beta_i) \in \Sigma$ для всех i, то $G \subset \Sigma$. Пусть F – ограниченное замкнутое множество. Возьмем любой интервал $(\alpha, \beta) \supset F$; тогда $G = (\alpha, \beta) \setminus F$ – открытое множество, поэтому $F = (\alpha, \beta) \setminus G$ измеримо как разность двух измеримых множеств. $\otimes$

Утверждение 1.8.5. *Любое ограниченное борелевское множество на прямой измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Ранее мы определили борелевскую σ - алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, порожденная совокупностью всех открытых множеств из X.

Пусть $A \in \mathcal{B}([a,b))$. Покажем, что множество A измеримо по Лебегу. Как установлено выше все открытые подмножества полуинтервала $[a,b)$ входят в σ - алгебру Σ измеримых множеств. Но тогда σ - алгебра $\mathcal{B}([a,b))$, порожденная совокупностью всех этих открытых множеств, также входит в Σ, т. е. всякое ограниченное борелевское множество измеримо по Лебегу. $\otimes$

Упражнение 15. Доказать, что всякое измеримое по Лебегу множество на прямой есть объединение борелевского множества и множества меры нуль.

Пример 11. Приведем пример несчетного множества меры нуль. Рассмотрим построение классического канторова множества на отрезке $[0,1)$. Разделим отрезок $[0,1]$ на три части и удалим его среднюю треть – множество $G_1 = (1/3; 2/3)$. Оставшееся множество $F_1 = [0,1] \setminus G_1$ также разделим на три равные части и удалим множество $G_2 = (1/9; 2/9) \sqcup (7/9; 8/9)$. Получим множество $F_2 = F_1 \setminus G_2$ и т. д. На n-ом шаге каждый из 2^{n-1} оставшихся отрезков опять делим на три равные части и удаляем средний интервал с длиной 3^{-n}. Множество $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ называется *канторовым совершенным множеством.*

Множество $K \neq \varnothing$, так как точки $0,1/3, 2/3, \ldots \in K$, K измеримо как счетное пересечение измеримых множеств, K замкнуто как дополнение к открытому множеству. Обозначим через $G = [0,1] \setminus K$, тогда $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ и

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot 2^{n-1} = 1.$$

Значит, $\mu(K) = 1 - \mu(G) = 0$.

Покажем, что K – несчетное множество. Каждое число, принадлежащее отрезку $[0,1]$, можно представить в виде троичной дроби. Числа, принадлежащие K, характеризуются тем, что они могут быть записаны в виде троичной дроби так, чтобы в последовательности $a_1, a_2, \ldots$ число 1 не встречалось, т. е.

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots.$$

Таким образом, каждой точке $x \in K$ ставится в соответствие последовательность (a_i) из цифр 0 и 2. Но множество таких последовательностей находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей из нулей и единиц. А всякую такую последовательность можно рассматривать как десятичную запись некоторого действительного числа из отрезка [0,1].Значит, мощность K такова как мощность отрезка [0,1].

Упражнение 16. Доказать, что $\frac{1}{4} \in K$.

Обратим внимание на одну особенность канторова множества. Возьмем, например, отрезок [0,1/3]. Увеличив его в три раза, получим множество F_1, тождественное множеству K, образованному из всего отрезка [0,1]. Если повторить эту процедуру произвольное число раз (т. е. у множества F_n, возникшего на n-шаге, выделяется левая треть и последняя растягивается в три раза,образуя в результате множество K_{n-1}), то на каждом шаге мы будем приходить к исходному множеству. Другими словами, части множества подобны целому множеству. Это свойство самоподобия называется *масштабной инвариантностью.*

Построение, аналогичное приведенному выше, можно проделать, осуществляя деление не на три , а на большее число частей n. Очевидно, что длина (мера) выброшенной части равна 1, а оставшееся множество не содержит ни одного целого интервала. Свойство самоподобия сохраняется. Про такие множества говорят, что они обладают канторовой структурой.

Отметим еще ряд свойств канторова множества – K нигде не плотное множество, каждая точка которого является предельной (такие множества называются *совершенными*).

Точки канторова множества разделяют на точки: I рода – концы выбрасываемых интервалов, их счетное множество; II рода – остальные, их мощность континуума.

Если имеет положительную лебегову меру, то оно содержит неизмеримое подмножество. Покажем как оно может быть построено.

Пример 12. Рассмотрим *пример неизмеримого множества.* На полуинтервале [0,1) зададим отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y$ – рациональное число, которое разбивает полуинтервал [0,1) на непересекающиеся классы эквивалентных между собой точек. Пусть A является подмножеством [0,1), содержащим по одному элементу из каждого класса эквивалентности. Для рациональных чисел $r_k \in [-1,1)$ определим множество A_r, получающееся из A сдвигом на r_k, т. е.

$$A + r_k = \{x + r_k | r_k \in [-1,1), x \in A\}.$$

Тогда

$$[0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(A + r_k) \subset [-1,2),$$

причем множества A_r являются попарно непересекающимися. Соответственно,

$$m\big([0,1)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(A_r) \leqslant m\big([-1,2)\big),$$

или

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_r) \leqslant 3.$$

Если множества A_r являются измеримыми, то возможны два варианта: либо они имеют меру нуль, тогда получаем противоречие слева – $1 \leqslant 0$; либо они имеют положительную меру, тогда $+\infty \leqslant 3$ (противоречиво неравенство справа). Следовательно, мы пришли к противоречию, предположив измеримость A_r.

Рассмотрим теорию измеримости по Лебегу для неограниченных множеств на прямой.

Определение 1.8.1. Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется *измеримым по Лебегу*, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ измеримо по Лебегу ограниченное множество $A \cap [-n,n)$. *Мерой Лебега* измеримого множества A называется предел (возможно, бесконечный)

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap [-n,n)).$$

Данный предел существует, поскольку числовая последовательность $\mu_n(A) = \mu(A \cap [-n,n))$ является неубывающей, причем если предел равен бесконечности , то и мера множества A равна бесконечности.

Совокупность всех измеримых подмножеств на $\mathbb{R}$ обозначим через Σ.

Замечание 1.8.1. Если множество $\mathbb{R}$ представлено в виде $\mathbb{R} = \coprod_{n=-\infty}^{\infty}[n,n+1)$, то множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ измеримо по Лебегу ограниченное множество $A_n = A \cap [n,n+1)$. Тогда $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

При этом, если ряд расходится, то $\mu(A) = \infty$.

Пример 13. Рассмотрим неограниченное множество на $\mathbb{R}$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n, n+\frac{1}{3^n})$. Данное множество измеримо, так как измеримы множества $A_n = \left[n, n+\frac{1}{3^n}\right)$ на $X_n = [n, n+1)$. Его мера $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1/2$.

Теорема 1.8.1. *Совокупность Σ всех измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$ является σ - алгеброй; μ является σ - конечной мерой на σ - алгебре Σ измеримых множеств.*

Задачи

1. Доказать, что множество, имеющее положительную меру, не счетно.

2. Пусть $A \subset [a,b)$ – измеримое по Лебегу множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку. Доказать, что $m(A) > 0$.

3. Доказать, что множество $A \subset [a,b)$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда

$$A = B \cup C,\ B \in \mathcal{B}([a,b)),\ m(C) = 0.$$

4. Найти меру Лебега подмножества отрезка $[0,1]$, состоящего из чисел, у которых в десятичной записи цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3.

1.9 Мера Лебега – Стилтьеса на числовой прямой

В параграфе 1.3 мы рассматривали меру, заданную на полукольце из полуинтервалов, порожденную монотонно неубывающей функцией F. Остановимся на некоторых свойствах неубывающих функций.

Рассмотрим случай, когда $X = [a,b)$, $S = \{[\alpha,\beta) \subset X\}$, $m_F\big([\alpha,\beta)\big) = F(\beta) - F(\alpha)$, а $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ – монотонно неубывающая ограниченная функция. Данную меру легко продолжить на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, не накладывая дополнительных ограничений на функцию F. А именно, если $A \in \mathcal{K}(S)$, то $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n}[\alpha_i, \beta_i)$ и $m_F(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_F\big([\alpha_i, \beta_i)\big)$. Для дальнейшего продолжения меры нам понадобится такое свойство меры как σ - аддитивность. Выясним, какое условие необходимо наложить на функцию F, чтобы порожденная ею мера m_F была σ - аддитивной.

Предварительно вкратце остановимся на свойствах монотонно неубывающих (невозрастающих) функций.

Пусть $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ – монотонно неубывающая функция. Тогда для нее в любой точке $x_0 \in (a,b)$ существуют односторонние пределы

$$F(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0,\\ x < x_0}} F(x) = \sup\big\{F(x) : a \leqslant x < x_0\big\},$$

$$F(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0,\\ x > x_0}} F(x) = \inf\big\{F(x) : x_0 < x \leqslant b\big\},$$

а в точках a и b – соответственно правосторонний предел $F(a + 0)$ и левосторонний $F(b - 0)$. Очевидно, что

$$F(x_0 - 0) \leqslant F(x_0) \leqslant F(x_0 + 0).$$

Равенство $F(x_0 - 0) = F(x_0 + 0)$ означает, что в точке x_0 функция F непрерывна.

Точка, в которой существуют левосторонний и правосторонний пределы, но они не равны между собой называется *точкой разрыва первого рода*, а разность $F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$ называется *скачком функции F в точке x_0* и обозначается $\triangle_F(x_0)$, причем $\triangle_F(a) =$ $=$F(a+0) $- F(a)$, $\triangle_F(b) = F(b) - F(b - 0)$.

Если F – монотонно неубывающая функция, то ее скачок в любой точке неотрицателен.

Если $F(x_0) = F(x_0 - 0)$, то F называется *непрерывной слева*, а если $F(x_0) = F(x_0 + 0)$ – *непрерывной справа*.

Рассмотрим некоторые свойства монотонно неубывающих функций.

Утверждение 1.9.1. *Пусть F – неубывающая функция на отрезке $[a,b]$ и $c_1, \ldots, c_n$ – любые точки этого отрезка, тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_F(c_i) \leqslant F(b) - F(a).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что точки занумерованы в порядке возрастания и $c_1 = a$, $c_n = b$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_F(c_k) = F(a+0) - F(a) + F(c_2+0) - F(c_2-0) + \ldots +$$

$$+\Delta_F(c_{n-1}+0) - \Delta_F(c_{n-1}-0) + F(b) - F(b-0).$$

Сгруппируем слагаемые в правой части, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_F(c_k) = -F(a) + (F(a+0) - F(c_2-0)) + \cdots +$$

$$+(F(c_{n-1}+0) - F(b-0)) + F(b).$$

Поскольку F неубывающая функция, то все разности в скобках неположительны, откуда и следует требуемое неравенство. $\otimes$

Утверждение 1.9.2. *Множество точек разрыва монотонно неубывающей на отрезке $[a,b]$ функции не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть M – множество точек разрыва, т. е. $M = \{x \in [a,b] : \Delta_F(x) > 0\}$. Тогда

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k,\ M_k = \left\{x \in [a,b] : \Delta_F(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Докажем, что каждое из множеств M_k конечно. Пусть $c_1, \ldots, c_n \in M_k$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_F(c_k) \geqslant \frac{1}{k}n$ и согласно утверждению 1 получаем $F(b) - F(A) \geqslant \frac{n}{k}$, откуда $n \leqslant k(F(b) - F(a))$ и поэтому n конечно. $\otimes$

Вкратце остановимся на дифференциальных свойствах монотонных функций. Более подробно данный материал изложен в книге [k-ф].

Введем понятие производных чисел Дини. Для этого рассмотрим предел отношения

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.9.1}$$

при $x \to x_0$. Данный предел может не существовать, но всегда существуют конечны или бесконечные верхние и нижние пределы:

$$\Lambda_{\text{пр}} = \overline{\lim}_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.9.2}$$

$\Lambda_{\text{пр}}$, определяемое соотношением (1.9.2) называется *правым верхним производным числом.* Аналогично,

$$\lambda_{\text{пр}} = \underline{\lim}_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1.9.3}$$

$$\Lambda_{\text{лев}} = \overline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1.9.4}$$

$$\lambda_{\text{лев}} = \underline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.9.5}$$

Здесь $\lambda_{\text{пр}}$ – нижнее правое производное число, $\Lambda_{\text{лев}}$ – верхнее левое, а $\lambda_{\text{лев}}$ – нижнее левое производные числа. Ясно, что всегда

$$\lambda_{\text{пр}} \leqslant \Lambda_{\text{пр}}, \;\; \lambda_{\text{лев}} \leqslant \Lambda_{\text{лев}}.$$

Пример 14. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\lambda_{\text{пр}}|_{x=0} = -1, \Lambda_{\text{пр}}|_{x=0} = 1, \lambda_{\text{лев}}|_{x=0} = 0, \Lambda_{\text{лев}}|_{x=0} = 0.$$

Если все четыре производных числа совпадают, то в точке x существует обычная производная. Если $\Lambda_{\text{пр}} = \lambda_{\text{пр}}$, то существует правая производная функции f в точке x и она обозначается f'_+. Если же $\Lambda_{\text{лев}} = \lambda_{\text{лев}}$, то, соответственно, левая производная f'_-.

Утверждение 1.9.3. *Монотонно неубывающая на отрезке* $[a,b]$ *функция имеет почти всюду на этом отрезке правую производную.*

Доказательство данного утверждения приведено в книге [k-ф.

Если функция монотонно не возрастает, то она почти всюду имеет левую производную.

В последующем отметим интегральные свойства монотонно неубывающих функций.

Упражнение 17. Найти производные числа Дини функции

$$f(x) = \begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x} + bx\cos^2\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

если $a < b$ на отрезке $[-1,1]$.

Среди монотонных функций простейшими являются функции скачков. Строятся такие функции следующим образом. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – конечное либо счетное число точек отрезка $[a,b]$. Каждой точке x_n поставим в соответствие положительное число h_n таким образом, что $\sum_n h_n < \infty$. Построим функцию

$$F(x) = \sum_{x_n < x} h_n, \tag{1.9.6}$$

которая является монотонно неубывающей ограниченной функцией. Функция F непрерывна слева. Покажем это. Рассмотрим

$$F(x-0) = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x-\varepsilon) \lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n. \tag{1.9.7}$$

Если $x_n < x$, то для любого $\varepsilon > 0$ $x_n < x - \varepsilon$. Поэтому, переходя в (1.9.8) к пределу, получим

$$F(x-0) = \sum_{x_n < x} h_n = F(x).$$

Точками разрыва функции $F(x)$ являются точки x_n, причем скачок F в точке x_{n_0} равен h_{n_0}. Действительно, пусть $x = x_{n_0}$, тогда

$$F(x_{n_0}+0) = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x_{n_0}+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{x_n < x_{n_0}+\varepsilon} = \sum_{x_n \leqslant x_{n_0}} h_n = F(x_{n_0}-0)+h_{n_0}$$

или

$$F(x_{n_0}+0)-F(x_{n_0}-0)=h_{n_0}.$$

Функцией скачков является ступенчатая функция, т. е. кусочно - постоянная функция.

Утверждение 1.9.4. *Всякую монотонно неубывающую непрерывную слева функцию можно представить в виде суммы монотонно неубывающей непрерывной функции и функции скачков (непрерывной слева) единственным образом.*

Упражнение 18. Докажите утверждение 4.

Теорема 1.9.1. *Пусть на $\mathbb{R}$ задано полукольцо, порожденное системой полуинтервалов $[\alpha,\beta)$ и мера m_F, порожденная монотонно неубывающей ограниченной функцией F. Для того, чтобы мера m_F была σ - аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x)$ была непрерывной слева.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть мера m_F – σ - аддитивна. Тогда по теореме 1.5.1 она является непрерывной сверху. Рассмотрим возрастающую последовательность измеримых множеств $A_n=[\alpha,\beta_n)$. $\beta_n\to\beta$, $\beta_n<\beta$. Тогда $A_n\uparrow A$, где $A=[\alpha,\beta)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ и $m_F(A)=\lim_{n\to\infty}m_F(A_n)$ или

$$F(\beta)-F(\alpha)=\lim_{n\to\infty}F(\beta_n)-F(\alpha),$$

т. е.

$$F(\beta)=\lim_{n\to\infty}F(\beta_n).$$

Это означает, что функция FО непрерывна слева.

Достаточность. Пусть функция $F(x)$ непрерывна слева и пусть $A=[\alpha,\beta)=\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, $A_i=[\alpha_i,\beta_i)$. Покажем, что m_F – σ - аддитивная мера, т. е.

$$m_F(A)=\sum_{i=1}^{\infty}m_F(A_i),\tag{1.9.8}$$

Поскольку $A \supset \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то в силу монотонности меры m_F

$$m_F(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m_F(A_k).$$

Это означает, что в (1.9.8) ряд справа сходится. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_F(A_k) \leqslant m_F(A).$$

Докажем неравенство в обратную сторону. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и по полуинтервалу $A = [\alpha,\beta)$ построим содержащийся в нем отрезок $B = [\alpha,\beta']$, где β' выбрано из условия непрерывности слева функции F, т. е.

$$|F(\beta) - F(\beta')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее по каждому полуинтервалу $A_i = [\alpha_i,\beta_i)$ построим содержащий его интервал $B_i = (\alpha_i',\beta_i)$, где

$$|F(\alpha_i) - F(\alpha_i')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Тогда

$$B = [\alpha,\beta'] \subset A = [\alpha,\beta) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i',\beta_i),$$

т. е. отрезок $[\alpha,\beta']$ покрыт системой открытых интервалов B_i. Согласно лемме Бореля из любого открытого покрытия отрезка можно выделить конечное подпокрытие, т. е.существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$B = [\alpha,\beta'] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Тогда $\Delta_F(B) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_F(B_i)$. С другой стороны,

$$m_F(A) = F(\beta) - F(\alpha) \leqslant F(\beta') - F(\alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \Delta_F(B) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Delta_F B_i + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(F(\beta_i) - F(\alpha_i')\big) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\big(F(\beta_i) - F(\alpha_i)\big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big)\big((\beta_i) - F(\alpha_i)\big) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} m_F(A_i) + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_F(A_i) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_F(A_k) \geqslant F(\beta) - F(\alpha) = m_F(A).$$

$\otimes$

Сейчас меру Лебега – Стилтьеса можно продолжать с минимального кольца с единицей $\mathcal{K}(S)$ на σ - алгебру измеримых относительно меры m_F множеств, используя конструкцию продолжения по Лебегу.

Пусть $\mu_F^\star$ – внешняя мера, построенная по мере m_F. Продолжение меры μ_F на класс Σ измеримых относительно m_F множеств задает на σ - алгебре Σ σ - аддитивную меру, построенную по монотонно неубывающей ограниченной непрерывной слева функции F. Очевидно, что мера μ_F – конечна.

Перечислим класс измеримых относительно меры Лебега–Стилтьеса подмножеств на $X = [a,b)$.

Свойство 1.9.1. Всякое одноточечное множество $\{x\} \subset [a,b)$ измеримо и $\mu_F(\{x\}) = \Delta_F(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Измеримость одноточечного множества $\{x\}$ вытекает из того, что

$$\{x\} = \bigcap_{n=k}^{\infty}[x,x + \frac{1}{n}), \tag{1.9.9}$$

где k выбрано таким, что $x + \frac{1}{k} < b$. Поскольку полуинтервалы в правой части (1.9.9) образуют убывающую последовательность, то, учитывая непрерывность снизу σ - аддитивной меры, получим

$$\mu_F\{x\} = \lim_{n\to\infty} m_F\big[x,x+\frac{1}{n}\big[= \lim_{n\to\infty} F\big(x+\frac{1}{n}\big)-F(x) = F(x+0)-F(x) = \Delta_F(x).$$

$\otimes$

Свойство 1.9.2. Любой промежуток, лежащий на $[a,b)$, измерим.

Доказательство. Это вытекает из следующих представлений:
$[\alpha,\beta] = [\alpha,\beta)\bigcup\{\beta\}, (\alpha,\beta] = [\alpha,\beta] \setminus \{\alpha\}, (\alpha,\beta) = (\alpha,\beta] \setminus \{\beta\}.$ $\otimes$

Свойство 1.9.3. Любое борелевское подмножество полуинтервала $[a,b)$ измеримо.

Доказательство. Действительно, система борелевских множеств $\mathcal{B}([a,b))$, как минимальная σ – алгебра, порожденная системой всех интервалов, входит в σ - алгебру всех измеримых множеств. $\otimes$

Замечание 1.9.1. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}(S)$ – алгебра, порожденная системой всех полуинтервалов $[\alpha,\beta)$, $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. На $\mathbb{R}$ задана неубывающая, ограниченная и непрерывная слева функция F. Для такой функции существуют пределы

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x),\ F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Проводя для этого случая все предыдущие рассуждения, мы получим конечную меру Лебега – Стилтьеса на всей числовой прямой.

Замечание 1.9.2. Пусть $X = [a,b)$, но функция $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ непрерывная слева, но $\lim\limits_{x\to b-0} F(x) = +\infty$. В этом случае по F строится мера Лебега – Стилтьеса, которая уже не будет конечной. Для построения такой меры заметим, что на $[a,b-\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$ функция F будет ограниченной и по ней можно построить конечную меру. Множество $A \subseteq [a,b)$ называется *измеримым*, если для всех $\varepsilon > 0$ множество $A \cap [a,b-\varepsilon)$ измеримо на $[a,b-\varepsilon)$.В этом случае

$$\mu_F(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_F(A \cap [a,b-\varepsilon)).$$

Построенная мера σ - конечна, так как мера множеств $A \cap [a,b-\varepsilon)$ конечна.

Замечание 1.9.3. Аналогично строится мера Лебега – Стилтьеса на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ по неубывающей непрерывной слева функции F, которая может принимать и бесконечные значения. Это построение проводится как и при построении меры Лебега на прямой с помощью расширяющейся системы полуинтервалов. Полученная мера σ - конечна.

Задачи

1. Пусть $[x]$ – целая часть числа, т. е. наибольшее целое число не превосходящее x. Положим $F(x) = -[-x],x \in \mathbb{R}$. Доказать, что F – непрерывна слева. Определить меру $\mu_F(A)$ следующих множеств:

а) $A = [-n,n),n \in mathbbN$;

б) $A = (-n,n) \setminus Q,n \in mathbbN$;

в) $A = \{x \in \mathbb{R}| \ln x < 2\}$.. 1

2. Пусть на числовой прямой задана мера $\mu(A)$, которая определена следующим образом. Для измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ его мера равна числу целых точек во множестве $A \bigcap \mathbb{Z}$, если оно конечно, и $+\infty$ – в противном случае. Доказать, что μ – σ - конечная мера на $\mathcal{K}(\mathbb{R})$. Доказать, что мера μ_F, построенная по функции $F(x) = -[-x]$, совпадает с этой мерой.

1.10 Абсолютная непрерывность меры

Рассматривая меру Лебега и меру Лебега – Стилтьеса на числовой прямой $\mathbb{R}$, мы заметили, что класс измеримых множеств относительно каждой меры, вообще говоря, свой. В общем случае и класс множеств меры нуль тоже зависит от исходной меры. Однако изучение класса множеств меры нуль представляет интерес для теории интегрирования.

Определение 1.10.1. Пусть μ и ν – две σ - аддитивные меры, заданные на одной и той же σ - алгебре Σ измеримых подмножеств множества X. Мера ν называется *абсолютно непрерывной* относительно меры μ, если из того, что

$$\mu(A) = 0 \text{ следует, что } \nu(A) = 0.$$

Лемма 1.10.1. *Пусть μ и ν – две σ - аддитивные меры, заданные на одной и той же σ - алгебре измеримых множеств. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \delta$ справедливо неравенство $\nu(A) < \varepsilon$.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, но условие леммы не выполняются, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$, что какое бы $\delta_k = 2^{-k}$ мы не взяли, найдется измеримое множество $A_k \in \Sigma$, для которого $\mu(A_k) < 2^{-k}$, а $\nu(A_k) \geqslant \varepsilon_0$.

Рассмотрим убывающую последовательность измеримых множеств $U_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k$, для которой

$$\mu(U_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} = \delta_n,$$

тогда по предположению $\nu(U_n) \geqslant \nu(A_{n+1}) \geqslant \varepsilon_0$.

Обозначим через $U = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, тогда в силу непрерывности снизу σ - аддитивной меры имеем

$$\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0,$$

но

$$\nu(U) = \lim_{n\to\infty} \nu(U_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \nu(A_{n+1}) \geqslant \varepsilon_0.$$

Последнее соотношение противоречит абсолютной непрерывности ν относительно μ, поскольку $\mu(U) = 0$, а $\nu \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть $\mu(A) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ построено $\delta(\varepsilon)$ такое, что $\mu(A) = 0 < \delta$ влечет за собой $\nu(A) < \varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $\nu(A) = 0$. $\otimes$

Пусть на множестве $[a,b)$ заданы мера Лебега μ и мера Лебега – Стилтьеса μ_F, порожденная монотонно неубывающей непрерывной слева ограниченной функцией $F(x)$. Выясним, какому дополнительному условию должна удовлетворять функция $F(x)$, чтобы мера μ_F была абсолютно непрерывна относительно μ при условии, что μ и μ_F заданы на одном и том же классе измеримых подмножеств Σ множества X. Таким классом является борелевская σ - алгебра $\mathcal{B}\big([a,b)\big)$. Предварительно рассмотрим новый класс множеств.

Определение 1.10.2. Функция $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной,* на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что какова бы ни была конечная либо счетная система попарно непересекающихся интервалов $(a_i,b_i) \subset [a,b)$, $i = 1,2,\ldots,$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon. \tag{1.10.1}$$

Рассмотрим основные свойства абсолютно непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$.

Утверждение 1.10.1. *Всякая абсолютно непрерывная функция является непрерывной и равномерно непрерывной.*

Доказательство. Возьмем $i = 1$, тогда по определению из $|b_i - a_i| < \delta$ следует $|F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$ для любых a_i и b_i. Можно, например, взять $b_i = a_i + h$, где $|h| < \delta$. $\otimes$

Обратное утверждение неверно. Пример непрерывной, но не абсолютно непрерывной функции будет рассмотрен в конце параграфа.

Очевидно, что класс абсолютно непрерывных функций образуют функции, имеющие на на отрезке $[a,b]$ ограниченную производную, поскольку

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |F'(\xi_i)||b_i - a_i| \leqslant L \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| \leqslant L\delta < \varepsilon.$$

Утверждение 1.10.2. *Класс абсолютно непрерывных функций, заданных на отрезке* $[a,b]$, *замкнут относительно алгебраических операций.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай произведения двух абсолютно непрерывных функций $f(x), g(x)$. Пусть (a_i, b_i) – система попарно непересекающихся интервалов на отрезке $[a,b]$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(b_i)g(a_i)| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(a_i) - f(a_i)g(a_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)||g(b_i) - g(a_i)| + \tag{1.10.2}$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}|g(a_i)||f(b_i)-f(a_i)|\leqslant\alpha\sum_{i=1}^{\infty}|g(b_i)-g(a_i)|+\beta\sum_{i=1}^{\infty}|f(b_i)-f(a_i)|.$$

где $\alpha=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $\beta=\max\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$.

Для любого $\varepsilon>0$ найдутся δ_1 и δ_2 в силу абсолютной непрерывности функций f и g, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\beta}\ \text{ при }\ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i)-(a_i)<\delta_1,\\ \sum_{i=1}^{\infty}|g(b_i)-g(a_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\alpha}\ \text{ при }\ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i)-(a_i)<\delta_2.\end{aligned}\tag{1.10.3}$$

Поэтому, выбрав $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, из (1.10.2) и (1.10.3) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\beta}\beta+\frac{\varepsilon}{2\alpha}\alpha=\varepsilon.$$

$\otimes$

Утверждение 1.10.3. *Всякая абсолютно непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция почти всюду дифференцируема.*

Доказательство. Вытекает из свойств монотонных функций и того факта, что всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных монотонно неубывающих функций. $\otimes$

Упражнение 19. Доказать, что всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных монотонно неубывающих функций.

В дальнейшем мы покажем, что интеграл Лебега с переменным верхним пределом является абсолютно непрерывной функцией и остановимся на других свойствах абсолютно непрерывных функций.

А теперь вернемся к мере Лебега – Стилтьеса на $[a,b)$.

Теорема 1.10.1. *Пусть на σ - алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}([a,b))$ задана мера μ_F, порожденная функцией $F(x)$. Мера μ_F абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ абсолютно непрерывна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть мера μ_F абсолютно непрерывна относительно меры μ. Тогда по лемме для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\mu(A) < \delta$, то $\mu_F(A) < \varepsilon$ для любого множества $A \in \mathcal{B}\big([a,b)\big)$. Возьмем множество $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i)$, для которого $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, тогда $\mu_F(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}|F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \varepsilon$. А это что означает абсолютную непрерывность функции F.

Достаточность. Пусть F – абсолютно непрерывная функция и для $A \in \mathcal{B}\big([a,b)\big)$ $\mu(A) = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем по нем $\delta > 0$ из условия абсолютной непрерывности функции F. Воспользуемся определением множества меры нуль и покроем A счетной системой полуинтервалов $[\alpha_i,\beta_i) \subset [a,b)$ так, что

$$A \subset \bigsqcup_i [\alpha_i,\beta_i) \text{ и } \sum_i(\beta_i - \alpha_i) < \frac{\delta}{2}.$$

Для полуинтервала $[\alpha_i,\beta_i)$ построим интервал $(\alpha_i - 2^{-(i+1)}\delta, \beta_i)$, тогда

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i - 2^{-(i+1)}\delta, \beta_i) = B.$$

Множество B является открытым и, следовательно, его можно представить как объединение попарно непересекающихся интервалов, т. е. $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \mu(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) + \sum_{i=1}^{\infty}2^{-(i+1)}\delta < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Из выбора δ получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\big(F(\beta_i) - F(\alpha_i)\big) < \varepsilon$, откуда следует, что

$$\mu_F(A) \leqslant \mu_F(B) = \sum_{i=1}^{\infty}\big(F(b_i) - F(a_i)\big) \leqslant \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $\mu_F(A) = 0$. По определению это означает абсолютную непрерывность меры μ_F относительно меры μ. $\otimes$

Рассмотрим пример функции, которая является равномерно непрерывной, но не абсолютно непрерывной.

Пример 15 (канторова лестница). На отрезке [0,1] построим последовательность функций $F_n(x)$ следующим образом:

$$F_1(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \in (1/3{,}2/3), \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \in (1/3{,}2/3), \\ 1/4, & \text{если } x \in (1/9{,}2/9), \\ 3/4, & \text{если } x \in (7/9{,}8/9), \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

и т.д.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ (2k-1)/2^n, x \in I_n^k, \\ 1, x = 1, \end{cases}$$

где I_n^k – k-ый слева интервал, выброшенный при построении канторового множества на n - ом шаге. В остальных точках определим $F_n(x)$ с помощью линейной интерполяции. Последовательность $F_n(x)$ сходится к неубывающей функции $F(x)$, называемой "канторовой лестницей". Функция $F(x)$ на множестве $G = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ с $\mu(G) = 1$ постоянна, поэтому $\mu_F(G) = 0$. Точки роста функции F – канторово множество, $\mu(K) = 0$, а $\mu_F(K) = 1$. Действительно, $\nu(K) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Согласно теореме, мера ν, порожденная "канторовой лестницей", не является абсолютно непрерывной относительно меры μ, поэтому $F(x)$ не является абсолютно непрерывной.

Задачи

1. Доказать по определению, что "канторова лестница"$F(x)$ не является абсолютно непрерывной функцией.

2. Показать, что производная "канторовой лестницы"равна нулю почти всюду.

3.Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x + F(x)$, где F – "канторова лестница". Показать, что функция φ непрерывна; не убывает; устанавливает взаимно однозначное соответствие между [0,1] и [0,2]; $\mu(\varphi(K)) = 1$, где K – канторово множество. Доказать, что существует неизмеримое по Лебегу множество $A \subset \varphi(K)$. Доказать, что $\varphi^{-1}(A)$ – измеримое по Лебегу не борелевское множество.

1.11 Измеримые функции и их свойства

Понятие измеримой функции было введено в математику А.Лебегом в связи с построением теории интегрирования. Затем Н.Н.Лузиным была установлена связь между измеримыми и непрерывными функциями.

Введем ряд понятий, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Множество X, на котором задана некоторая σ - алгебра его измеримых подмножеств Σ называется *измеримым пространством* и обозначается (X,Σ). Измеримое пространство, на котором задана мера, называется *пространством с мерой* и обозначается (X,Σ,μ). Иногда пространство с мерой мы будем обозначать просто X. В дальнейшем мы будем предполагать, что μ – σ - аддитивная полная мера.

Нас будем интересовать понятие измеримости числовых функций, поскольку для них в дальнейшем строится теория интегрирования. При этом будем считать, что функции могут принимать не только конечные значения, но и значения $+\infty$ и $-\infty$.

О п р е д е л е н и е 1.11.1. Пусть X – пространство с мерой. Действительная функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой*, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x\colon f(x) < c\}$ измеримо (здесь $\overline{\mathbb{R}}$ – расширенная числовая прямая). Комплекснозначная функция $g + ih$ измерима, если измеримы ее действительная и мнимая части.

У п р а ж н е н и е 20. Доказать, что для того, чтобы действительная функция f была измеримой необходимо и достаточно, чтобы для всякого борелевского множества A числовой прямой было измеримо множество $f^{-1}(A)$.

Лемма 1.11.1. *Числовая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримо одно из множеств $\{x : f(x) \leqslant c\}$, $\{x : f(x) > c\}$, $\{x : f(x) \geqslant c\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть функция f измерима. Тогда при любом $c \in \mathbb{R}$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ измеримы множества

$\{x : f(x) < c + 1/n\}$. Нетрудно показать, что

$$\{x : f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\}. \tag{1.11.1}$$

Действительно, если $x \in \{x : f(x) \leqslant c\}$, то $f(x) < c + 1/n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, откуда $f(x) \leqslant c$, т. е. x принадлежит левой части равенства (1.11.1). Множество в левой части (1.11.1) измеримо как пересечение измеримых множеств. Далее,

$$\{x : f(x) > c\} = X \setminus \{x : f(x) \leqslant c\},$$

$$\{x : f(x) \geqslant c\} = X \setminus \{x : f(x) < c\}.$$

Достаточность. Пусть, например, множество $\{x : f(x) \leqslant c\}$ измеримо. Тогда можно показать, что

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\Big\}.$$

Аналогично проверяется достаточность двух других условий. $\otimes$

Упражнение 21. Показать, что если функция f измерима, то при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) = c\}$ измеримо. Верно ли обратное?

Рассмотрим некоторые примеры измеримых функций.

Пример 16. На числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега любая непрерывная функция измерима. Действительно, множество $A_c = \{x \colon f(x) < c\}$ является прообразом открытого множества $f^{-1}(-\infty, c)$, которое измеримо как борелевское множество.

Пример 17. Рассмотрим функцию Дирихле.

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если x иррационально на } \mathbb{R}, \\ 1, & \text{если x рационально на } \mathbb{R}, \end{cases}$$

тогда при $c > 1$ $A_c = \{x : D < c\} = \mathbb{R}$; при $0 < c \leqslant 1$ $A_c = \mathbb{R} \setminus Q$; а при $c \leqslant 0$ $A_c = \varnothing$. Каждое из множеств A_c измеримо на $\mathbb{R}$.

Пример 18. Пусть $\chi_A(x)$ – характеристическая функция измеримого множества $A \subset X$, т. е. $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$. В этом случае $A_c = \varnothing$ при $c \leqslant 0$; $A_c = X \setminus A$ при $0 < c \leqslant 1$; $A_c = X$ при $c > 1$. Следовательно, неизмеримой является характеристическая функция неизмеримого множества.

Пример 19. Пусть $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i (i = 1,2,\ldots)$ – измеримые множества. Рассмотрим функцию $f(x)$ такую, что $f(x) = y_i$, если $x \in A_i$, $i = 1,2,\ldots$; $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Покажем, что f измерима.

Пусть $c \in \mathbb{R}$ любое, тогда

$$A_c = \{x : f(x) > c\} = \bigcup_i A_i, \tag{1.11.2}$$

где суммирование распространяется на все индексы i такие, что $y_i > c$. Из (1.11.2) вытекает измеримость множества A_c, т. е. измеримость функции f. В дальнейшем на рассмотрении таких функций мы остановимся более подробно.

Перейдем к рассмотрению свойств измеримых функций.

Теорема 1.11.1. *Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая функция. Тогда для любой измеримой функции $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ их композиция $h = g \circ f$ также измерима на X.*

Доказательство. Покажем, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : h(x) < c\}$ измеримо. Действительно, $\{x : h(x) < c\} = h^{-1}(-\infty,c) = f^{-1}\big(g^{-1}(-\infty,c)\big)$. Поскольку g измерима, то $A = g^{-1}(-\infty,c) = E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, откуда, в силу измеримости f, находим, что $\{x : h(x) < c\} = f^{-1}(E) \in \Sigma$. $\otimes$

Замечание 1.11.1. Доказанная теорема применима, в частности, в том случае, когда функция g является непрерывной, поскольку каждая непрерывная функция измерима. Отметим, однако, что если g измерима, f непрерывна, то композиция $f \circ g$ может оказаться неизмеримой.

Будем говорить, что две определенные на множестве X функции *эквивалентны*, если они равны между собой *почти всюду*, т. е. равны между собой для всех $x \in X$ за исключением, быть может, точек, принадлежащих множеству нулевой меры.

Лемма 1.11.2. *Функция $f(x)$, определенная на множестве X и эквивалентная на нем измеримой функции $g(x)$, так же измерима.*

Доказательство. Из определения эквивалентности вытекает, что множества

$$\{x : f(x) < c\} \text{ и } \{x : g(x) < c\}$$

могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль. $\otimes$

Пример 20. На числовой прямой функция Дирихле эквивалентна функции, тождественно равной нулю.

Замена функции на ей эквивалентную широко используется в теории интегрирования.

Покажем, что множество измеримых функций замкнуто относительно алгебраических операций над измеримыми функциями.

Теорема 1.11.2. *Пусть (X,Σ,μ) – пространство с мерой и $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримые функции. Тогда функции αf, f^2, $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при условии, что $g(x) \neq 0$ на X), $\alpha \in \mathbb{R}$, измеримы.*

Доказательство. Измеримость функции αf при $\alpha = 0$ очевидна. Пусть $\alpha \neq 0$, тогда

$$\{x : \alpha f(x) < c\} = \begin{cases} \{x\colon f < c/\alpha\}, & \text{если } \alpha > 0, \\ \{x\colon f > c/\alpha\}, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что из измеримости функции f вытекает измеримость $f+\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Покажем, что из измеримости функций f и g следует измеримость множества $\{x\colon f(x) > g(x)\}$. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных чисел, занумерованных в произвольном порядке. Тогда

$$\{x\colon f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(\{x\colon f(x) > r_k\} \cap \{x\colon g(x) < r_k\}\big). \qquad (1.11.3)$$

Действительно, пусть x принадлежит левой части равенства (1.11.3), тогда найдется такое рациональное число $r_k \in Q$, что

$$g(x) < r_k < f(x),$$

для заданного x и, поэтому, $f(x) > r_k$ и $g(x) < r_k$. Значит

$$x \in (f(x) > r_k) \cap (g(x) < r_k),$$

и, следовательно, x входит в правую часть (1.11.3).

Пусть теперь x входит в правую часть (1.11.3), тогда найдется $k_0 \in \mathbb{N}$, что $x \in (f(x) > r_{k_0}) \cap (g(x) < r_{k_0})$, то есть $g(x) < r_{k_0} < f(x)$. Следовательно, для заданного x $f(x) > g(x)$, а это означает, что x входит в левую часть (1.11.3).

Докажем измеримость $f + g$. Рассмотрим множество

$$\{x\colon f + g > c\} = \{x\colon f(x) > c - g(x)\},$$

которое измеримо по доказанному выше. Заметим, что если функция f измерима, то измерима и функция f^2. Действительно,

$$\{x\colon f^2(x) < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } c \leqslant 0, \\ \{x\colon f(x) < \sqrt{c}\} \bigcap \{x\colon f(x) > -\sqrt{c}\}, & \text{если } c > 0. \end{cases}$$

Тогда функция $f \cdot g$ измерима, так как

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big).$$

Так как $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, то для доказательства измеримости частного надо доказать измеримость $\frac{1}{g}$. Рассмотрим множество

$$\{x\colon \frac{1}{g(x)} < c\} = \begin{cases} \{x\colon g(x) < c\},\ c = 0, \\ \{x\colon g(x) > 1/c\} \bigcup \{x\colon g(x) < 0\},\ c > 0, \\ \{x\colon g(x) < 0\} \bigcap \{x\colon g(x) > 1/c\},\ c < 0, \end{cases}$$

которое, очевидно, измеримо. $\otimes$

Задачи

1. Пусть функции f и g, определенные на X, – измеримы. Доказать измеримость функций

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, m(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

2. Описать те числа $n \in \mathbb{N}$, при которых из измеримости f^n следует измеримость f.

3. Доказать, что функция f измерима тогда и только тогда, когда измерима

а) $\operatorname{arctg} f$; б) $\sin f$.

Показать, что измеримость каждой из следующих функций не влияет, вообще говоря, на измеримость f :

а) f^2; б) $e^{|f|}$; в) $\cos f$.

4. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $n(c)$ – число решений уравнения $f(x) = c$. Доказать, что функция $n(c)$ измерима.

5. Будет ли функция $\operatorname{sign} f(x)$ измерима на X, если $f(x)$ измерима на X.

1.12 Сходимость в пространстве измеримых функций

Одним из свойств пространства измеримых функций является замкнутость относительно предельного перехода. Будем считать, что на измеримом пространстве (X,Σ) задана σ - аддитивная полная конечная мера μ. Рассмотрим различные виды сходимости последовательности измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ на пространстве с мерой X.

1. *Равномерная сходимость.*

Последовательность измеримых функций f_n сходится к функции f *равномерно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполнено

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость обозначается так: $f_n \rightrightarrows f$.

2. *Точечная сходимость.*

Последовательность f_n сходится к функции f *точечно*, если для любого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

3. *Сходимость почти всюду.*

Последовательность f_n сходится к f *почти всюду* ($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$), если $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек x за исключением, быть может, тех x, которые принадлежат множеству меры нуль.

4. *Сходимость по мере.*

Сходимость по мере последовательности измеримых функций f_n к измеримой функции f обозначается $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ мера множества

$$A_n(\varepsilon) = \big\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\big\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Очевидно, что из равномерной сходимости следует сходимость точечная, а из точечной – сходимость почти всюду.

Покажем, что совокупность измеримых функций замкнута по отношению не только к арифметическим операциям, но и к операции предельного перехода.

Теорема 1.12.1. *Пусть X, Σ, μ – пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых функций. Если f_n сходится в каждой точке $x \in X$ к функции f, то функция f измерима.*

Доказательство. Пусть для каждого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Покажем, что функция f измерима, т. е. для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x\colon f < c\}$ измеримо. Предварительно докажем равенство

$$A_c = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant k}^{\infty}\Big\{x\colon f_n(x) < c - \frac{1}{m}\Big\}. \tag{1.12.1}$$

Действительно, пусть $x \in A_c$, тогда $f(x) < c$. Это означает, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ $f(x) < c - 1/m$ (т. е. $c - f(x) > 1/m$), и, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant k$ $f_n(x) < c - 1/m$. А это означает, что x принадлежит правой части (1.12.1).

Наоборот, пусть x принадлежит правой части (1.12.1). Тогда найдутся $m,k \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant k$ $f_n(x) < c - 1/m$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем $f(x) \leqslant c - 1/m$ или $f(x) < c$, что означает $x \in A_c$.

Множество $\{x\colon f_k(x) < c - 1/m\}$ измеримо в силу измеримости последовательности (f_n), а так как семейство измеримых множеств Σ является σ - алгеброй, то измеримо множество в правой части (1.12.1) и, следовательно, A_c, что означает измеримость f. $\otimes$

Следствие 1.12.1. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно, то f измерима.

Доказательство. Всякая равномерно сходящаяся последовательность сходится поточечно, поэтому можно воспользоваться теоремой. $\otimes$

Следствие 1.12.2. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f почти всюду, то предельная функция измерима.

Доказательство. Пусть на $X_0 \subset X$ последовательность $f_n(x) \to \to f(x)$ при $n \to \infty$ и $\mu(X \setminus X_0) = 0$. Тогда

$$\{x\colon f(x) < c\} = \big(\{x\colon f(x) < c\} \cap X_0\big) \cup \big(\{x\colon f(x) < c\} \cap \{X \setminus X_0\}\big).$$

Первое множество измеримо, поскольку на множестве X_0 последовательность f_n сходится точечно. Второе слагаемое является подмножеством множества меры нуль. Оно измеримо в силу полноты меры. $\otimes$

Упражнение 22. Пусть μ – полная σ - аддитивная мера на (X,Σ) и $\mu(E) = 0$, где $E \in \Sigma$. Показать, что любая функция на E измерима.

Следствие 1.12.3. Существует разрывная на отрезке $[a,b]$ функция, которая не является пределом почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.

В качестве такой функции можно взять неизмеримую функцию.

Выясним связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду, если $\mu(X) < \infty$.

Теорема 1.12.2 (Лебег). *Пусть (X,Σ,μ) – пространство с полной конечной σ - аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится к функции f почти всюду. Тогда она сходится к той же самой предельной функции и по мере.*

Доказательство. Пусть

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(f) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Положим

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k \geqslant n} A_k(\varepsilon).$$

Очевидно, что при каждом фиксированном ε

$$B_1(\varepsilon) \supset B_2(\varepsilon) \supset \ldots \supset B_n(\varepsilon) \supset \ldots,$$

т. е. $B_n(\varepsilon) \uparrow$. Пусть

$$B(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon).$$

Если $x \in B(\varepsilon)$, то $x \in B_n(\varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $x \in A_n(\varepsilon)$ для сколь угодно больших номеров $n \in \mathbb{N}$. Но тогда для таких последовательностей $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$. Поэтому x принадлежит множеству с нулевой мерой, т. е. $\mu\big(B(\varepsilon)\big) = 0$. С другой стороны, учитывая свойство непрерывности снизу σ - аддитивной меры μ, имеем

$$0 = \mu\big(B(\varepsilon)\big) = \lim_{n\to\infty} B_n(\varepsilon), \tag{1.12.2}$$

Так как $\mu\big(A_n(\varepsilon)\big) \leqslant \mu\big(B_n(\varepsilon)\big)$, то видно, что из (1.12.2) вытекает

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(A_n(\varepsilon)\big) = 0.$$

Это означает, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$. $\otimes$

Теорема Лебега не справедлива в пространстве с σ - конечной мерой.

Пример 21. Рассмотрим числовую прямую как пространство с σ - конечной мерой. Представим ее в виде $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} [n,n+1)$. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x).$$

Очевидно, что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а, значит, и почти всюду. В то же время при $\varepsilon \in (0,1)$ имеем

$$\mu\big(A_n(\varepsilon)\big) = \mu\Big\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geqslant \varepsilon\|\Big) = \mu\big([n,n+1)\big) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, сходимость по мере отсутствует.

Теорема1.12.2 не допускает обращения. Приведем пример сходящейся по мере последовательности расходящейся в каждой точке.

Пример 22. На полуинтервале $X = [0,1)$ с мерой Лебега μ зададим для каждого $k \in \mathbb{N}$ систему k функций $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ следующим образом:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Big[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\Big), \\ 0, & x \notin \Big[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\Big). \end{cases} \tag{1.12.3}$$

$i = 1,2,\ldots,k$. Систему функций (1.12.3) занумеруем подряд в одну последовательность $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n(x) = f_i^{(k)}(x)$, $n = k(k-1)/2 + i$, $i = 1,2,\ldots,k$. Последовательность $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ по мере μ. Действительно, при $\varepsilon > 1$ все множества $A_n(\varepsilon) = \{x\colon |g_n| \geqslant \varepsilon\}$ пусты и их мера равна нулю; если же $\varepsilon \leqslant 1$, то $\mu\big(A_n(\varepsilon)\big) = \mu\Big([\frac{i-k}{k},\frac{i}{k})\Big) = \frac{1}{k} \to 0$ при $k \to \infty$.

Покажем теперь, что последовательность g_n расходится в каждой точке. Пусть $x_0 \in [0,1)$, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется полуинтервал $[\frac{i-k}{k},\frac{i}{k})$, в котором находится x, поэтому $f_i^{(k)}(x_0) = 1$. Это значит, что у последовательности g_n все члены со сколь угодно большими номерами равны 1 и g_n не сходится к нулю.

Теорема 1.12.3 (Рисс). *Пусть (X,Σ,μ) – пространство с полной σ - аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится по мере к измеримой функции f. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset (f_n)$, сходящуюся к f почти всюду.*

Доказательство. Рассмотрим две последовательности $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > 0,\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0;$$

$$\alpha_n > 0,\ (n = 1,2,\ldots),\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Поскольку $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x\colon |f_n - f| \geqslant \varepsilon_1\} = 0$. Поэтому найдется номер $n_1 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > n_1$

$$\mu\{x\colon |f_n - f| \geqslant \varepsilon_1\} < \alpha_1.$$

Аналогично, существует $n_2 > n_1$, что для всех $n > n_2$

$$\mu\{x\colon |f_n - f| \geqslant \varepsilon_2\} < \alpha_2.$$

Продолжая этот процесс, мы для любого k найдем $n_k > n_{k-1}$, и при этом будет выполняться для всех $n > n_k$

$$\mu\{x\colon |f_n - f| \geqslant \varepsilon_k\} < \alpha_k.$$

Таким образом, строится подпоследовательность $(f_{n_k}) \subset (f_n)$. Покажем, что она является искомой.

Действительно, обозначим через

$$B_m(\varepsilon) = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x\colon |f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon_k\},$$

последовательность $B_m(\varepsilon)$ измеримых множеств является убывающей, поэтому

$$B(\varepsilon) = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m(\varepsilon),$$

В силу непрерывности снизу σ - аддитивной меры

$$\mu\big(B(\varepsilon)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(B_m(\varepsilon)\big).$$

Но,

$$\mu\big(B_m(\varepsilon)\big) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \mu(\{x\colon |f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon_k\}) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то его остаток стремится к нулю, т. е.

$$\mu\big(B_m(\varepsilon)\big) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Поэтому

$$\mu\big(B(\varepsilon)\big) = 0.$$

Рассмотрим $x_0 \in X \setminus B(\varepsilon)$, тогда $x_0 \notin B_{m_0}(\varepsilon)$ при некотором m_0, значит для любого $k \geqslant m_0$

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon_k\}.$$

Следовательно, $f_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$. $\otimes$

Замечание 1.12.1. Теорема Рисса остается справедливой в случае σ - конечной меры на X.

Задачи

1. Пусть на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ задано кольцо $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ и мера $\mu(\{k\}) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Покажите, что пространство $\mathbb{N}$ является пространством с σ - конечной мерой. Выяснить, что означает сходимость по мере в этом пространстве.

2. Пусть (f_n) – последовательность измеримых функций удовлетворяет условиям:

1) $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ почти всюду;

2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} 0$.

Доказать, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} 0$.

3. Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

всюду на $\mathbb{R}$ сходится к нулю, но не сходится равномерно.

4. Занумеруем все рациональные числа отрезка [0,1] и запишем k-ое рациональное число r_k в виде несократимой дроби $r_k = p_k/q_k$. Положим

$$f_k(x)e^{-(p_k - xq_k)^2}.$$

Доказать, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} 0$ на отрезке [0,1] и расходится в каждой точке. Указать подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду.

5. Пусть на измеримом пространстве с $\mu(X) < \infty$ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} g$. Доказать, что $|f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} |f|$, $f_n + g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f + g$, $f_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f^2$.

Что можно сказать о сходимости этих последовательностей в случае σ - конечной меры.

6. Пусть $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, где μ – конечная полная σ – аддитивная мера. Доказать, что если $\mu(\{x : f_n \leqslant h_n \leqslant g_n\}) \to \mu(X)$, то $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.

1.13 Теорема Егорова

В параграфе 1.12 мы установили связь между типами сходимости последовательности измеримых функций. Выяснили, что из равномерной сходимости в пространстве X с $\mu(X) < \infty$ вытекают все оставшиеся типы сходимостей.

В классическом математическом анализе равномерная сходимость играет важную роль в теории дифференцирования и интегрирования. Следующая теорема устанавливает связь между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости для последовательности измеримых функций.

Теорема 1.13.1 (Егоров). *Пусть* (X,Σ,μ) *– пространство с конечной мерой и пусть последовательность измеримых функций* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится почти всюду на* X *к измеримой функции* f. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется такое измеримое множество* $X_\delta \subset X$, *что:*

1) $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$;

2) на множестве X_δ *последовательность* $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство. По теореме 1.12.1 заключаем, что функция $f(x)$ измерима. Обозначим через

$$X_n^m = \bigcap_{k \geqslant n} \{x \colon |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}.$$

Это множество обладает тем свойством,что при фиксированных n и m выполняется $|f_k(x) - f(x)| < 1/m$ для всех $k \geqslant n$, и, кроме того, оно измеримо. Зафиксируем m, тогда множества X_n^m образуют возрастающую последовательность $X_1^m \subset X_2^m \subset \ldots$ и поэтому можно ввести в рассмотрение измеримое множество

$$X^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^m,$$

Учитывая непрерывность сверху σ - аддитивной меры μ, имеем

$$\mu(X^m) = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n^m).$$

Из определения предела вытекает, что для каждого m и любого $\delta > 0$ найдется такой номер $n_0(m)$, что

$$\mu(X^m \setminus X_{n(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}$$

для всех $n \geqslant n_0(m)$.

Положим

$$X_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} X^m_{n_0(m)}$$

и покажем, что оно является искомым.

Во - первых,

$$X \setminus X_\delta = X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} X^m_{(n_0(m)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus X^m_{n_0(m)}).$$

Поэтому

$$\mu(X \setminus X_\delta) \leqslant \mu(X \setminus X^m) + \mu(X^m \setminus X_\delta).$$

Учитывая, что

$$X^m \setminus X_\delta = X^m \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \big(X^m \setminus X^m_{n_0(m)}\big),$$

получим

$$\mu(X^m \setminus X_\delta) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X^m \setminus X^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta,$$

а $\mu(X \setminus X^m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Действительно, если $x_0 \in X \setminus X^m$, то существует такое $k \in \mathbb{N}$, для которого $|f_k(x_0) - f(x_0)| > 1/m$, т. е. $f_n(x_0)$ не сходится к $f(x_0)$. По условию $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$. Значит, сходимость отсутствует на множестве меры нуль. Поэтому $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$.

Во - вторых, на множестве X_δ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно. Это сразу вытекает из того, что если $x \in X_\delta$, то для любого $m \in N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1/m$ при $n > n_0(m)$, что и означает равномерную сходимость. $\otimes$

Упражнение 23. Указать, где при доказательстве теоремы Егорова используется конечность меры.

Замечание 1.13.1. Теорема Егорова не имеет места в случае σ - конечной меры.

Пример 23. Пусть $X = \mathbb{N}$, алгебра $\mathcal{K} = \mathscr{P}(X)$, $\mu\{k\} = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим возрастающую последовательность множеств $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ с $\mu(A_n) = n < \infty$, тогда $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть

$f_n(x) = \chi_{A_n}(x)$, т. е. $f_n(k) = 1$ для всех $k \leqslant n$ и $f_n(x) = 0$ в остальных случаях. Ясно, что $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ почти всюду. Возьмем $0 < \delta < 1$, тогда из условия $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$ вытекает, что множество $\mathbb{N}_\delta$, при условии его существовании, должно совпадать с $\mathbb{N}$, поскольку мера принимает лишь целочисленные значения. Однако на всем $\mathbb{N}$ равномерной сходимости нет.

Мы показывали, что всякая непрерывная функция измерима. Естественно поставить вопрос, насколько класс измеримых функций шире класса непрерывных функций на множестве $X \subset \mathbb{R}$ с $\mu(X) < \infty$. Следующая теорема, установленная Н.Н.Лузиным, показывает, что эти классы в определенном смысле близки.

Теорема 1.13.2 (Лузин). *Для того, чтобы функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, была измеримой необходимо и достаточно, чтобы для для любого $\varepsilon > 0$ существовала непрерывная функция $g(x)$ такая, что*

$$\mu\big(\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\big) < \varepsilon.$$

Упражнение 24. Используя теорему Егорова, доказать теорему Лузина.

Задачи

1. Пусть на отрезке $[0,\pi]$ задана последовательность измеримых функций

$$f_n(x) = \frac{nsinx}{1 + n^2 sin^2 x}.$$

Для заданного $\delta > 0$ явно указать множество $X_\delta \subset [0,\pi]$, на котором последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty$ сходится равномерно.

2. Доказать, что если A – измеримое множество на отрезке $[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое открытое множество $G \supset A$ и такое замкнутое $F \subset A$, что

$$\mu(G \setminus A) < \varepsilon \text{ и } \mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

3. Показать, что теорема Лузина остается справедливой и в случае σ - конечной меры на X.

4. Из теоремы Лузина вытекает, что всякая измеримая на отрезке $[a,b]$ функция является почти всюду пределом последовательности непрерывных функций. Всегда ли можно эту последовательность выбрать монотонной?

1.14 Простые функции и интеграл Лебега от простых функций

Для построения интеграла Лебега нам понадобится класс функций, замкнутый относительно алгебраических операций, называемых простыми.

Пусть (X, Σ, μ) – пространство с σ - аддитивной полной конечной мерой.

Определение 1.14.1. Измеримая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *простой,* если она принимает конечное или счетное число различных значений.

Пусть $A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$, тогда $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и функция $f(x)$ может быть записана в виде линейной комбинации характеристических функций

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}(x). \tag{1.14.1}$$

Структура простых функций описывается следующим образом.

Теорема 1.14.1. *Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является простой тогда и только тогда, когда $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где множества A_k измеримы и $f(x)$ принимает постоянное значение y_k на множестве A_k.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f – простая функция, тогда f измерима и поэтому измеримы все множества A_k, так как

$$A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\} = \{x\colon f(x) \leqslant y_k\} \setminus \{x\colon f(x) < y_k\}$$

и справедливо представление $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Достаточность. Пусть справедливо представление $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, и все A_k измеримы, тогда для любого $c \in \mathbb{R}$

$$A_c = \{x\colon f < c\} = \bigcup_{y_k < c} A_k,$$

т. е. A_c является объединением измеримых множеств. $\otimes$

Примером простой функции является функция Дирихле, характеристическая функция измеримого множества.

Теорема 1.14.2. *Множество простых функций, заданных на измеримом пространстве X, замкнуто относительно алгебраических операций.*

Доказательство. Пусть $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – простые функции и $A_k = \{x : f(x) = y_k\}$, и $B_j = \{x : g(x) = z_j\}$. Тогда $X = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \coprod\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. Рассмотрим для любых k и j множества $C_{kj} = A_k \cap B_j$, которые измеримы и обладают тем свойством, что $X = \bigcup_{kj} C_{kj}$. Тогда: $(f \pm g)$ на множестве C_{kj} принимает значение $y_k \pm z_j$, аналогично, $(f \cdot g) = y_k \cdot z_j$, $f/g = y_k/z_j$. ⊗

Использование простых функций в построении интеграла Лебега основано на следующей теореме.

Теорема 1.14.3. *Для любой измеримой функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – измеримая функция. Положим

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \quad \text{если } \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n},$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 1,2, \ldots$. Пусть

$$A_n^k = \Big\{x \in X : \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}\Big\},$$

тогда A_n^k измеримы при любых $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и поэтому (f_n) – последовательность простых функций. Кроме того,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

а это означает, что последовательность $f_n \rightrightarrows f$. ⊗

Основная идея построения интеграла Лебега состоит в том, что здесь, в отличии от интеграла Римана, точки x группируются не по признаку их близости на оси OX, а по признаку близости значений функции в этих точках. Это сразу же позволяет распространить понятие интеграла Лебега на очень широкий класс функций. Кроме того, интеграл Лебега вводится одинаково для функций, заданных на любых пространствах с мерой, а интеграл Римана вводится сначала для функций одной переменной, а затем уже с соответствующими изменениями переносится на случай нескольких переменных. Для функций же на абстрактных пространствах с мерой интеграл Римана вообще не имеет смысла.

Определим интеграл Лебега вначале от простых функций.

Пусть $f(x)$ – простая функция, принимающая не более чем счетное число различных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ на множествах $A_k = \{x\colon f(x) = y_k\}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k). \tag{1.14.2}$$

Определение 1.14.2. Простая функция f, принимающая значения y_k на множествах A_k, $k = 1,2,\ldots$, называется *суммируемой (по мере μ)* или *интегрируемой по Лебегу* на X, если ряд (1.14.2) сходится *абсолютно.* Если функция f суммируема, то сумма ряда (1.14.2) называется *интегралом Лебега* от функции f по множеству X, т. е.

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k). \tag{1.14.3}$$

Требование абсолютной сходимости возникает потому, что члены ряда (множества A_k) нумеруются произвольно и сумма ряда может меняться при перестановке членов ряда.

В данном определении все y_k различны. Однако от этого требования можно отказаться.

Лемма 1.14.1. *Пусть $X = \bigsqcup\limits_i B_i$ и пусть на каждом B_i функция принимает значение c_i. Тогда*

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(B_i), \tag{1.14.4}$$

причем функция f суммируема на X тогда и только тогда, когда ряд (1.14.4) сходится абсолютно.

Доказательство. Пусть $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $A_k = \{x \in X\colon f(x) = y_k\}$, где все y_k различны. Тогда множества A_k являются объединением тех B_i, для которых $c_i = y_k$. Значит

$$\sum_k y_k \mu(A_k) = \sum_k y_k \Big(\sum_{c_i = y_k} \mu(B_i) \Big) = \sum_i c_i \mu(B_i). \tag{1.14.5}$$

Так как мера неотрицательна, то ряды в (1.14.5) сходятся или расходятся одновременно. В случае абсолютной сходимости рядов (1.14.5) справедливо равенство (1.14.4). $\otimes$

Пример 24. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (-1)^n \cdot n,\ x \in \Big[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\Big),\ n = 1,2,\ldots.$$

Данная функция является простой неограниченной функцией на полуинтервале $[0,1)$. Составим ряд (1.14.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu\Big(\Big[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\Big)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{1}{n(n+1)}.$$

Данный ряд не сходится абсолютно, поэтому функция f не суммируема на полуинтервале $[0,1)$.

Установим некоторые свойства интеграла Лебега от простых функций.

Свойство 1.14.1.

$$\int_X (f(x) + g(x)) \mathrm{d}\mu = \int_X f(x) \mathrm{d}\mu + \int_X g(x) \mathrm{d}\mu,$$

причем из существования интегралов в правой части следует существование интеграла в левой.

Доказательство. Пусть $A_i = \{x\colon f(x) = f_i\}$ и $B_j = \{x\colon g(x) = g_j\}$. Тогда

$$\int_X f(x) \mathrm{d}\mu = \sum_i f_i \mu(A_i), \tag{1.14.6}$$

$$\int\limits_X g(x)\mathrm{d}\mu = \sum_j g_i\mu(B_j). \tag{1.14.7}$$

Рассмотрим

$$\int\limits_X \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}\mu = \sum_i\sum_j (f_i+g_j)\mathrm{d}\mu(C_{ij}), \tag{1.14.8}$$

где $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Но

$$\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i\cap B_j),\ \ \mu(B_j) = \sum_i \mu(A_i\cap B_j).$$

Из абсолютной сходимости рядов (1.14.6) и (1.14.7) вытекает абсолютная сходимость ряда (1.14.8) и требуемое равенство. ⊗

Свойство 1.14.2. Для любой постоянной α

$$\int\limits_X \alpha f(x)\mathrm{d}\mu = \alpha\int\limits_X f(x)\mathrm{d}\mu,$$

причем из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой части.

Упражнение 25. Доказать свойство 2.

Свойство 1.14.3. Ограниченная на множестве X простая функция f интегрируема, причем, если $|f(x)| \leqslant M$ на X, то

$$\Big|\int\limits_X f(x)\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant M\mu(X).$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку неравенств Если простая функция ограничена, то

$$\Big|\int\limits_X f(x)d\mu\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} y_k\mu A_k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\mu(A_k) \leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) = M\cdot\mu(X).$$

А это означает суммируемость f. ⊗

Множество простых суммируемых по мере μ функций обозначается $S(X,\mu)$. Это векторное пространство.

Задачи

1. Пусть $X = \{1,2,\ldots,N\}$. Показать, что всякая измеримая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является простой.

2. Пусть $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$. Вычислить $\int\limits_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}\mu$, если:

а) $f(x) = \chi_{[a,b]\setminus Q}(x)$; б) $f(x) = \chi_{[a,b]\cap Q}(x)$;

с) $f(x) = e^{-[x]}$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

3. Пусть простая функция двумя способами представлена в виде (1.14.1), т. е.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \chi_{B_j}(x),$$

причем $\bigsqcup\limits_k A_k = \bigsqcup\limits_j B_j = X$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j \mu(B_j)$ в том случае, когда один из сходится абсолютно.

1.15 Интеграл Лебега на множестве конечной меры

Пусть (X,Σ,μ) – пространство с σ - аддитивной полной конечной мерой и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая функция.

Определение 1.15.1. Назовем измеримую функцию f *суммируемой по мере μ (интегрируемой по Лебегу)* на X, если существует последовательность простых суммируемых на X функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся к f. *Интегралом Лебега* суммируемой функции f на множестве X называется предел интегралов Лебега от простых суммируемых функций f_n :

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.15.1}$$

Это определение корректно, если выполнены следующие условия:

1) Предел для любой равномерно сходящейся последовательности простых суммируемых на X функций существует.

2) Этот предел при заданной функции f не зависит от выбора п последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

3) Для простых функций определения совпадают.

Все эти условия выполняются. Действительно, рассмотрим последовательность $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, где $I_n = \int\limits_X f_n(x)\mathrm{d}\mu$, тогда

$$|I_n - I_m| = \Big|\int\limits_X f_n(x)\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_m(x)\mathrm{d}\mu\Big| = |\int\limits_X (f_n(x) - f_m(x))\mathrm{d}\mu| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_X |f_n(x) - f_m(x)|\mathrm{d}\mu \leqslant \mu(X)\cdot\sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

так как $\mu(X) < \infty$ и всякая равномерно сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Следовательно, числовая последовательность (I_n) является фундаментальной, и поэтому имеет предел.

Для проверки второго условия рассмотрим две последовательности $f_n, g_n \in S(X,\mu)$ такие, что $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$, тогда $|f_n - g_n| \leqslant |f_n - f| + |g_n - f| < \varepsilon/\mu(X)$. Значит,

$$\Big|\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X g_n\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \int\limits_X |f_n - g_n|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon,$$

Для доказательства справедливости третьего условия достаточно рассмотреть последовательность, в которой f_n равняется f для всех n.

Пусть $\mu(X) < \infty$ и f – суммируемая функция на X. Рассмотрим разбиение оси OY $T = \{y_k\}$, где $y_k \leqslant f(x) \leqslant y_{k+1}$ с диаметром $\lambda(T) = \sup_k |y_{k+1} - y_k|$. Пусть ξ_k – набор точек, удовлетворяющих условию $\xi_k \in [y_k, y_{k+1}]$. Покажем, что интеграл Лебега от функции f может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_k \xi_k\mu\big(\{x\in X :\, y_k \leqslant f(x) \leqslant y_{k+1}\}\big). \qquad (1.15.2)$$

Выражение (1.15.2) называется *интегральной суммой Лебега.*

Определим для каждого разбиения верхнюю и нижнюю интегральные суммы Лебега.

$$S(T) = \sum_k y_{k+1}\mu(A_k),\;\; s(T) = \sum_k y_k\mu(A_k), \qquad (1.15.3)$$

где $A_k = \{x \in X : y_k \leqslant f(x) \leqslant y_{k+1}$ Покажем, что если функция f суммируема, то $S(T)$ и $s(T)$ в (1.15.3) сходятся, причем, поскольку, $s(T) \leqslant \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant S(T)$, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T). \tag{1.15.4}$$

Действительно, если f суммируема, то, согласно (1.15.1), найдется последовательность $f_n \in S(X,\mu)$ такая, что $f_n \rightrightarrows f$. Согласно теореме 1.14.3, последовательность f_n может быть построена так:

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \text{ если } \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}, \tag{1.15.5}$$

либо

$$f_n(x) = \frac{k+1}{n}, \text{ если } \frac{k}{n} < f(x) \leqslant \frac{k+1}{n}. \tag{1.15.6}$$

С учетом (1.15.5), (1.15.6), y_k можно выбирать так, чтобы $|y_k - k/n| \to \to 0$ и $|y_{k+1} - (k+1)/n| \to 0$ для всех k. Тогда ряды (1.15.3) будут сходится. Учитывая оценку

$$|S(T) - s(T)| \leqslant \lambda(T)\mu(X), \tag{1.15.7}$$

видим, что $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T)$.

Формула (1.15.2) для интегральных сумм Лебега позволяет описать отличие в определении интеграла Римана и интеграла Лебега. В обоих определениях (в случае $f(x) > 0$) понятие интеграла связана с площадью фигуры, лежащей между графиком функции $f(x)$ и осью OX. Для подсчета площади фигура разбивается на более простые части, для которых площадь вычисляется приближенно. При составлении интегральных сумм Римана (сумм Дарбу) отрезок $[a,b] = X$ разбивается на части точками $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, в каждой части выбирается точка ξ_k и составляется сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$. Такое приближение оправдано тогда, когда значения функции f на всяком отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ близки к $f(\xi_k)$, $\xi_k \in [x_k,x_{k+1}]$. Это справедливо для непрерывных функций.

При составлении интегральных сумм Лебега выделяются множества A_k и на них функция f заменяется на $\xi_k \in [y_k, y_{k+1}]$, т. е. разбиение производится по признаку близости значений функции. В интегральных суммах Римана разбиение производится по признаку близости точек на оси OX, при этом значения функции будут близки в силу непрерывности функции.

Пример 25. Вычислим по определению $\int\limits_{[0,1]} x^2 \mathrm{d}\mu$.

Функция $f(x) = x^2$ является непрерывной, поэтому она измерима и ограничена. Всякая измеримая ограниченная функция суммируема. Действительно, рассмотрим последовательность простых функций $f_n = k/n$, где $|k| \leqslant n \sup_{x\in X} |f(x)| \leqslant nM$, $M = \sup_{x\in X} |f(x)|$, которая равномерно сходится к $f(x)$ и является суммируемой.

Таким образом, $f(x) = x^2$ на отрезке $[0,1]$ суммируема. Пусть $f_n(x) = y_k = (\frac{k}{n})^2$, когда $x \in A_k = f^{-1}([(\frac{k}{n})^2, (\frac{k+1}{n})^2)) = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, $k = 0, \ldots, n-1$. Тогда

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{[0,1]} x^2\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(A_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n})^2 (\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $\int\limits_{[0,1]} x^2 \mathrm{d}\mu = 1/3$.

Отметим, что данная функция интегрируема по Риману.

Обозначим через $\mathscr{L}(X,\mu)$ – множество интегрируемых по Лебегу функций.

Рассмотрим основные свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры.

Свойство 1.15.1. Пусть $A \subset X$ – измеримое множество. Тогда

$$\int\limits_A \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

Доказательство. Действительно, $\int\limits_A \mathrm{d}\mu = \int\limits_X 1 \cdot \chi_A(x)\mathrm{d}\mu = \mu(A)$. $\otimes$

Свойство 1.15.2. Пусть f,g — суммируемые функции, тогда для любых скаляров $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ суммируемой является функция $\alpha f + \beta g$ и справедливо равенство

$$\int\limits_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_X f(x)\mathrm{d}\mu + \beta \int\limits_X g(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.15.8}$$

Доказательство. Пусть $f_n,g_n \in S(X,\mu)$ и $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$. Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \in S(X,\mu)$ и $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ при $n \to \infty$. В равенстве

$$\alpha \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu + \beta \int\limits_X g_n(x) d\mu = \int\limits_X (\alpha f_n + \beta g_n)\,\mathrm{d}\mu$$

перейдем к пределу при $n \to \infty$ и получим (1.15.8). $\otimes$

Свойство 1.15.3. Ограниченная измеримая функция f суммируема на X.

Доказательство. Это свойство доказано выше. $\otimes$

Свойство 1.15.4. Пусть f – суммируема и удовлетворяет условию $f(x) \geqslant 0$, тогда

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0. \tag{1.15.9}$$

Доказательство. Пусть f является простой, т. е. $f(x) = y_k$, $x \in A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$. Если $y_k \geqslant 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \geqslant 0$, т. е. (1.15.9) справедливо.

Если f – произвольная суммируемая функция, то последовательность

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, x \in \left\{x \in X : \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}\right\},$$

принимает также неотрицательные значения, т. е. $f_n(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$. Поэтому

$$\int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим доказываемое неравенство (1.15.9). $\otimes$

Из свойства 1.15.4 вытекают следующие свойства:

15.4(a). Если f_1, f_2 – суммируемые функции и $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_X f_1(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_X f_2(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.15.10}$$

15.4(b). Если f – суммируемая функция и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m\mu(X) \leqslant \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(X).$$

Свойство 1.15.5. Пусть f – измерима, а φ такая суммируемая на X функция, что $|f| \leqslant \varphi$, тогда f также суммируема.

Доказательство. Пусть f,φ – простые функции. Тогда $X = \bigsqcup\limits_k A_k$ и на A_k функции f и φ принимают соответственно значения y_k и z_k, для которых справедливо неравенство $|y_k| \leqslant z_k$. Рассмотрим ряды

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_k y_k\mu(A_k) \leqslant \sum_k |y_k|\mu(A_k) \leqslant \sum_k z_k\mu(A_k).$$

Из приведенной цепочки неравенств вытекает, что ряд для функции f мажорируется абсолютно сходящимся рядом и, значит, сам абсолютно сходится. В общем случае это свойство доказывается предельным переходом. $\otimes$

В частности справедливо:

15.5(a). Если $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, где f_1,f_2 – суммируемые, а f – измеримая функция, то f будет суммируемой.

15.5(b). Пусть f – суммируемая функция, а g – ограниченная измеримая функция такая, что $|g(x)| \leqslant c$. Тогда функция $f \cdot g$ суммируема, причем

$$\Big|\int\limits_X fg\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant c\int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.15.11}$$

Свойство 1.15.6. Если f суммируема на X, то f суммируема на любом измеримом подмножестве из X и справедливо равенство

$$\int\limits_{A\sqcup B} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{B} f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.15.12}$$

Доказательство. Это свойство называется аддитивностью интеграла Лебега. Пусть f суммируема на X. Тогда

$$\int\limits_{A} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X} f(x)\chi_A(x)\,\mathrm{d}\mu,\ \int\limits_{B} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X} f(x)\chi_B(x)\,\mathrm{d}\mu$$

и

$$\int\limits_{X} \big(f(x)\chi_A(x) + f(x)\chi_B(x)\big)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X} f(x)\big(\chi_A(x) + \chi_B(x)\big)\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \int\limits_{X} \big(f(x)\chi_{A\sqcup B}(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A\sqcup B} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

В данной цепочке использовано то, что $A \cap B = \varnothing$, поэтому $\chi_A(x)+$ $+\chi_B(x) = \chi_{A\sqcup B}(x)$. $\otimes$

Свойство 1.15.7. Функции f и $|f|$ суммируемы либо не суммируемы одновременно, причем справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_{X} f\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \int\limits_{X} |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.15.13}$$

Доказательство. Обозначим через $I_1 = \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu|$, $I_2 = \int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu$. Если I_2 существует, то учитывая, что $f \leqslant |f|$, применяя свойство 1.15.5, получим существование I_1. Пусть f суммируема, т. е. существует I_1. Тогда, если f простая, то I_2 существует по определению. В общем случае свойство доказывается предельным переходом. $\otimes$

Свойство 1.15.8. Если $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$.

Доказательство. Для простых функций это свойство очевидно, а для произвольных получается предельным переходом. ⊗

15.8(a). Если $f(x)=0$ почти всюду на X, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Пусть A – множество меры нуль, вне которого $f(x)=0$, тогда

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu + \int\limits_{X\setminus A} 0\cdot\mathrm{d}\mu = 0.$$

15.8(b). Если $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы и равны почти всюду, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X g(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Последнее соотношение позволяет рассматривать неравенства, возникающие почти всюду. В этом случае может идти речь о функциях измеримых и ограниченных почти всюду.

Определение 1.15.2. Назовем измеримую функцию f на X *существенно ограниченной,* если $\exists c>0$, что $|f(x)|\leqslant c$ почти всюду на X. Наименьшая из таких констант (докажите ее существование) называется *существенной верхней гранью функции* f и обозначается $ess\sup|f(x)|$.

Свойство 1.15.9. Если $\int\limits_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu=0$, то $f(x)=0$ почти всюду на X.

Для доказательства данного свойства используем неравенство Чебышева.

Лемма 1.15.1. *Пусть f – суммируема, причем $f(x)\geqslant 0$, $c>0$, и пусть $A_c=\{x\colon f(x)\geqslant c\}$. Тогда справедливо неравенство Чебышева*

$$\mu(A_c)\leqslant \frac{1}{c}\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.15.14}$$

Доказательство.

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A_c} f(x)d\mu + \int\limits_{X\setminus A_c} f(x)d\mu \geqslant \int\limits_{A_c} f(x)d\mu \geqslant c\mu(A_c).$$

Откуда следует (1.15.14) ⊗

Доказательство. Рассмотрим свойство 1.15.9. Обозначим через

$$A_n = \{x\colon |f(x)| > n\}.$$

Тогда

$$A_0 = \{x\colon |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

Докажем, что $\mu(A_0) = 0$. По неравенству Чебышева имеем

$$\mu(A_{1/n}) \leqslant \frac{1}{1/n}\int\limits_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Значит,

$$\mu(A_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{1/n}) = 0,$$

т. е. $\mu(A_0) = 0$. ⊗

Пример 26. Вычислим интеграл Лебега от функции

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0{,}1] \setminus Q; \\ 1 - x, & x \in [0{,}1] \cap Q. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману, поскольку она разрывна в каждой точке. Однако по мере Лебега f эквивалентна функции g, которая в каждой точке отрезка $[0{,}1]$ равна x^3. Действительно,

$$\mu\big(\{x \in [0{,}1] : f(x) \neq g(x)\}\big) = \mu\big([0{,}1] \cap Q\big) = 0.$$

По свойству 1.15.8

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{[0,1]} g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Пример 27. Вычислим интеграл Лебега от функции f, заданной на отрезке $[0,1]$ следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right) \setminus K,\ n = 1,2,\ldots; \\ e^x, & x \in K; \\ x^2+1, & x \in \left(\frac{1}{3},1\right], \end{cases}$$

где K – канторово множество.

Поскольку $\mu(K) = 0$, то $f \sim g$, где

$$g(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right),\ n = 1,2,\ldots; \\ x^2+1, & x \in \left[\frac{1}{3},1\right]. \end{cases}$$

Значит,

$$I = \int\limits_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{[0,1]} g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{[0,1/3]} g(x)\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{[1/3,1]} g(x)\,\mathrm{d}\mu = I_1 + I_2.$$

На $[0,1/3)$ функция g простая, поэтому

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Big(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{4}{3}.$$

$$I_2 = \int\limits_{1/3}^{1} (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{80}{81}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{4}{3} + \frac{80}{81} = \frac{28}{81}.$$

Задачи

1. Доказать, что неотрицательная функция f суммируема на X тогда и только тогда, когда для всех простых функций $g \in S(X,\mu)$, не превосходящих f, интегралы $\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu$ ограничены равномерно.

2. Пусть $f(x)$ – измеримая функция на X. Определим функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ так:

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\Big[|f(x)| + f(x)\Big], \; f_-(x) = \frac{1}{2}\Big[|f(x)| - f(x)\Big].$$

Доказать, что функция f суммируема на X тогда и только тогда, когда суммируемы функции f_+ и f_-.

3. Пусть X – измеримое пространство с конечной мерой. Доказать, что неотрицательная измеримая функция f суммируема на X тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\big(\{x \in X : f(x) \geqslant 2^n\}\big).$$

4. Вычислить $\int\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]} f(x)\,\mathrm{d}\mu$, если :

1)
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \; x \in Q \cap [0,1], \\ \cos x, \; x \in [0,1] \setminus Q; \end{cases}$$

2)
$$f(x) = \begin{cases} \sinh x, \; \cos x \in Q, \\ \sinh^2 x, \; \cos x \in [0,1] \setminus Q; \end{cases}$$

3)
$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in K, \\ \sin \pi x, x \notin K. \end{cases}$$

5. Чему равен $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in A \cap K \\ x^3, \text{ в остальных точках,} \end{cases}$$

где A неизмеримое множество на $[0,1]$, K – канторово множество.

6. Пусть
$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in K, \\ n, x \in [0,1] \setminus K. \end{cases}$$

Доказать, что $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = 3$.

1.16 Абсолютная непрерывность и σ – аддитивность интеграла Лебега

В предыдущем параграфе мы рассмотрели свойства интеграла Лебега по фиксированному множеству, за исключением свойства 1.15.6. А сейчас зафиксируем суммируемую функцию f и будем рассматривать интеграл Лебега как функцию множества $A \subset X$, т. е.

$$\nu(A) = \int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.16.1}$$

Очевидно, что $\nu(\varnothing) = 0$.

Теорема 1.16.1 (абсолютная непрерывность интеграла). *Если $f(x)$ – суммируемая на множестве A функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, что*

$$\Big|\int\limits_e f(x)\,\mathrm{d}\mu\Big| < \varepsilon$$

для всякого измеримого множества $e \subset A$ такого, что $\mu(e) < \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала f – простая функция, т. е. $f(x) = y_k$, если $x \in A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}$ и $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k), \tag{1.16.2}$$

причем ряд справа сходится абсолютно. Из условия абсолютной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} y_k \mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.16.3}$$

Построим множество $B = \bigsqcup\limits_{k=N(\varepsilon)+1}^{\infty} A_k$, которое измеримо. На множестве $A \setminus B$ функция f будет принимать конечное число значений, поэтому будет ограниченной. Пусть

$$c = \max_{1\leqslant k\leqslant N(\varepsilon)} |y_k| = \max_{x\in A\setminus B} |f(x)| \tag{1.16.4}$$

Выберем $\delta < \varepsilon/2c$. Пусть $e \subset A$ и $\mu(e) < \delta$, тогда с учетом (1.16.2) – (1.16.4) имеем

$$|\nu()e| = \Big|\int\limits_e f(x)\,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int\limits_{e\cap B} f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{(A\setminus B)\bigcap e} f(x)\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{e\cap B} |f|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{(A\setminus B)\bigcap e} |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + c\delta \leqslant \varepsilon.$$

Пусть теперь f – произвольная суммируемая функция. Тогда найдется такая простая функция g, что $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon/2\mu(e)$.

Имеем

$$\Big|\int\limits_e f\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \int\limits_e |g| d\mu + \int\limits_e |f-g|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(e)}\mu(e) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\otimes$

Теорема 1.16.2. *(σ - аддитивность интеграла Лебега) Пусть f – суммируемая функция на множеству A и пусть $A = \bigsqcup\limits_k A_k$, где A_k, $k = 1,2\ldots$ – измеримые множества. Тогда f суммируема на каждом A_k и*

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu, \tag{1.16.5}$$

причем ряд справа сходится абсолютно.

Доказательство. Докажем теорему сначала для простой функции f,, принимающей значения $y_1, y_2, \ldots$. Пусть $B_n = \{x \in A:\ f(x) = y_n\}$, $B_{kn} = \{x \in A_k:\ f(x) = y_n\}$. Тогда $A \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}$ и

$$\begin{aligned}\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n\mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_{kn}) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} y_n\mu(B_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned} \tag{1.16.6}$$

Здесь использовано условие суммируемости функции f, которое обуславливает абсолютную сходимость рядов в цепочке (1.16.6).

В случае произвольной функции f из ее интегрируемости на A вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует простая интегрируемая на A функция g, удовлетворяющая условию

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(A)}. \tag{1.16.7}$$

Рассмотрим разность

$$|I| = \Big| \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu \Big| \leqslant \Big| \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\mu \Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} g(x)\,\mathrm{d}\mu \Big| + \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \int\limits_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_{A_k} g(x)\,\mathrm{d}\mu \Big| = I_1 + I_2 + I_3.$$

Тогда

$$I_1 \leqslant \int\limits_A |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(A)} \mu(A) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$I_2 = 0$, поскольку для простой функции g доказано равенство

$$\int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

и абсолютная сходимость ряда. Учитывая, что g суммируема на каждом A_k и выполнено (1.16.7), получим, что f также суммируема на каждом A_k, поэтому

$$I_3 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(A)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|I| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, т. е. $I = 0$ и ряд (1.16.5) сходится абсолютно. $\otimes$

Следствие 1.16.1. Если f суммируема на измеримом множестве A, то f суммируема на любом подмножестве $B \subset A$.

Справедлива и обратная теорема к теореме 1.16.2.

Теорема 1.16.3. *Пусть измеримое множество* $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *и на каждом* A_k *функция* f *суммируема, причем ряд*

$$\sum_k \int\limits_{A_k} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu \tag{1.16.8}$$

сходится. Тогда функция f *суммируема на* A *и*

$$\int\limits_A f(x) \, \mathrm{d}\mu = \sum_k \int\limits_{A_k} f(x) \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Сначала проведем доказательство для случая простой функции f, принимающей значение y_n на множествах $B_n = \{x \in A\colon f(x) = y_n\}$. Обозначим через $A_{kn} = A_k \cap B_n$, тогда $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_{kn} = B_n$ и

$$\int\limits_{A_k} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu = \sum_n |y_n| \mu(A_{kn}),$$

причем ряд сходится. Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_{kn}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{kn}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Поскольку ряд (1.16.8) сходится абсолютно, то из абсолютной сходимости первого ряда вытекает абсолютная сходимость последнего ряда в цепочке, а это в свою очередь означает, что f суммируема на множестве A, т. е.

$$\int\limits_A f(x) \, \mathrm{d}\mu = \sum_n y_n \mu(B_n).$$

Пусть теперь f – произвольная суммируемая функция, а g такая простая функция, что

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \tag{1.16.9}$$

Тогда

$$\int\limits_{A_k} |g(x)|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A_k} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A_k).$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$, то из сходимости ряда (1.16.8) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |g(x)|\,\mathrm{d}\mu.$$

А это означает, что простая функция g, аппроксимирующая f, является суммируемой. Учитывая (1.16.9), получаем суммируемость исходной функции f на A. $\otimes$

Установленные свойства интеграла как функции множества приводят к следующему результату. Пусть f – неотрицательная функция, суммируемая на пространстве X по мере μ. Рассмотрим функцию

$$\nu(A) = \int\limits_{A} f(x)\,\mathrm{d}\mu, \tag{1.16.10}$$

которая определена для всех измеримых подмножеств $A \subset X$, причем

1. $\nu(A) \geqslant 0,\ \nu(\varnothing) = 0.$
2. Если $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\nu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$.
3. Если $\mu(A) < \delta$, то $|\nu(A)| < \varepsilon$.

Иными словами, интеграл от неотрицательной функции обладает как функция множества всеми свойствами σ - аддитивной меры. Эта мера определена на той же σ - алгебре, что и мера μ.

Задачи

Пусть f – суммируемая на множестве X функция, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых множеств такая, что $\mu(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\int\limits_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu \to 0$ при $n \to \infty$.

1.17 Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Особенно заметны преимущества интеграла Лебега над интегралом Римана, когда мы имеем дело с предельным переходом. В случае интеграла Римана перемена порядка операций интегрирования и перехода к пределу возможна лишь в случае равномерной сходимости последовательности подынтегральных функций. В случае интеграла Лебега такие требования можно ослабить. В основе таких требований лежат три теоремы, на рассмотрении которых мы сейчас остановимся.

Теорема 1.17.1 (Лебег). *Пусть* (X,Σ,μ) *– пространство с мерой. Если последовательность измеримых функций* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится почти всюду к функции* $f(x)$ *и при этом существует суммируемая функция* φ*, такая что для всех* n $|f_n| \leqslant \varphi$*, то* f *– суммируемая функция и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.17.1}$$

Доказательство. По свойству 15.5 интеграла Лебега из неравенства $|f_n| \leqslant \varphi$ вытекает, что f_n суммируемы для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f(x)$, то f измерима и суммируема, поскольку $|f| \leqslant \varphi$. Теперь покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\Big| \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \Big| < \varepsilon.$$

По свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега по ε выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Big| \int\limits_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \Big| < \varepsilon/3, \text{ если } \mu(A) < \delta. \tag{1.17.2}$$

Неравенство (1.17.2) будет также выполняться для f и f_n.

Воспользуемся теоремой Егорова и по $\delta > 0$ построим множество $X_\delta \subset X$, на котором последовательность f_n сходится равномерно и значит существует $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\sup_{x\in X_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(X)} \tag{1.17.3}$$

и $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$. Поэтому роль множества A в (1.17.2) играет $X \setminus X_\delta$.

Итак

$$\Big|\int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \int\limits_{X_\delta} |f_n - f|\,d\mu + \Big|\int\limits_{X\setminus X_\delta} f\,\mathrm{d}\mu\Big| +$$

$$+\Big|\int\limits_{X\setminus X_\delta} f_n\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3\mu(X)}\,\mu(X_\delta) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \varepsilon.$$

в силу (1.17.2) – (1.17.3). $\otimes$

Следствие 1.17.1. Пусть последовательность $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f(x)$ и существует константа $M > 0$, что $|f_n| \leqslant M$, тогда справедливо равенство (1.17.2).

Упражнение 26.

Теорема 1.17.2 (Беппо Леви). *Пусть* (X,Σ,μ) *– пространство с мерой и* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ *– монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций и пусть существует такая константа* $C > 0$*, что*

$$\int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{1.17.4}$$

Тогда почти всюду существует конечный предел

- $f(x) = \lim f_n(x)$;
- f *– суммируемая функция;*
- $\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Не ограничивая общности теорему можно доказывать для последовательности $f_n(x) \geqslant 0$, так как последовательность $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы и является неотрицательной.

Зафиксируем x и рассмотрим числовую последовательность $\big(f_n(x)\big)$, которая монотонно возрастает и ограничена снизу. Покажем, что предел ее почти всюду конечен. Обозначим через E множество, где $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$. Тогда

$$E = \bigcap_N \bigcup_n E_n^{(N)}, \quad E_n^{(N)} = \{x \in X : f_n(x) \geqslant N\}.$$

В силу неравенства Чебышева

$$\mu(E_n^{(N)}) \leqslant \frac{1}{N} \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{C}{N}.$$

Поскольку $E_1^{(N)} \subset E_2^{(N)} \subset \ldots \subset E_n^{(N)}$, то

$$\mu\Big(\bigcup_n E_n^{(N)}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^{(N)}) \leqslant \frac{C}{N},$$

а

$$\mu(E) = \lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^{(N)}) = 0.$$

Следовательно, $\mu(E) = 0$.

Итак, мы доказали, что монотонная последовательность $f_n(x)$ почти всюду имеет конечный предел $f(x)$. Докажем теперь, что функция $f(x)$ суммируема и возможен предельный переход под знаком интеграла (1.17.1). Для этого воспользуемся теоремой 1.17.1. Пусть $\varphi(x) = k, k = 1{,}2, \ldots$, если $x \in A_k$, где

$$A_k = \{x \in X : k - 1 \leqslant f(x) < k\}.$$

Тогда $f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Нужно доказать, что φ суммируема, т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k)$ сходится. Рассмотрим частные суммы этого ряда $\sum\limits_{k=1}^{m} k\mu(A_k)$ и покажем, что они ограничены в совокупности. Обозначим через $B_m = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} A_k$, тогда

$$\sum_{k=1}^{m} k\mu(A_k) = \int\limits_{B_m} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

На множествах B_m $f_n(x) \leqslant \varphi(x) = m$ и поэтому применима теорема Лебега 1.17.1

$$\int\limits_{B_m} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_m} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C.$$

Но $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$ и тогда

$$\int\limits_{B_m} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{B_m} \big(f(x)+1\big)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C + \mu(X).$$

Значит ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k)$ сходится, φ суммируема и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k) = \int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Условие монотонного неубывания функции можно заменить на условие монотонного невозрастания функции. $\otimes$

Следствие 1.17.2. Пусть $\varphi_n(x)$ – последовательность неотрицательных суммируемых функций и пусть числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{1.17.5}$$

сходится. Тогда почти всюду на X сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, т. е.

- $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$;
- $\int\limits_X \varphi(x))\,\mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность частных сумм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ и воспользуемся теоремой 1.17.2. $\otimes$

Замечание 1.17.1. Если условие неотрицательности φ_n не выполнено, то необходимо потребовать, чтобы ряд (1.17.5) сходился абсолютно.

Следствие 1.17.2 дает возможность почленно интегрировать ряд из суммирумых функций при определенных условиях, который сходится почти всюду.

Пример 28. Вычислим $\int\limits_{[0,1]} x^{-1/2}\,\mathrm{d}\mu$ по теореме 1.17.2. Для этого построим монотонно неубывающую последовательность суммируемых функций

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & \text{при } 1/n \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } 0 \leqslant x < 1/n. \end{cases}$$

Тогда f_n – монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций, предел которой почти всюду равен $x^{-1/2}$, кроме того

$$\int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{1/n}^{1} x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2.$$

Поэтому

$$\int\limits_{[0,1]} x^{-1/2}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 2.$$

Упражнение 27. Показать, что теорема 1.16.3 является следствием теоремы Беппо Леви.

Теорема 1.17.3 (Фату). *Пусть (X,Σ,μ) – пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных суммируемых функций на множестве X, обладающая свойствами:*

- $f_n(x) \to f(x)$ *почти всюду на* X;
- $\int\limits_X f_n(x) \leqslant C$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Тогда

- f *суммируема;*
- $\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C$.

Доказательство. Используя последовательности f_n, построим новую последовательность

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x).$$

Функции $\varphi_n(x)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ измеримы, так как

$$A_c = \{x : \varphi_n < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x : f_k(x) < c\},$$

т. е. A_c представляет собой счетное объединение измеримых множеств.

Последовательность $\varphi_n(x)$ монотонно неубывает, $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ и $\varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$. Далее

$$\int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C.$$

Применим к φ_n теорему Беппо – Леви и получим требуемое утверждение. $\otimes$

Замечание 1.17.2. Если последовательность f_n удовлетворяет условиям теоремы Фату, то нельзя утверждать, что

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Пример 29. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2x, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

На $[0{,}1]$ $f_n(x) \to 0$ поточечно и $\int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = 1/2$, но

$$0 = \int\limits_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = 1/2.$$

В общих чертах остановимся на интеграле Лебега по множеству с σ - конечной мерой. В этом случае можно рассматривать интеграл Лебега на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Пусть X – пространство с σ - конечной мерой. По определению σ - конечной меры существует неубывающая последовательность измеримых множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, для которых $\mu(A_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 1.17.1. Измеримая функция f, заданная на множестве с σ - конечной мерой μ, называется *суммируемой* на X, если она суммируема на каждом A_n и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

существует и конечен и не зависит от выбора последовательности A_n. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f и обозначается так $\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Как было показано выше, множество X с σ - конечной мерой может быть представлено в виде счетного объединения попарно непересекающихся множеств X_k, т. е.

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \quad \mu(X_k)<\infty.$$

В этом случае измеримая функция называется суммируемой на X, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{X_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

сходится абсолютно. Интегралом Лебега функции f называется сумма этого ряда, т. е.

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{X_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Замечание 1.17.3. Определение интеграла от простой функции остается справедливым и в пространстве с σ - конечной мерой, однако для суммируемости простой функции необходимо, чтобы каждое отличное от нуля постоянное значение она принимала на множестве конечной меры.

Все свойства, установленные для интегралов Лебега по множеству конечной меры, остаются справедливыми и по множеству σ - конечной меры, включая теоремы о предельном переходе. Однако ограниченная измеримая функция может оказаться не суммируемой. В частности, отличная от нуля константа не суммируема на $\mathbb{R}$.

Пример 30. Пусть $X = [0,\infty)$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X e^{-nx} x^{-1/2}\,\mathrm{d}\mu.$$

Рассмотрим последовательность $f_n(x) = e^{-nx}x^{-1/2}$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ почти всюду для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\varphi(x) = e^{-x}x^{-1/2}$. Функция $\varphi(x)$ интегрируема на X. Учитывая, что $f_n(x) \to 0$ почти всюду, воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе 1.17.1, получим

$$I = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X e^{-nx}x^{-1/2}\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} e^{-nx}x^{-1/2}\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Задачи

1. Пусть измеримая на множестве X функция f ограничена, и пусть существуют такие константы $A > 0$ и $\alpha > 0$, что

$$\mu\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\} < \frac{A}{\varepsilon^\alpha} \text{ для } \varepsilon > 0.$$

Доказать, что функция f суммируема.

2. Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ последовательность интегрируемых функций, сходящихся по мере μ к функции $f : X \to \mathbb{R}$. Доказать, что для любой непрерывной и ограниченной функции φ справедливо равенство

$$\int\limits_X \varphi[f(x)]\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi[f_n(x)]\,\mathrm{d}\mu.$$

3.Вычислить интеграл Лебега по множеству $(0,\infty)$ от функций:
а) $f(x) = e^{-[x]}$; б) $f(x) = \frac{1}{[x+1][x+2]}$; в) $f(x) = \frac{1}{[x]!}$, где $[x]$ – целая часть x.

4. Пусть $(f_n)_{n=1}^\infty$ – последовательность суммируемых на множестве с σ - конечной мерой функций такая, что $f_n \rightrightarrows f$ на X. Всегда ли f суммируема на X.

1.18 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Для простоты изложения рассмотрим эту связь в одномерном случае.

Теорема 1.18.1. *Если для функции, заданной на отрезке* $[a, b]$, *существует собственный интеграл Римана* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *то она суммируема и*

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Построим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для интеграла Римана. Для этого отрезок $[a,b]$ разбиваем на n частей точками деления

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a),\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Пусть

$$M_{nk} = \sup_{x_{k-1} \leqslant x < x_k} f(x), \quad m_{nk} = \inf_{x_{k-1} \leqslant x < x_k} f(x). \tag{1.18.1}$$

Тогда верхняя сумма Дарбу $\overline{S_n}$ и нижняя сумма Дарбу $\underline{S_n}$ определяются равенствами

$$\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} M_{nk}\frac{b-a}{n}, \quad \underline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} m_{nk}\frac{b-a}{n}. \tag{1.18.2}$$

Построим простые функции

$$\begin{aligned} \overline{f_n(x)} &= M_{nk},\ \text{ если } x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ \underline{f_n(x)} &= m_{nk},\ \text{ если } x_{k-1} \leqslant x < x_k. \end{aligned} \tag{1.18.3}$$

Тогда

$$\overline{S_n} = \int\limits_{[a,b]} \overline{f_n(x)}\,\mathrm{d}\mu, \quad \underline{S_n} = \int\limits_{[a,b]} \underline{f_n(x)}\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.18.4}$$

С ростом n отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ в (1.18.1) уменьшается, следовательно, inf уменьшается, поэтому последовательность $\underline{f_n(x)}$ монотонно возрастает, аналогично, последовательность $\overline{f_n(x)}$ монотонно убывает, т. е.

$$\underline{f_n(x)} \leqslant \underline{f_{n+1}}(x), \quad \overline{f_n(x)} \geqslant \overline{f_{n+1}(x)}. \tag{1.18.5}$$

Учитывая, что
$$\underline{f_n(x)} \leqslant f(x), \quad \overline{f_n(x)} \geqslant f(x), \tag{1.18.6}$$
приходим к пределам
$$\lim_{n\to\infty} \underline{f_n(x)} = \underline{f(x)} \leqslant f(x); \quad \lim_{n\to\infty} \overline{f_n(x)} = \overline{f(x)} \geqslant f(x). \tag{1.18.7}$$
Так как
$$|\underline{f_n(x)}| \leqslant \sup_x |f(x)|, \quad |\overline{f_n(x)}| \leqslant \sup_x |f(x)|, \tag{1.18.8}$$
то по теореме Лебега о предельном переходе заключаем, что в (1.18.7) $\underline{f(x)}$ и $\overline{f(x)}$ – суммируемы. Следовательно,
$$\begin{gathered}\int\limits_{[a,b]} \overline{f(x)}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \overline{f_n(x)}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n},\\ \int\limits_{[a,b]} \underline{f(x)}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \underline{f_n(x)}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \underline{S_n}.\end{gathered} \tag{1.18.9}$$
Функция f интегрируема по Риману, поэтому в (1.18.9) правые части совпадают и
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Поэтому из (1.18.7) имеем
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \left(\overline{f_n(x)} - \underline{f_n(x)}\right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{[a,b]} \left(\overline{f(x)} - \underline{f(x)}\right) \mathrm{d}\mu = 0.$$
Тогда $\overline{f(x)} = \underline{f(x)}$ почти всюду. Но из (1.18.6) $\underline{f(x)} \leqslant f(x) \leqslant \overline{f(x)}$ и $f(x) = \overline{f(x)}$ почти всюду. Значит, $f(x)$ – суммируема и $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu$. ⊗

Пусть функция f неограничена на полуинтервале $[a,b)$ и интегрируема по Риману на любом промежутке $[a,b-\varepsilon]$. В этом случае речь идет о несобственном интеграле Римана II рода, который определяется по формуле
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.18.10}$$

если предел существует и конечен.

Несобственный интеграл Римана называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Теорема 1.18.2. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана II рода* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *необходимо и достаточно, чтобы* f *была суммируемой на* $[a,b]$. *При выполнении любого из этих условий имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.18.11}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$. Построим последовательность для любого $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f(x) \cdot \chi_{[a,b-1/n]}(x),$$

которая удовлетворяет условию $|f_n| = |f|_n$, не убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|$ для всех $x \in [a,b)$. Воспользуемся теоремой Беппо Леви и теоремой об эквивалентных функциях, получим

$$\int\limits_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b-1/n]} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{b-1/n} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Отсюда следует, что $\int\limits_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ и f – суммируема.

Достаточность. Рассмотрим последнюю цепочку в обратном порядке. Видно, что из суммируемости функции f вытекает конечность интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Осталось доказать равенство (1.18.11). Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in [a,b)$ и $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$, причем

f суммируема, то, применяя теорему Лебега о предельном переходе, получаем

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b-1/n]} f(x)\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{b-1/n} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\otimes$

Рассмотрим интегрирование по множеству бесконечной меры. Пусть функция определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b]$. Тогда несобственный интеграл Римана по промежутку $[a, +\infty)$ определяется как предел

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.18.12}$$

Если предел в (1.18.12) конечен, то несобственный интеграл называют *сходящимся*; его называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Теорема 1.18.3. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана I рода необходимо и достаточно, чтобы функция f была суммируема на $[a, +\infty)$. При выполнении любого из этих условий имеет место равенство*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,+\infty)} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Пример 31. Выясним, суммируема ли на отрезке [0,1] функция

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

из теоремы 1.18.2 вытекает, что f суммируема, если сходится абсолютно несобственный интеграл Римана II второго рода от функции f.

Покажем, что этот интеграл расходящийся.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\Big|\sin\frac{1}{x}\Big|\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{x} = y\Big] = \int\limits_1^\infty \frac{|\sin y|}{y}\Big|\mathrm{d}y > \int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 y}{y}\Big|\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_1^\infty \frac{1}{2y}\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^\infty \frac{\cos 2y}{y}\,\mathrm{d}y = I_1 + I_2.$$

интеграл I_1 расходится, а I_2 сходится по признаку Дирихле. Следовательно, функция f не суммируема по Лебегу на отрезке [0,1].

Задачи

1. Докажите следующее соотношение:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x, \quad (\alpha > 0).$$

2. При каких значениях параметров α и β функция

$$f(x) = x^\alpha \sin x^\beta, \quad x \in (0,1] :$$

а) суммируема;
б) несобственно интегрируема по Риману?
3. При каких значениях параметров α и β функция

$$f(x) = x^\alpha \cos x^\beta, \quad x \in [1,+\infty) :$$

а) суммируема;
б) несобственно интегрируема по Риману?