Воронкина Н.А. О построении общего решения разностного аналога дифференциального уравнения Абеля по известным частным решениям // Труды четвертой международной конференции «Средства математического моделирования», Санкт-Петербург, 23-28 июня 2003, том 10, с. 53-55.

Разностные уравнения

$$(y(k)+b(k))y(k+1)=a_2(k)y^2(k)+a_1(k)y(k)+a_0(k),$$

$$y(k+1)=f_3(k)\cdot y^3(k)+f_2(k)\cdot y^2(k)+f_1(k)\cdot y(k)+f_0(k),$$

переводимые друг в друга дробно–линейными преобразованиями неизвестной функции, аналогичными [1], естественно считать разностными аналогами дифференциального уравнения Абеля.

Многие свойства разностных уравнений аналогичны свойствам дифференциальных уравнений [2–4], ибо последние чаще всего можно получить из разностных уравнений предельным переходом. Но свойства решений дифференциальных уравнений, полученные с использованием гладкости (непрерывности или дифференцируемости) входящих в уравнение функций, на разностные уравнения автоматически распространить нельзя. Тем не менее, некоторые разностные аналоги можно получить, изменив доказательства.

В этой статье будет показано, что, вообще говоря, общее решение разностного аналога дифференциального уравнения Абеля не является функцией конечного числа его независимых частных решений. Тем не менее, при определенных условиях, общее решение разностного аналога дифференциального уравнения Абеля можно представить как функцию его трех частных решений и независимой переменной.

Рассмотрим разностный аналог дифференциального уравнения Абеля

$$y(k+1)=f_3(k)\cdot y^3(k)+f_2(k)\cdot y^2(k)+f_1(k)\cdot y(k)+f_0(k), \quad \text{где } f_3(k)\neq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Пусть $y_1(k), y_2(k) \ldots y_n(k)$ **(*)** – различные частные решения уравнения (1), причем $n\geq 4$. Тогда имеют место следующие тождества

$$y_i(k+1)=f_3(k)\cdot {y_i}^3(k)+f_2(k)\cdot {y_i}^2(k)+f_1(k)\cdot y_i(k)+f_0(k), \quad i=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(2)}$$

Из соотношений (1) и (2) можно получить систему

$$\frac{[y(k+1)-y_1(k+1)]\cdot[y(k)-y_2(k)]-[y(k+1)-y_2(k+1)]\cdot[y(k)-y_1(k)]}{[y_1(k)-y_2(k)]\cdot[y_2(k)-y_3(k)]\cdot[y(k)-y_1(k)]\cdot[y(k)-y_2(k)]}-$$

$$-\frac{[y(k+1)-y_1(k+1)]\cdot[y(k)-y_3(k)]-[y(k+1)-y_3(k+1)]\cdot[y(k)-y_1(k)]}{[y_1(k)-y_3(k)]\cdot[y_2(k)-y_3(k)]\cdot[y(k)-y_1(k)]\cdot[y(k)-y_3(k)]}=$$

$$=\frac{[y(k+1)-y_1(k+1)]\cdot[y(k)-y_2(k)]-[y(k+1)-y_2(k+1)]\cdot[y(k)-y_1(k)]}{[y_1(k)-y_2(k)]\cdot[y_2(k)-y_3(k)]\cdot[y(k)-y_1(k)]\cdot[y(k)-y_2(k)]}-$$

$$-\frac{[y(k+1)-y_1(k+1)]\cdot[y(k)-y_s(k)]-[y(k+1)-y_s(k+1)]\cdot[y(k)-y_1(k)]}{[y_1(k)-y_s(k)]\cdot[y_2(k)-y_s(k)]\cdot[y(k)-y_1(k)]\cdot[y(k)-y_s(k)]},\quad s=\overline{4,n}.$$

(3)

Группируя коэффициенты при $y(k+1), y_i(k+1), i=\overline{1,4}$, получаем соотношение вида

$$\begin{vmatrix} y_1^3 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^3 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^3 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ y_4^3 & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix}\cdot y(k+1)-\begin{vmatrix} y^3 & y^2 & y & 1 \\ y_2^3 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^3 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ y_4^3 & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix}\cdot y_1(k+1)+\begin{vmatrix} y^3 & y^2 & y & 1 \\ y_1^3 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_3^3 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ y_4^3 & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix}\cdot y_2(k+1)-$$

$$-\begin{vmatrix} y^3 & y^2 & y & 1 \\ y_1^3 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_3^3 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ y_4^3 & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix}\cdot y_3(k+1)+\begin{vmatrix} y^3 & y^2 & y & 1 \\ y_1^3 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^3 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^3 & y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\cdot y_4(k+1)=0. \qquad \textbf{(4)}$$

Коэффициенты в уравнении (4) –определители Вандермонда, поэтому (4) имеет место тогда и только тогда, когда по меньшей мере два из частных решений $y_1(k), y_2(k)...y_n(k)$ совпадают, что противоречит условию (*).

Таким образом, доказана

<u>Теорема.</u> Общее решение уравнения (1) при $n\geq 4$ не может быть функцией его независимых частных решений.

Теперь покажем, что при определенных условиях общее решение разностного аналога дифференциального уравнения Абеля (1) можно представить в виде

$$F(k, y, y_1, y_2, y_3)=c. \qquad \textbf{(5)}$$

Пусть $y_1(k), y_2(k), y_3(k)$ – различные частные решения уравнения (1), такие, что

$$\frac{y_2(k)-y_1(k)}{y_3(k)-y_2(k)}=a,\ a=const,\ a\neq 0. \qquad \textbf{(6)}$$

Обозначим $P(k,y)=(y(k)-y_1(k))\cdot(y(k)-y_2(k))\cdot(y(k)-y_3(k))$. Тогда,

$$\frac{y(k+1)}{P(k,y)}=\frac{f_3(k)\cdot y^3(k)+f_2(k)\cdot y^2(k)+f_1(k)\cdot y(k)+f_0(k)}{P(k,y)}. \qquad \textbf{(7)}$$

Разложим каждую из дробей на сумму простейших дробей

$$\frac{y(k+1)}{P(k,y)}=\left\{\frac{A(k)}{y(k)-y_1(k)}+\frac{B(k)}{y(k)-y_2(k)}+\frac{C(k)}{y(k)-y_3(k)}\right\}\cdot y(k+1),$$

$$\frac{f_3(k)\cdot y^3(k)+f_2(k)\cdot y^2(k)+f_1(k)\cdot y(k)+f_0(k)}{P(k,y)}=f_3(k)+\frac{D(k)}{y(k)-y_1(k)}+\frac{E(k)}{y(k)-y_2(k)}+\frac{F(k)}{y(k)-y_3(k)},$$

где коэффициенты $A(k), B(k), C(k), D(k), E(k), F(k)$ определяются однозначно методом неопределенных коэффициентов.

Следовательно, из уравнения (7), получаем

$$\frac{y(k+1)-y_1(k+1)}{y(k)-y_1(k)}-(a+1)\cdot\frac{y(k+1)-y_2(k+1)}{y(k)-y_2(k)}+$$

$$\textbf{(8)}$$

$$+a\cdot\frac{y(k+1)-y_3(k+1)}{y(k)-y_3(k)}=f_3(k)\cdot(y_1(k)-y_2(k))\cdot(y_1(k)-y_3(k)).$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) может быть представлено в виде функции трех его частных решений и независимой переменной *k* лишь при наличии определенной функциональной зависимости между *k*, $y_1(k)$, $y_2(k)$, $y_3(k)$.

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576с.
2. Брызгалова Н.А., Самодуров А.А., Санюкевич А.В. Один из способов представления решения нелинейного разностного уравнения *p*-го порядка//Вестник Брестского государственного технического университета. Научно–теоретический журнал. Физика, математика, химия, 2001, №5, с.64-66.
3. N. Brizgalova, A. Samodurov. A method of reduction of a linear difference equation// Труды третьей международной конференции «Средства математического моделирования», Санкт–Петербург, 18-23 июня 2001. Изд-во СПбГТУ. Санкт–Петербург, 2001, с.9-11.
4. Горбузов В.Н., Самодуров А.А. Уравнения Риккати и Абеля. Учебное пособие по спецкурсу. Гродно: ГрГУ, 1986. – 101с.