

Брызгалова Н.А., Самодуров А.А., Санюкевич А.В. Один из способов представления решения нелинейного разностного уравнения p -го порядка//Вестник Брестского государственного технического университета. Научно–теоретический журнал. Физика, математика, химия, 2001, №5, с.64-66.

Будем искать решение уравнения

$$x(n+p) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+p-1)). \quad (1)$$

в виде
$$x(n) = \sum_{j=1}^p c_j(n) x_j(n), \quad (2)$$

где $c_1(n), \dots, c_p(n)$ - линейно-независимые решения уравнения (1).

Предположим, что функции $x_i(n)$ определяются системой

$$\Delta x_i(n) = f_i(n, x_1(n), \dots, x_p(n), c_1(n), \dots, c_p(n)), \quad (i = \overline{1, p}) \quad (3)$$

где функции f_i будут определены системой

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p c_j(n+1) f_j(n, x_1(n), \dots, x_p(n), c_1(n), \dots, c_p(n)) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p c_j(n+2) f_j(n, x_1(n), \dots, x_p(n), c_1(n), \dots, c_p(n)) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p c_j(n+3) f_j(n, x_1(n), \dots, x_p(n), c_1(n), \dots, c_p(n)) &= 0, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^p c_j(n+p-1) f_j(n, x_1(n), \dots, x_p(n), c_1(n), \dots, c_p(n)) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p c_j(n+p) f_j(n, x_1(n), \dots, x_p(n), c_1(n), \dots, c_p(n)) &= F(n), \end{aligned} \quad (4)$$

где
$$F(n) = f(n, \sum_{j=1}^p c_j(n) x_j(n), \sum_{j=1}^p c_j(n+1) x_j(n), \dots, \sum_{j=1}^p c_j(n+p-1) x_j(n)) -$$

$$- \sum_{j=1}^p x_j(n) f(n, c_j(n), c_j(n+1), \dots, c_j(n+p-1)).$$

Если известны функции $c_j(n)$, то мы можем найти функции f_j из системы p линейных уравнений (4). Решая эту систему получим

$$f_j(n, x_1(n), \dots, x_p(n), c_1(n), \dots, c_p(n)) = (-1)^{i+1} \frac{W_j}{W} F(n),$$

где

$$W = \begin{vmatrix} c_1(n+1) & \dots & c_p(n+1) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_1(n+p) & \dots & c_p(n+p) \end{vmatrix}, \text{ а } W_j \text{ получается из } W \text{ вычеркиванием } j\text{-го столбца и}$$

последней строки.

Пример 1. Рассмотрим следующее разностное уравнение второго порядка

$$x(n+2) + \frac{2}{n} x^2(n+1) + f(n)x(n) = 0. \quad (5)$$

Если $c_1(n), c_2(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (5), то решение уравнения (5) имеет вид

$$x(n) = c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n),$$

где $\Delta x_i(n)$ ($i=1,2$) находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n) = \frac{2c_2(n+1)P(n)}{nW}, \quad \text{где}$$

$$\Delta x_2(n) = -\frac{2c_1(n+1)P(n)}{nW},$$

$$P(n) = [c_1(n+1)x_1(n) + c_2(n+1)x_2(n)]^2 - x_1(n)(c_1(n+1))^2 - x_2(n)(c_2(n+1))^2,$$

$$W = c_1(n+1)c_2(n+2) - c_1(n+2)c_2(n+1).$$

Пример 2. $x(n+3) + x(n)x(n+2) - x^2(n+1) + 1 = 0. \quad (6)$

Если $c_1(n), c_2(n), c_3(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (6), то решение имеет вид

$$x(n) = c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n) + c_3(n)x_3(n),$$

где $\Delta x_i(n)$ ($i=\overline{1,3}$) находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n) = \frac{W_1}{W} G(n),$$

$$\Delta x_2(n) = -\frac{W_2}{W} G(n),$$

$$\Delta x_3(n) = \frac{W_3}{W} G(n),$$

$$\begin{aligned} G(n) = & -(c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n) + c_3(n)x_3(n)) \cdot (c_1(n+2)x_1(n) + c_2(n+2)x_2(n) + c_3(n+2)x_3(n)) - \\ & -(c_1(n+1)x_1(n) + c_2(n+1)x_2(n) + c_3(n+1)x_3(n))^2 + x_1(n)[c_1(n)c_1(n+2) - (c_1(n+1))^2 + 1] + \\ & + x_2(n)[c_2(n)c_2(n+2) - (c_2(n+1))^2 + 1] + x_3(n)[c_3(n)c_3(n+2) - (c_3(n+1))^2 + 1] \end{aligned}$$