УДК 517.954

ОСЛАБЛЕННОЕ НА ОСИ КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКОЙСМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

Н. И. Юрчук, В. И. Яшкин, Чарие Коку

В цилиндре $Q = G \times (0,T)$, $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : r = |x| < R\}$, рассматривается центрально-симметрическая по пространственным переменным смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) + b(r,t)\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} +$$

$$+c(r,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + q(r,t)u(x,t) = 0,\ (x,\,t) \in Q\ , \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(r)\,, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(r)\,, \quad 0 \le r \le R\,, \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \le t \le T\,, \tag{3}$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\Gamma = \{(x,t) \in \overline{Q} : r = R\}$ – боковая поверхность цилиндра.

Природа центральной симметрии задачи по пространственным переменным проявляется в форме зависимости начальных функций φ и ψ и коэффициентов уравнения (1) от x, в операторе Лапласа и в геометрии области Q. В работе [1, с.326, 327] для задачи Коши вида (1), (2) при $b \equiv c \equiv q \equiv 0$ показано, что фокусировка особенностей в точке $r = 0$ вынуждает наложить требования $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$, чтобы обеспечить существование классического решения.

Аналогичные примеры были построены другими авторами (например, [2, с. 213], [3, с. 247, 251 – 254]). В них условия на гладкость функций φ и ψ для существования классического решения формулировались в разных классах, но не могли быть доведены до необходимых. Чтобы условия на гладкость функций φ и ψ для существования решения совпали с необходимыми, понадобилась модификация (см. [4]) самого понятия классического решения, в котором вместо непрерывности допускался некоторый рост вторых производных при $|x| \to 0$. Сформулируем здесь это определение и основной результат из [4].

Определение. Ослабленным на оси $r = 0$ классическим решением задачи (1) – (3) будем называть функцию

$$u \in C^1\left(\overline{Q}\right) \cap C^2\left(\overline{Q} \setminus \{\ 0\} \times [0,T]\right),$$

обращающую уравнение (1) в тождество в цилиндре $\overline{Q} \setminus \{0\} \times [0,T]$ с выколотой осью, удовлетворяющую условиям (2), (3) в обычном смысле и условиям

$$\lim_{|x|\to 0} |x| \Delta\, u(x,t) = 0\ , \quad \lim_{|x|\to 0} \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} = 0 \tag{4}$$

на оси $r = 0$.

Понятие ослабленного на оси $r = 0$ классического решения оказалось удачным, и в работе [4] было доказано, что если коэффициенты b, c, q уравнения (1) непрерывны в Q, их производные $\partial b / \partial r, \partial c / \partial r, \partial q / \partial r$ ограничены в $\overline{Q}$, а коэффициент b удовлетворяет условию согласования $b(R, t) = 0$, тогда для существования ослабленного на оси $r = 0$ классического решения необходимо и достаточно, чтобы начальные функции φ и ψ удовлетворяли условиям

$$\varphi(r) \in C^1[0,R] \cap C^2(0,R],\ \varphi(R) = \Delta_r \varphi(R) = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} r\,\Delta_r \varphi(r) = 0, \qquad \left(\Delta_r\, \varphi = \frac{d^2\varphi}{d\,r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\,\varphi}{d\,r}\right), \tag{5}$$

$$\psi(r) \in C\ [0,R] \cap C^1(0,R], \qquad \psi(R) = 0, \qquad \lim_{r\to 0} r \frac{d\,\psi}{d\,r} = 0 . \tag{6}$$

Целью настоящей работы является получение аналогичных результатов для ослабленного на оси классического решения в пространствах Гельдера в случае, когда в уравнении (1) $b=c=0$. В случае $q=0$ эти результаты докладывались на VI конференции математиков Беларуси [5]. Напомним, что функция $f \in C_{\alpha}^{m}(\Omega)$ принадлежит пространству Гельдера $C_{\alpha}^{m}(\Omega)$ с показателем $0<\alpha\le 1$, если для любых точек $x', x'' \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial^m f(x'')}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} - \frac{\partial^m f(x')}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right| \le C |x''-x'|^{\alpha},$$

где $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=m,$ постоянная C не зависит от x', x''.

В задаче (1) – (3) перейдем к сферическим координатам. Так как ослабленное на оси $|x|=r=0$ классическое решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1) – (3) единственно, а данные задачи обладают по x центральной симметрией, то это решение также будет обладать центральной симметрией по x, т.е. $u(x,t)=u(r,t)$. В результате в прямоугольнике $\overline{Q}=[0,R]\times[0,T]$ с учетом того, что в уравнении (1) $b=c=0$, для функции $u(r,t)$ получим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} - \Delta_r u(r,t) + q(r,t)u(r,t)=0, \tag{7}$$

$$u(r,0)=\varphi(r), \quad \frac{\partial u(r,0)}{\partial t}=\psi(r), \quad 0\le r\le R, \quad u(R,t)=0. \tag{8}$$

Условия (4) примут вид

$$\lim_{r\to 0} r\Delta_r u(r,t)=0, \qquad \lim_{r\to 0} r\frac{\partial u^2(r,t)}{\partial r\partial t}=0. \tag{9}$$

Теорема. Предположим, что производная $\dfrac{\partial q(r,t)}{\partial r}\in C_{\alpha}(\overline{Q})$ и обращается в нуль при $r\to 0$ и $r\to R$ как r^{α} и $(R-r)^{\alpha}$ соответственно. Тогда для того чтобы ослабленное на оси $|x|=r=0$ классическое решение задачи (7), (8) существовало, принадлежало пространству Гельдера $C_{\alpha}^{2}\left(\left(0,R\right]\times\left[0,T\right]\right)$ и удовлетворяло условиям

$$\sup_{\substack{0\le r\le R\\0\le t\le T}}\left|r^{1-\alpha}\Delta_r u(r,t)\right|<\infty,\qquad \sup_{\substack{0\le r\le R\\0\le t\le T}}\left|r^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial t}\right|<\infty \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы функции φ и ψ удовлетворяли условиям (5), (6), принадлежали пространствам Гельдера $\varphi\in C_{\alpha}^{2}\left(0,R\right]$, $\psi\in C_{\alpha}^{1}\left(0,R\right]$ и удовлетворяли условиям

$$\sup_{0\le r\le R}\left|r^{1-\alpha}\Delta_r\varphi(r)\right|<\infty,\quad \sup_{0\le r\le R}\left|r^{1-\alpha}\psi'(r)\right|<\infty. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость устанавливается непосредственно.

Достаточность. Как уже отмечалось выше, в работе [4] показано, что если функции φ и ψ удовлетворяют условиям (5), (6), то существует ослабленное на оси $|x|=r=0$ классическое решение задачи (7), (8) в виде $u(r,t)=\dfrac{v(r,t)}{r}$, где функция $v(r,t)$ – классическое решение следующей смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2}+q(r,t)v(r,t)=0,\quad (r,t)\in(0,R)\times(0,T), \tag{12}$$

$$v(r,0)=\Phi(r)=r\varphi(r),\quad \frac{\partial v(r,0)}{\partial t}=\Psi(r)=r\psi(r),\quad 0\le r\le R, \tag{13}$$

$$v(0,t)=0,\ v(R,t)=0, \tag{14}$$

для которого справедливо представление

$$v(r,t)=\frac{\tilde{\Phi}(r+t)+\tilde{\Phi}(r-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t}\tilde{\Psi}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{r-(t-\tau)}^{r+(t-\tau)}\tilde{q}(\xi,\tau)\,\tilde{v}(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \tag{15}$$

Здесь символами $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ обозначены продолжения функций Φ,Ψ с отрезка $[0,R]$ сначала нечетным образом на $[-R,R]$, а затем 2R-периодически на всю прямую. Аналогично символом $\tilde{v}$ обозначено нечетное 2R-периодическое продолжение по переменной r функции v с прямоугольника $\overline{Q}$ на $\mathbb{R}\times[0,T]$. Коэффициент q продолжен по переменной r четным образом с $\overline{Q}$ на $[-R,R]\times[0,T]$, а затем 2R-периодически по r на всю полосу $\mathbb{R}\times[0,T]$. Это четное 2R-периодическое по r продолжение функции q обозначено через $\hat{q}$.

Так как $\Phi\in C^2[0,R]$, $\Psi\in C^1[0,R]$, $\varphi\in C^2_\alpha(0,R]$, $\psi\in C^1_\alpha(0,R]$ и выполняются условия (11), то $\tilde{\Phi}\in C^2_\alpha(\mathbb{R}),\tilde{\Psi}\in C^1_\alpha(\mathbb{R})$. Кроме того, последнее слагаемое в правой части равенства (15) принадлежит $C^2_\alpha(\mathbb{R}\times[0,T])$. Следовательно, из (5) следует, что $v\in C^2_\alpha(\overline{Q})$.

Воспользуемся представлением (15) и докажем, что функция $u(r,t)=v(r,t)/r\in C^2_\alpha((0,R]\times[0,T])$ и удовлетворяет условиям (10).

Так как $v\in C^2_\alpha(\overline{Q})$, то $u\in C^2_\alpha((0,R]\times[0,T])$. Докажем теперь, что выполняются условия (10). Из представления решения (15) следует, что

$$\left|r^{1-\alpha}\Delta_r u(r,t)\right|=\left|\frac{1}{r^\alpha}\frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2}\right|\le\left|\frac{\tilde{\Phi}''(t+r)-\tilde{\Phi}''(t-r)}{2r^\alpha}\right|+\left|\frac{\tilde{\Psi}'(t+r)-\tilde{\Psi}'(t-r)}{2r^\alpha}\right|+$$

$$+\frac{1}{2r^\alpha}\int_0^t\left|\frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{q}(r+(t-\tau),\tau)\tilde{v}(r+(t-\tau),\tau)\right]-\frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{q}(r-(t-\tau),\tau)\tilde{v}(r-(t-\tau),\tau)\right]\right|d\tau. \quad (16)$$

$$\left|r^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r\,\partial t}\right|=\frac{1}{r^\alpha}\left|\frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r\;\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,t)}{\partial t}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\tilde{\Phi}''(t+r)+\tilde{\Phi}''(t-r)}{2r^\alpha}-\frac{\tilde{\Phi}'(t+r)-\tilde{\Phi}'(t-r)}{2r^{1+\alpha}}\right|+$$

$$+\left|\frac{\tilde{\Psi}'(t+r)+\tilde{\Psi}'(t-r)}{2r^\alpha}-\frac{\tilde{\Psi}(t+r)-\tilde{\Psi}(t-r)}{2r^{1+\alpha}}\right|+$$

$$
+\frac{1}{2r^{\alpha}}\int_{0}^{t}\left|\frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{q}\left(r+(t-\tau),\tau\right)\tilde{v}\left(r+(t-\tau),\tau\right)+\hat{q}\left(r-(t-\tau),\tau\right)\tilde{v}\left(r-(t-\tau),\tau\right)\right]-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{r}\left[\hat{q}\left((t-\tau)+r,\tau\right)\tilde{v}\left((t-\tau)+r,\tau\right)+\hat{q}\left((t-\tau)-r,\tau\right)\tilde{v}\left((t-\tau)-r,\tau\right)\right]\right|d\tau. \qquad (17)
$$

Так как $\tilde{\Phi}\in C_{\alpha}^{2}(\mathbb{R})$, $\tilde{\Psi}\in C_{\alpha}^{1}(\mathbb{R})$ и $\hat{q}\,,\tilde{v}\in C_{\alpha}^{1}(\mathbb{R}\times[0,T])$, то воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получим при малых r

$$
\tilde{\Phi}'(t\pm r)=\tilde{\Phi}'(t)\pm\tilde{\Phi}''(t)r+\Theta_1(t,r^{\alpha}),\ \tilde{\Psi}(t\pm r)=\tilde{\Psi}(t)\pm\tilde{\Psi}'(t)r+\Theta_2(t,r^{\alpha}),
$$

$$
\hat{q}\left((t-\tau)\pm r,\tau\right)\tilde{v}\left((t-\tau)\pm r,\tau\right)=\hat{q}\left((t-\tau),\tau\right)\tilde{v}\left((t-\tau),\tau\right)\pm
$$

$$
\pm\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{q}\left((t-\tau),\tau\right)\tilde{v}\left((t-\tau),\tau\right)\right]r+\Theta_3(t,r^{\alpha}), \qquad (18)
$$

где

$$
\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le r\le R}}\frac{\Theta_i(t,r^{\alpha})}{r^{\alpha}}\le C\,,\ i=1,2,3. \qquad (19)
$$

Следовательно, из (17) и (16) в силу (18) и (19) вытекает условие (10).

Теорема доказана.

Литература

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. – М., 1954.
2. Годунов С. К. М. Уравнения математической физики. – М., 1971.
3. Бесов О.В. // Сибирский матем. журнал. Т.8, 1967. – С. 243–256.
4. Юрчук Н.И., Яшкин В.И. // Вестн. Белорус. ун–та. Сер.: Физ. Мат. Мех. №3, 1991. – С. 59–63.
5. Юрчук Н.И., Яшкин В.И. // Тез. докл. VI конф. матем. Беларуси. Ч. 2. 29 сентября – 2 октября 1992 года, Гродно, 1992. – С. 37.