Максима Канта и общее математическое образование:
эскиз размышления

Еровенко В.А.
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой общей математики и информатики
Белорусского государственного университета

До древних греков на протяжении многих тысячелетий люди превосходно обходились без дедуктивной математики, вполне удовлетворяясь отысканием работоспособных эмпирических формул. «*Дедукция как образ мыслей*» малообразованным людям даже в те времена не казалась наиболее легким видом мышления. В соответствии с духом древнегреческих общин свободные граждане сообща обсуждали общие дела и чтобы чье-либо мнение было принято, его нужно было доказать и аргументировать. Именно логическая правильность убедительного суждения перешла в математику из сферы общественных отношений. Отсюда – начало дедуктивного метода в математике, приближающемся к современным представлениям о доказательстве.

В процессе доказательства математик не действует в строгом соответствии с канонами дедуктивного метода, так как до появления окончательной уверенности в его справедливости еще неизвестно к каким именно неформализованным начальным предположениям, в конечном счете, сводится это доказательство. Поскольку дедуктивные науки отличаются от остальных в основном способом построения их теорий, а не формой изложения предмета, то по этой причине связывать становление дедуктивного метода исключительно только с математикой вовсе не обязательно. Сложность человеческого мышления не схватывается исключительно нашими дедуктивными способностями. Однако наиболее значимые подходы к анализу мышления связаны, прежде всего, с дедуктивным мышлением и с нашей способностью доказывать теоремы.

Математика – это, прежде всего, точное суждение, которое может выражаться даже без математических формул. Когда же возникла точность мысли, необходимая для мысленных построений, которой было по силам задаваться вопросами относительно «очевидного»? Принято считать, что такого рода «фазовый переход» произошел в сознании Фалеса, запустившего процесс превращения математических приемов и методов в «математику». Собственно говоря, Фалес, которого называют также Фалесом Милетским, поскольку он был родом из города Милета, расположенного на побережье Эгейского моря, через который проходили торговые пути от греческих городов на Восток, был не профессиональным математиком, а купцом. Плавая по Средиземному морю на своих кораблях и занимаясь торговлей, он посвящал свободное время математике.

Фалес был основателем первой в истории цивилизации научной школы – ионийской или милетской, с которой начинается рациональная, то есть основанное на разуме, познание мира. Мировоззрение Фалеса и его последователей выражало интересы конкретных социально-исторических сил в определенных социально-экономических условиях. Тем не менее, величайшей загадкой истории математики останется тот посыл, благодаря которому именно в это время, именно этот математик, философ и купец сделал гениальное открытие. Он обнаружил, что геометрические истины можно добывать не только опытным путем, но и чисто умозрительно. Он одним из первых использовал в математике дедукцию, которая в наше время является основным методом проведения математических рассуждений.

Фалес изобрел понятие «математического доказательства», что предшествовало его другому великому изобретению – «философии». Мы не можем с уверенностью утверждать, что именно явилось решающим фактором для возникновения доказательства. Если бы развитие математики полностью определялось количественным ростом математического знания, то дедуктивный метод должен был возникнуть всюду, в частности, это должно было бы произойти в уникальных культурах Китая и Индии, где математические традиции познания не прерывались даже в Средние века. Тем не менее, математика в этих странах так и не стала абстрактной дедуктивной наукой. Переход к дедуктивному мышлению в математике диктовался в значительной степени тем обстоятельством, что проверка истинности математических утверждений со временем стала наталкиваться на серьезные трудности.

Чем объяснить то, что менее чем за три столетия греки полностью перестроили математику на принципах дедуктивного вывода? Может быть, это произошло благодаря исключительной одаренности греков? Было бы неверно выводить все достижения древнегреческой математики исключительно из личной одаренности ее творцов. Даже такие качества, как сила воображения, прекрасная память, способность к длительному умственному напряжению, сами по себе не могут объяснить эти достижения. На чем же было основано преимущество греческого ума? Тайна их удивительного интеллектуального взлета заключается в сочетании таких противоположностей как богатство творческой фантазии и всегда бодрствующего пытливого сомнения, не отступающего перед могущественными способностями к обобщениям, и аналитическими потребности рассудка.

Для того чтобы такой математический талант смог проявиться, необходимо было также наличие благоприятных внешних условий для проведения математических исследований. Но в силу каких причин подобное совпадение объективного и субъективного факторов оказалось возможным? Наиболее общий и убедительный для всех ответ на этот вопрос пока еще не найден, поскольку в самой математике эти причины отыскать нельзя. Если учесть воздействие мировоззренческого взаимодействия на развитие математики, то можно дать вполне удовлетворительное объяснение на появление потребности доказательства в древнегреческой математике. Греки отличаются от своих предшественников тем, что в их математических и философских исследованиях проявилась вера в силу человеческого разума.

Такой мировоззренческий подход превратился у греческих мыслителей в стимулирующий фактор математического познания, способствовавший дальнейшему прогрессу математики. Хотя математика возникла на Древнем Востоке и Древнем Египте задолго до греков, предпосылки для превращения практической математики в теоретическую науку впервые возникли в VI–V веках до нашей эры в Древней Элладе. Ее второе рождение или возрождение произошло в Европе XVI–XVII веков. Это была математика в нашем современном понимании, общезначимая для всех и не содержащая в себе ничего узко греческого. Очень многие идеи «нового знания» до сих пор восходят к эпохе эллинизма. Эллины ушли, но дух их остался, поэтому современная мировая математика справедливо считает себя правопреемницей математики Древней Греции.

Говоря о мировоззренческих проблемах математики нельзя не прильнуть к источникам философских идей великих мыслителей прошлого. Для философов науки одна из проверенных временем аксиом звучит так: «*Откуда и куда бы ни шел мыслитель по философской дороге, он должен пройти через мост, название которому – Кант*» [1, с.639]. Кант преподавал в университете математику. Задача преподавания математики заключается, прежде всего, в том, чтобы воспитать культурных людей, обладающих «общим математическим образованием», которое трудно поддается формальному определению. Содержание курсов математики не может быть определено только с чисто прагматической точки зрения, основанной исключительно на прикладной специфике будущей специальности, без учета внутренней логики развития нужных разделов математики.

«*Не растрачивайте впустую свои таланты*» – говорил основоположник немецкой классической философии, профессионально интересовавший математикой, Иммануил Кант. Эта «*максима Канта*» интересна для нас, прежде всего, в контексте общего университетского математического образования. Среди разнообразных целей математического образования можно выделить следующие две: во-первых, прагматическую, направленную на потребности применения математики, и, во-вторых, концептуальную, направленную на усиление мировоззренческой роли математики в общем развитии человека. Мировоззрение имеет свою логику развития, в соответствии с которой научное мировоззрение прочно заняло лидирующее положение среди форм общественного сознания.

Воспитание научного мировоззрения, основанного на данных науки, является сложной и ответственной задачей математического образования, которая состоит не только в констатации современных тенденций в применении математических методов в гуманитарном и естественнонаучном знании, но и в их объяснении. Математику относят к фундаментальным наукам, но, чтобы понять это, необходимо продемонстрировать фундаментом чего она является на многочисленных ярких и доступных для понимания примерах. Математику как часть целостной культуры нельзя изучать без тесного взаимодействия с различными интеллектуальными проявлениями человеческой деятельности. Ни в одном из живых европейских языков нет слова-аналога для греческого слова «матема». В переводе с греческого, «*матема*» – *это* «*познание; знание, полученное путем рассуждения; наука*». Знания, обозначаемые этим словом, знаменитый философ Древней Греции и основатель Афинской философской школы Платон считал самыми важными для эллина.

Математика обладает уникальными особенностями и преимуществами, дисциплинируя ум. Математическое остроумие французского ученого и философа Блеза Паскаля было столь велико, а результаты носили столь общий характер, что легко допускали их запись на символическом языке математики. В своем знаменитом философском и этическом труде «Мысли» раздел «Познание математическое и познание непосредственное» он начинал так: «*Начала математического познания отчетливы, но в обыденной жизни неупотребительны, поэтому с непривычки в них трудно вникнуть; зато всякому, кто вникнет, они совершенно ясны, и только совсем уж дурной ум не способен построить правильного рассуждения на основе столь самоочевидных начал*» [2, с.10]. Необходимо сделать поправку на то, что сейчас математические понятия не кажутся столь очевидными, как во времена Паскаля.

Хорошо известно, что Платон, а вслед за ним многие выдающиеся философы прошлого считали математику основой всего философского образования. Согласно Платону, подлинное знание способна дать только философия. Математика для Платона, который хорошо разбирался в математике своего времени, была необходимым условием философии, но не была самой философией. В диалоге «Государство» он утверждал, например, что арифметика по самой своей природе относится, пожалуй, к тому, что непременно ведет человека к размышлению. Именно древние греки провозгласили «могущество разума» величайшим открытием человечества. В соответствии с мировоззренческой установкой античности, человек может постичь тайны природы с помощью своей способности мыслить.

Проницательный Иммануил Кант более двух столетий назад, следуя за древними греками, оценил роль математического мышления в понимании философских законов, управляющих миром. В своем главном труде «Критика чистого разума», который благодаря философской насыщенности и глубине остается актуальным спустя столетия, Кант замечательно сказал: «*Само достоинство математики (этой гордости человеческого разума) основывается на том, что она гораздо больше, чем можно ожидать от опирающейся на обыденный опыт философии, научает разум усматривать в великом и малом порядок и правильность природы…*» [3, с.263]. Это отступление к философской классике мы сделали потому, что Иммануил Кант был первым профессиональным философом, осознавшим значимость проблемы мировоззренческого взаимодействия математики и философии. Но хватит ли у философов и других представителей гуманитарного знания «интеллектуальной смелости» продолжить идти по намеченному им пути?

Интеллектуальные познания еще до Платона отличали от эмпирических фактов. В повседневной суете, мы плохо слышим чистое и возвышенное звучание платоновской «матема», которая означала главный тип знания. Именно такое знание открывает путь в мир мысленных конструкций и моделей, из которых строятся многие предметные знания. Другими словами, оно открывает дорогу в «мир идей», несмотря на то, что эта дорога окутана «философским туманом». Философ поздней античности Плотин утверждал, что если духовный мир заключен в нас самих, то он существует и вне нас. Поэтому, чтобы увидеть в себе духовный мир, надо научиться видеть его за внешней стороной вещей. Выход математики в сферу социальной практики неизбежно приводит к ломке перегородок в сложившейся профессиональной организации науки, а также между гуманитарными и математическими методами познания.

Математика неустранимо вплетена в современную жизнь, поскольку без нее наша повседневная жизнь стала бы почти неузнаваемой. Но не вторгаемся ли мы, как считают некоторые математики и философы, в некий «мир идей», существующий сам по себе, независимо от нас? Обратимся к размышлениям австрийского философа Людвига Витгенштейна, которые проникнуты здоровой иронией и реалистичным взглядом на нашу науку: «*Неужели нельзя представить себе человеческое общество, в котором не существует ни процесса вычислений в нашем смысле, ни измерения в нашем смысле? – Можно. – Зачем же тогда стараться выяснить, что есть математика?*» [4, с.183]. Этот вопрос, считает он, потому нуждается в проработке, «что у нас есть математика и существует ее особое понимание, как бы некий идеал ее положения и функции».

Так можем ли мы убедительно сказать, «*что такое математика?*» Если придерживаться принципа «не требуй слишком многого», то невозможно дать обстоятельный ответ на основе одних лишь философских обобщений или семантических определений, как нельзя дать общее определение поэзии, музыки или живописи. Математики вполне удовлетворены ответом, что это то, чем они занимаются. Философам и методологам науки поверхностный ответ ничего не дает, поэтому, не вдаваясь в этот вопрос чрезмерно, можно «взять за основу» любое из имеющихся определений, которое не претендует на исчерпывающий ответ, а по мере необходимости его можно дополнять и уточнять с учетом новейших достижений математического знания.

Согласно одному из популярных определений, «*математика есть наука, изучающая сходства и различия в области явлений количественного изменения*». Если эти явления получены в результате абстрактных операций к пространственным формам и количественным отношениям действительного мира, то тогда можно говорить о связи между математическими структурами и материальными явлениями, которые характеризуют математику через ее внутренние и внешние факторы. Образовательная практика показывает, что любое общее определение математики не дает ее полного понимания, так как остается много вопросов за рамками общей установки. Например, история математики служит надежным доказательством того, что даже математизация многих областей науки, не подвергающих сомнению реальность окружающего мира, не проходила гладко.

Смысл математизации знаний состоит в том, чтобы из точно сформулированных исходных предпосылок выводить следствия, доступные непосредственному наблюдению, а также с помощью математического аппарата не только описывать установленные факты, но и предсказывать новые закономерности и прогнозировать течение исследуемых явлений. Возможности математизации ограничиваются только сложностью исследуемых явлений. Математизация исследуемого явления предполагает формализацию в широком смысле слова, а соответствующий язык математики – это формализованный язык, со всеми присущими ему достоинствами и недостатками. Фундаментальное разнообразие реального «семантического мира» объясняет неизбежность формализации в математике, хотя в самой математике невозможно исключительно формальное обоснование.

Формальность теории состоит в том, что, максимально отвлекаясь от содержания, с помощью логики она пытается оценить правильность рассуждения, хотя реализовать это полностью никогда не удается. В разных разделах гуманитарного знания назрела задача создания своего собственного математизированного языка для построения аксиоматических теорий. Достоинство языка математических формул состоит в том, что он не выводит нас за пределы записанных с их помощью понятий, хотя он прекрасно приспособлен к получению следствий. Но когда его сила превращается в слабость, вот тогда и приходит на помощь обычный неформализованный язык с его богатством оттенков и возможностей, сохраняющий метафизическую тревогу и интеллектуальное напряжение. Философский идеал формальной системы, который схватывает все интуитивные математические истины, оказался в свете методологических результатов прошлого века недостижимым, так как требовал слишком многого.

Математическая формализация, особенно численная, начинается тогда, когда отвлекаются от смысла, оставляя лишь значения, а так как оттенки смысла недоступны числам, то полная формализация достаточно сложных понятий пока неосуществима. Формализм математического знания встречается гораздо чаще, чем хотелось бы, поэтому столь важно понимать смысл определений, суть теорем и назначение математической теории. Математика заслуженно считается «трудным предметом», поскольку в ней невозможно что-либо сделать без понимания и постоянной работы мысли. Тем не менее, язык математики не должен создавать дополнительных трудностей, поскольку без владения им не может быть уверенности в том, что определенное утверждение не было искажено в процессе рассуждений. Математическая наука с помощью унификации, обобщения и упрощения стремится «сделать сложное простым», поэтому она представляет собой один из самых мощных инструментов познания.

Роль математического образования в таком контексте сводится к выработке понимания того, что в мире идеальных сущностей и абстрактных структур математики можно работать лишь логическими методами. Учитывая взаимодействие математики с различными сферами реальности, математик с мировым именем Рихард Курант метафорически сказал: «*Полет в абстракции должен означать нечто большее, чем просто взлет; отрыв от земли неотделим от возвращения на землю, даже если один и тот же пилот не в состоянии вести корабль через все фазы полета*» [5, с.26]. Эта загадка психологической теории математического познания оставляет пока без объяснения и такие факты математической практики, как «непреложность» исходных математических утверждений и «историческую стабильность» общепризнанных математических доказательств.

Добавим к этому, что ни психология, ни тем более физиология не могут объяснить логики математических рассуждений. Однако когда математики исправляют свои ошибки, то они видят в этом «обогащение, а не обеднение» своей науки, что дает им моральное право смотреть в будущее математики относительно спокойно. Математика полезна философской и социально-гуманитарной практике не только своими моделями явлений, но и строгой логикой рассуждений и умением замечать «прорехи» в рассуждениях. Она полезна не только тем, кто не боится абстракции и любит математику, но даже и для тех, кто все еще боится математики и считает, что не любит абстракций. Математика это не пугающее непосвященных жонглирование числами, а как сказал Давид Гильберт, «*математика это сад, в котором каждый может собрать букет по вкусу*».

Средневековый философ Газали замечательно сказал: «*Всякий, изучающий математику, приходит в такой восторг от точности охватываемых ею наук и ясностей их доказательств, что о философах в широком смысле у него начинает складываться благоприятное мнение…*» Легко восхищаться математикой, но трудно ее любить, так же трудно, как и достойно излагать ее студентам-гуманитариям. Современная математика не дается вместе с университетским дипломом, а шлифуется десятилетиями в контексте расширения общей культуры математического образования, как одного из важнейших приоритетов «интеллектуальной безопасности» и стабильности страны.

Литература

1. **Лишевский В.П.** Кёнигсбергский отшельник // Вестник РАН. – 1999. – Т. 69, № 7. – С. 636–639.

2. **Паскаль Б.** Мысли. – Санкт-Петербург: Изд-во «Азбука», 1999. – 335 с.

3. **Кант И.** Критика чистого разума. – Симферополь: Изд-во «Реноме», 1998. – 528 с.

4. **Витгенштейн Л.** Философские работы. Часть II. Замечания по основаниям математики. – М.: Изд-во «Гнозис», 1994. – 206 с.

5. **Курант Р.** Математика в современном мире // Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967. – С. 13–27.