

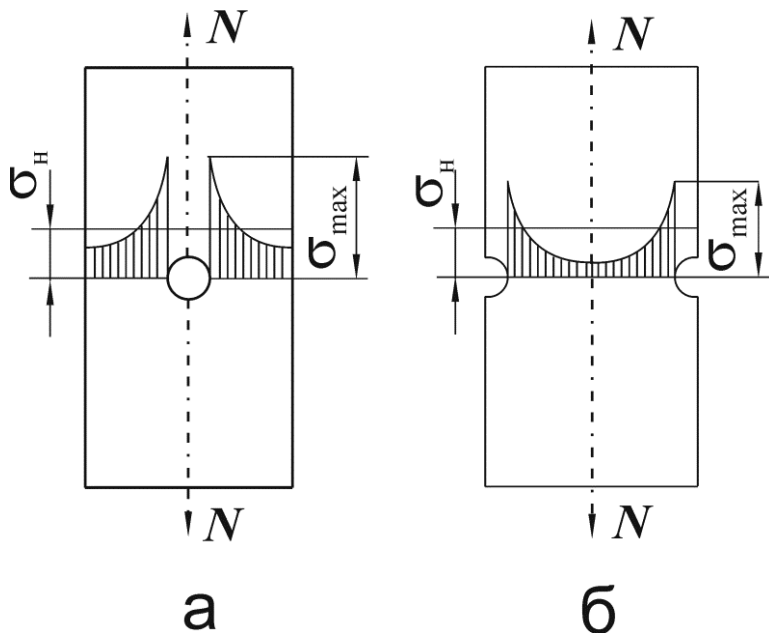
**Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической и прикладной механики**

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Тема 7. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ
МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ**



Концентрация напряжений — местное повышение напряжений в элементах конструкций, обусловленное резкими переходами в поперечных сечениях, связанными с наличием отверстий, выкружек, канавок, надрезов и т.п., называемых **концентраторами**. На рисунке 7.1 показаны графики распределения напряжений в сечении растягиваемой полосы, ослабленной круглым отверстием (рисунок 7.1 а) и полукруглыми выкружками или галтелями (рисунок 7.1 б).



Степень концентрации напряжений характеризуется так называемым **коэффициентом концентрации**

(7.1)

где $\sigma_{\max}$ — максимальное напряжение в месте концентрации, σ_n — номинальное напряжение.

Рисунок 7.1 — Характерные концентраторы напряжений



7.2. НОМИНАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ



Номинальное напряжение, определяется по формуле

(7.2)

Здесь N — нормальная сила в ослабленном сечении; $F_{\min}$ — площадь ослабленного сечения, называемая **площадью нетто**.

Иногда номинальное напряжение определяют по формуле

(7.3)

где $F_{бр}$ — площадь сплошного сечения (без учёта ослабления её наличием концентратора), или **площадь брутто**.

При концентраторах, занимающих незначительную часть сечения (например при малых отверстиях), номинальные напряжения, определяемые по формулам (7.2) и (7.3), практически будут одинаковыми.

Коэффициент концентрации, вычисленный по формуле (7.1), называется **теоретическим коэффициентом концентрации**.



7.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ

4

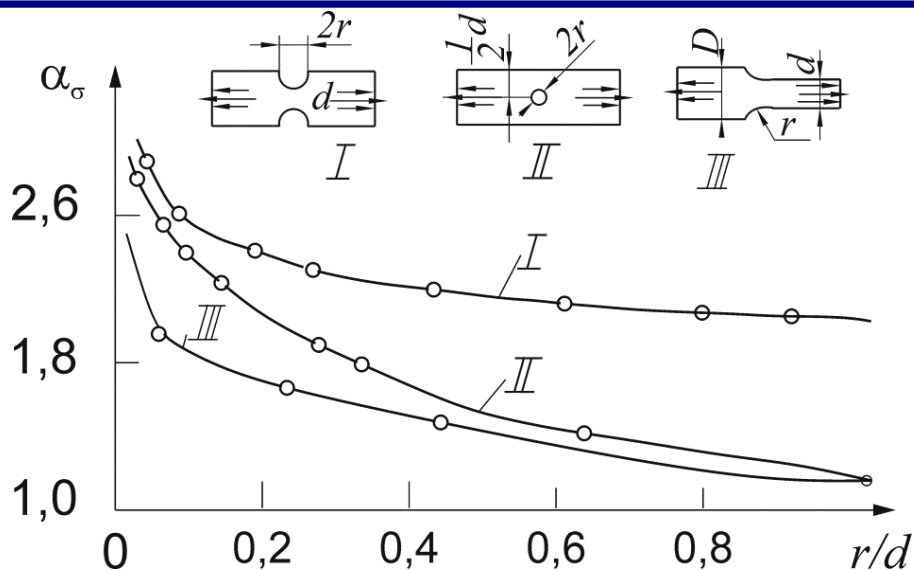


Рисунок 7.2 — Коэффициенты концентрации для полосы прямоугольного поперечного сечения

Теоретический коэффициент концентрации, круглого (рисунок 7.1 а)

коэффициент случае малого отверстия

а в случае полукруглых вырезов (рисунок 7.1 б)

В действительности коэффициент концентрации реальных элементов конструкций, так называемый **эффективный коэффициент концентрации k** , определяемый экспериментально оказывается меньше теоретического ()

Обычно расчёты на прочность с учётом концентрации напряжений проводят на основании знаний величин теоретических коэффициентов концентрации, значения которых для случая растяжения полосы и круглых сечений и круглых стержней с различной формой концентраторов приведены на рисунке 7.2 и в таблице 7.1.



7.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ



Таблица 7.1

Вид концентратора напряжений	α
Полукруглая выточка при отношении радиуса к диаметру стержня	
0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1
Галтель, при отношении радиуса галтели к диаметру стержня	
0,0625	1,75
0,125	1,50
0,25	1,20
0,5	1,10
Переход под прямым углом	2,0
Острая V-образная выточка	3,0
Нарезка дюймовая	2,0
Нарезка метрическая	2,5
Отверстие, при отношении диаметра отверстия к диаметру стержня от 0,1 до 0,33	2,0
Риски от резца на поверхности изделия	1,2-1,4

Определив расчётом номинальное напряжение и зная коэффициент концентрации напряжений для данного концентратора, находят максимальное напряжение в месте концентрации:

(7.4)



7.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ



При конструировании на прочность деталей машин следует по возможности избегать глубоких выточек, выкружек, резких переходов сечений, около которых возникает концентрация напряжений, способствующая в известных условиях преждевременному разрушению материала. Следует стремиться к тщательной обработке поверхностей деталей, особенно изготовленных из высокопрочных закалённых сталей. Даже мелкие следы от шлифовального круга могут снизить предел прочности твердозакалённой стали при растяжении на 10-20%.

Совместный учёт геометрии концентратора и свойств материалов осуществляется так называемыми **эффективными (действительными) коэффициентами концентрации** напряжений, которые определяют, испытывая образцы из данного материала до разрушения. Они представляют собой отношения предельной нагрузки образца без концентратора напряжений к предельной нагрузке такого же образца с концентратором напряжений. При статической нагрузке :

(7.5)

где P_1 — разрушающая нагрузка образца без концентратора напряжений;
 P_2 — разрушающая нагрузка образца с концентратором напряжений.



7.4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ



Механика разрушения, или *механика распространения трещин*, как составная часть науки о механике деформируемого твёрдого тела изучает законы разделения твёрдых тел на части под действием напряжений.

Возможно частичное и полное разрушение тела. Различают *хрупкое и вязкое (пластическое)* разрушение. Однако эти виды разрушения могут проявляться одновременно или последовательно, начинаясь, например, с пластического и переходя затем в хрупкое.

Хрупкое разрушение происходит в результате быстрого распространения трещины после незначительной пластической деформации или без неё. В последнем случае разрушение называют *идеально хрупким*.

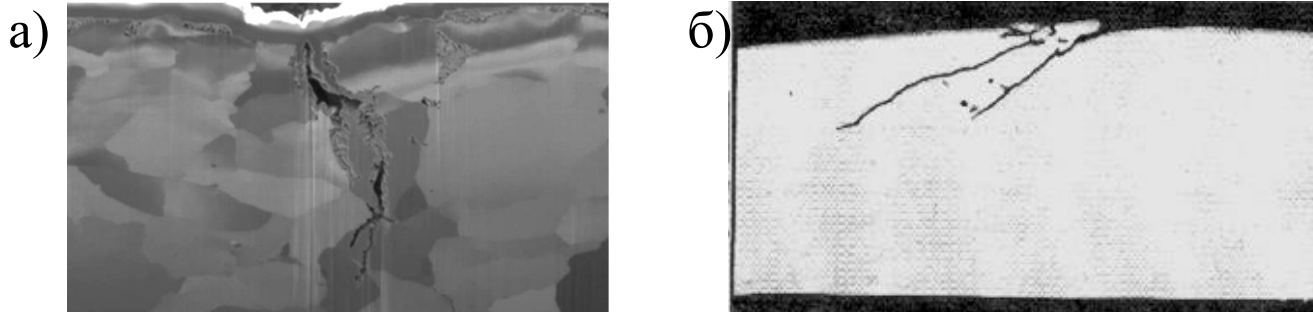


Рисунок 7.3 – Трещины а) в трубе в коррозионной среде,
б) под поверхностью контакта при качении



7.4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ



При хрупком разрушении скорость распространения трещины велика и составляет 0,2-0,5 скорости звука, а излом имеет кристаллический вид. Различают также *квазихрупкое* разрушение, при котором наблюдается некоторая пластическая зона перед краем трещины.

Скорость распространения трещины практически того же порядка, что и при хрупком разрушении, и излом также является кристаллическим.

Вязкое разрушение происходит после существенной пластической деформации, протекающей по всему (или значительному) объёму тела и является результатом исчерпания способности материала сопротивляться пластической деформации. **Скорость распространения трещины мала**, не превышает 0,05 скорости звука, излом имеет волокнистый вид.

Особо выделяют постепенное развитие трещины при **повторно-переменном циклическом нагружении**. Такому усталостному разрушению предшествует накопление в материале необратимого повреждения.



Впервые условия развития единичной сквозной трещины в пластине бесконечной длины и единичной толщины, находящейся в условиях линейного напряженного состояния рассмотрел **Гриффитс** (рисунок 7.4).

Ставится задача установить, при каком значении внешнего напряжения σ , приложенного к концам пластины на бесконечности, трещина с начальной длиной $2l$ станет неустойчивой, т. е. начнет быстро распространяться при неизменном σ .

Рисунок 7.4 —
Трещина в пластине
бесконечной длины



Вычисляем освобождаемую потенциальную энергию деформации пластины W при образовании в ней трещины длиной $2l$ с использованием решения плоской задачи теории упругости о растяжении полосы с эллиптическим отверстием.

Для плоского напряженного состояния

(7.6)

Для плоской деформации

(7.7)

где E — модуль упругости материала; μ — коэффициент Пуассона.

Введя поверхностную энергию Γ для образовавшихся двух свободных поверхностей трещины аналогично энергии поверхностного натяжения для жидкости

(7.8)

где γ_{II} — **удельная поверхностная энергия материала**, определяемая экспериментально.

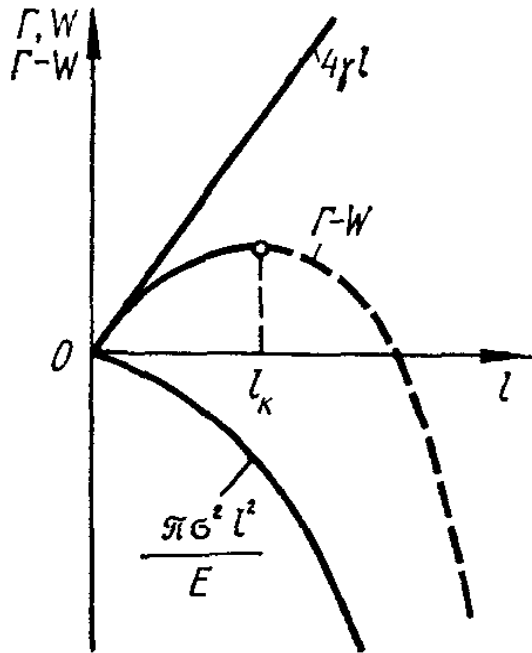


Рисунок 7.5 —
Зависимость энергий
от длины трещины

Можно определить энергию, необходимую для распространения трещины.

(7.9)

Очевидно, если с увеличением длины трещины l не возрастает значение энергии W или ее значение уменьшается, то **трещина распространяется самопроизвольно**.

Приравняв из (7.9) производную от ΔW по l нулю с учетом (7.6)-(7.8), можно определить кинетическое напряжение (**формула Гриффитса**):

для плоского
напряженного
состояния

(7.10)

для плоской
деформации

(7.11)

при котором происходит самопроизвольный, без совершения дополнительной работы внешними силами, рост имеющейся в теле трещины критической длиной l_k .

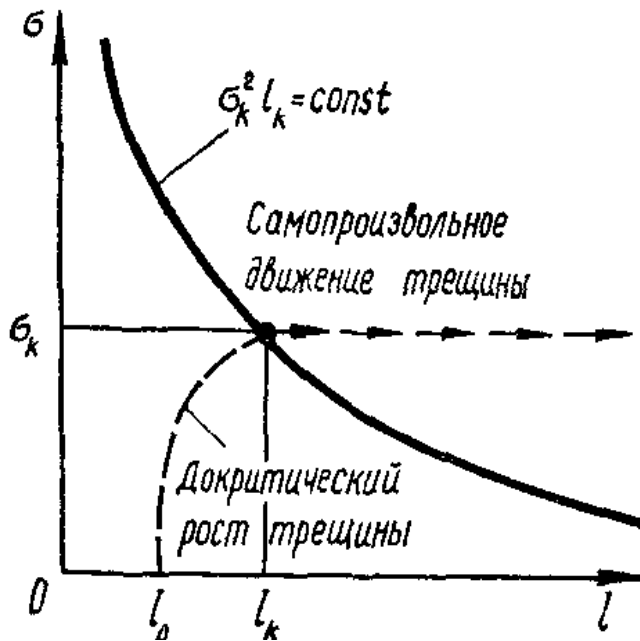


Рисунок 7.6 – Зависимость критического напряжения от длины трещины

Теория Гриффитса позволяет выразить хрупкую прочность через физические и механические свойства материала и показывает, что разрушающая нагрузка имеет место не при возникновении начальной трещины, а после достижения трещиной некоторых критических размеров.

Безопасные, неразвивающиеся трещины могут перейти в опасные за счет охрупчивания материала, вызванного понижением температуры, динамическим действием нагрузки, старением материала и т. п. Вытекающее из выражений (7.10) и (7.11) условие

$$(7.12)$$

подтвердилось проведенными Гриффитсом опытами на пластинах 13 силикатного стекла.



Основы преобразования энергетического критерия Гриффитса в силовой критерий были заложены **Ирвином**, который предложил за критерий перехода к нестабильному разрушению принимать момент, когда в материале интенсивность напряжений у вершины трещины, определяемая методами теории упругости, достигает критического значения.

Составляющие поля напряжений τ_{ij} ($i, j = x, y$) у вершины трещины (рисунок 7.7) можно представить формулой

(7.13)

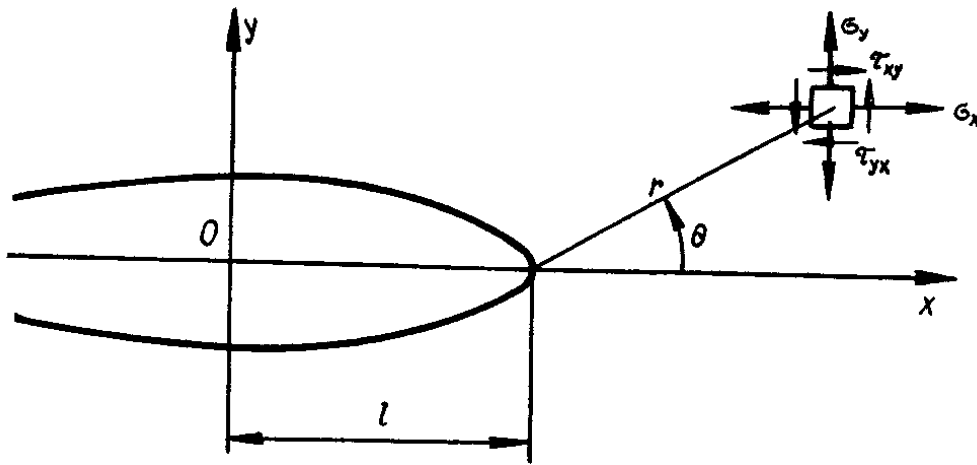
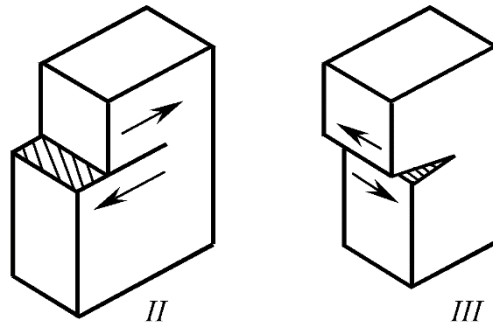


Рисунок 7.7 – Напряжения у вершины трещины

где K — коэффициент интенсивности напряжений у вершины трещины (сила/длина^{3/2}), r и θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины и в плоскости, перпендикулярной к кромке трещины, f_{ij} — некоторая функция угла θ .



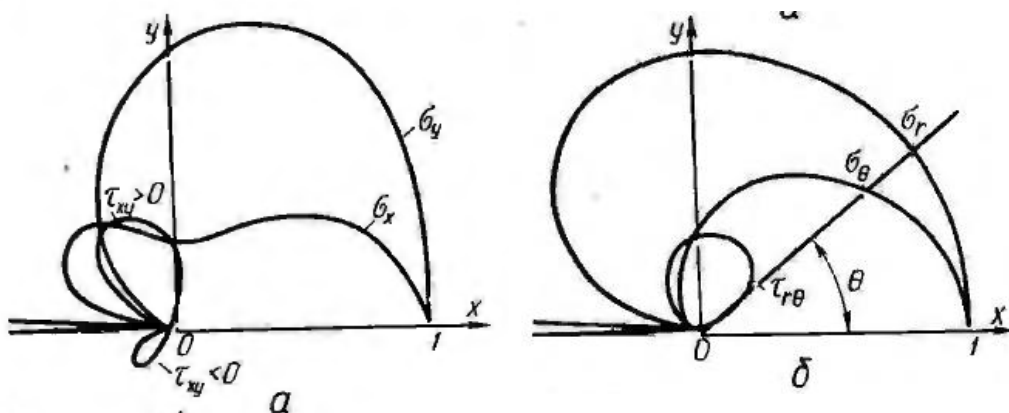
Обозначение коэффициента интенсивности напряжений K_I , K_{II} , K_{III} , производится в зависимости от типа деформации трещин.



Наибольший практический интерес представляет схема I. В этом случае формулы (7.13) в развернутом виде могут быть представлены следующим образом:

Рисунок 7.8 – Типы деформаций трещины:

I – нормальный отрыв, II – поперечный сдвиг, III – продольный сдвиг



(7.14)

Рисунок 7.9 – Эпюры напряжений около вершины трещины



Таким образом, интенсивность поля напряжений в окрестности вершины трещины в линейной механике разрушения контролируется единственным параметром K , являющимся функцией только характера внешнего нагружения, геометрии пластины и размеров трещины.

Для сквозной центрально расположенной трещины в пластине неограниченных размеров коэффициент интенсивности напряжений в зависимости от схемы деформирования трещины (рисунок 7.8) определяется следующими формулами:

(7.15)

Для трещин другого расположения или пластин ограниченных размеров коэффициенты интенсивности напряжений записываются в виде

(7.16)

где f_I, f_{II}, f_{III} - некоторые поправочные коэффициенты, выражения которых для ряда схем расположения трещин и нагрузок приведены в таблице 7.2.



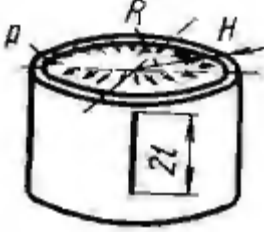
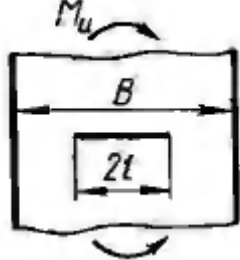
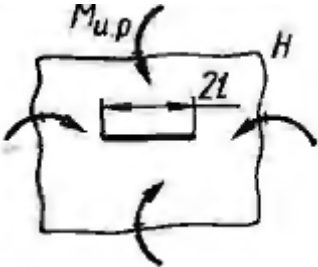
Таблица 7.2

Вид нагружения и расположения трещин	Схема расположения трещин и нагрузок	Поправочная функция
Растяжение неограниченной пластины с наклонной трещиной в середине		$f_I = \sin^2 \beta$
То же для полубесконечной пластины с односторонней трещиной		$f_I = 1.12$
Растяжение пластины шириной 2B с поперечной трещиной посередине		$f_I = \sqrt{\frac{2B}{\pi l}} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2B}$
То же с двумя боковыми трещинами		$f_I = \frac{0.2B}{\pi l} \times$ $\times \sin \frac{\pi l}{B} \sqrt{\frac{2B}{\pi l}} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2B}$



7.5. СИЛОВЫЕ КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ



Вид нагружения и расположения трещин	Схема расположения трещин и нагрузок	Поправочная функция
Цилиндрическая труба диаметром $2R$ и толщиной H под внутренним давлением p при продольной сквозной трещине		$f_I = \sqrt{1 + 1.61 \frac{l^2}{RH}}$ $\sigma = \sigma_\theta = \frac{pR}{H}$
Изгиб в плоскости пластины шириной B и толщиной H с трещиной посередине		$f_I = \frac{8}{3\sqrt{6}} \frac{Hl}{B^2} (1 - \mu^2)$
Та же пластина при чистом изгибе распределенным моментом		$f_I = 1; \left(\sigma = \frac{6M}{H^2} \right)$



Согласно предложению Ирвина, рост трещин начинается при достижении коэффициентом интенсивности напряжений некоторого критического значения K_c , которое должно быть характерным для каждого материала, т.е. трещина не развивается, когда

(7.17)

и может развиваться, когда

(7.18)

Критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, характеризующее сопротивление материала распространению трещины, называют ***вязкостью разрушения***.

Можно показать, что силовой критерий разрушения эквивалентен энергетическому критерию Гриффитса.

Введя интенсивность освобождающейся упругой энергии деформации W (7.6), (7.7) в виде

(7.19)



7.6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО И СИЛОВОГО КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ



и сравнив значение коэффициента интенсивности напряжений K_I (7.15) с полученным выражением (7.19) для G , найдем следующие зависимости между G и K_I : для плоского напряженного состояния

(7.20)

для плоской деформации

(7.21)

Таким образом, получены две эквивалентные формулировки критерия разрушения:

1) энергетическая, согласно которой предполагается, что трещина может распространяться тогда, когда интенсивность освобождающейся энергии G достигает критического значения G_c , определяемого из условия равенства нулю производной от энергии ΔW (7.9), необходимой для распространения трещины, по l ($d \Delta W / dl = 4\gamma - G_c = 0$):

(7.22)



7.6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО И СИЛОВОГО КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ



2) силовая, согласно которой трещина может развиваться при достижении коэффициентом интенсивности напряжений K своей критической величины

(7.23)

На основании формул (7.20) и (7.21) для плоского напряженного состояния и плоской деформации соответственно получим

(7.24)

Заметим, что формулы (7.24) справедливы для идеально упругого разрушения, т.е. когда у конца трещины в линеаризованной постановке задачи теории упругости $\sigma_y \rightarrow \infty$.

Кроме того, при плоском напряженном состоянии может иметь место разрушение срезом. Поэтому в первой формуле (7.24) индекс I не пишется.

В отличие от рассмотренного идеального случая для большинства реальных материалов в малой области конца трещины имеют место пластические деформации.



7.6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО И СИЛОВОГО КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ



Однако в схеме квазихрупкого разрушения вследствие малой области пластической деформации по сравнению с длиной трещины полагают, что размеры указанной области и интенсивность происходящей в ней пластической деформации определяются коэффициентом интенсивности напряжений K и пределом текучести $\sigma_{0.2}$ и, таким образом, остаются в силе оба критерия разрушения K_c и G_c с учетом зависимости последнего от характера сопротивления материала пластической деформации.

Соотношения (7.18) и (7.24) в линейной механике разрушения являются основными и с их помощью можно осуществить расчет предельного состояния элементов конструкций с трещинами, а также производить оценку механических свойств материала и его способности тормозить развитие трещины.



Радиус пластической зоны наиболее просто оценить приближенно, приравняв выражение для σ_y при $\theta=0$ пределу текучести материала σ_T , откуда для плоского напряженного состояния найдем

$$r_T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2. \quad (7.25)$$

Подставив значение K_I для пластины конечных размеров, определим длину трещины с учетом пластической зоны:

$$l_T = l + r_T = l \left[1 + \frac{1}{2} \left(f_I \frac{\sigma}{\sigma_T} \right)^2 \right]. \quad (7.26)$$

Зная эффективную длину трещины l_T , найдем уточненное значение коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi(l + r_T)}. \quad (7.27)$$

Следует заметить, что поскольку значение r_T зависит от величины K_I , определение значения K_I по (7.27) нужно неоднократно повторять, уточняя значение по r_T (7.26).



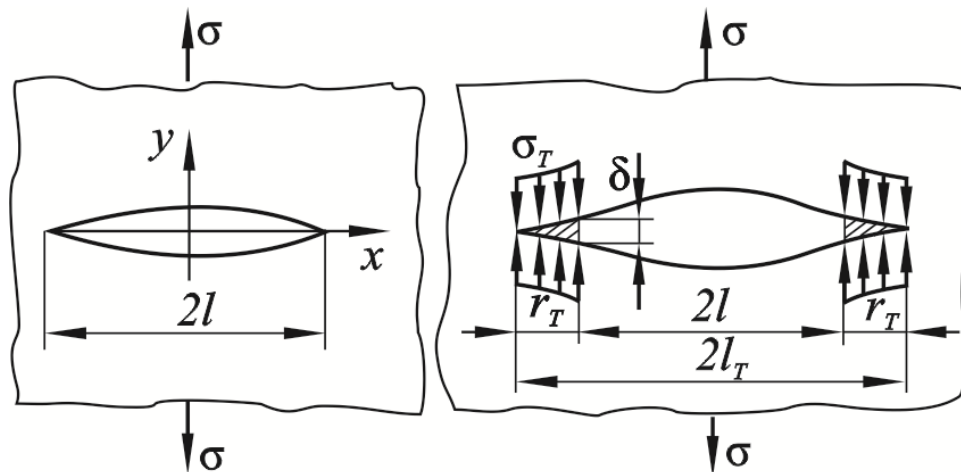
Величина рассматриваемой поправки становится более значительной по мере приближения значения K_I к критической величине K_c .

С учетом (7.27) можно определить для плоского напряженного состояния перемещение v у конца трещины v при $r=r_T$ и $\theta=\pi$:

$$(7.28)$$

Удвоенная величина v равна раскрытию трещины δ при плоском напряженном состоянии (рисунок 7.10):

$$(7.29)$$



Расчетные значения δ , получаемые по формуле (7.29) при $\sigma \leq 0,8\sigma_T$, подтверждены экспериментально.

Рисунок 7.10 – Схема раскрытия трещины

В случае плоского деформированного состояния протяженность пластической зоны снижается в несколько раз по сравнению с плоским напряженным состоянием. Размеры пластической зоны у вершины трещины для одного и того же материала зависит от степени стеснения деформации вдоль переднего края трещины. Степень стеснения деформации зависит от толщины образца.

С ее увеличением напряженное состояние изменяется от плоского, когда $\sigma_z = 0$, к объемному при плоской деформации, когда $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$. При этом на боковой

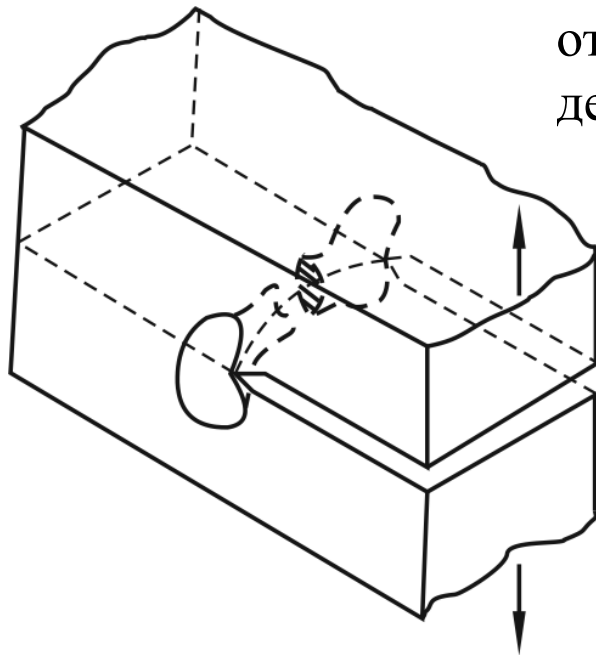


Рисунок 7.11 – Пластическая зона около вершины трещины

поверхности плоского образца при отсутствии на ней внешнего давления всегда имеет место плоское напряженное состояние, а потому размеры пластической области у свободной поверхности образца всегда больше, чем в средней части образца. Вид пластической зоны впереди края трещины в достаточно толстом плоском образце приблизительно имеет форму катушки (рисунок 7.11).



Предельное равновесие трещиноподобных дефектов в конструкции при заданных условиях эксплуатации определяется сопротивлением разрушению (*трещиностойкостью*) материала, из которого она изготовлена. В качестве меры трещиностойкости применительно к наиболее опасным и распространенным трещинам нормального отрыва чаще всего используют вязкость разрушения — критическое значение величины коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic} , соответствующее моменту старта трещины при наличии в ее вершине плоской деформации.

Вязкость разрушения при плоской деформации K_{Ic} можно считать константой материала, не зависящей от формы и размеров образцов.

Для определения характеристики K_{Ic} данного конкретного материала, соответствующей плоской деформации, обычно используют специальные компактные образцы (рисунок 7.11) с трещиной, удовлетворяющие следующему размерному требованию:

$$(7.30)$$

где l — длина надреза с трещиной; B — толщина образца; $(w - l)$ — ширина рабочего участка образца; — предел текучести материала образца.



7.8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ РАЗРУШЕНИЯ



В процессе внецентренного растяжения образца возрастающим усилием регистрируют диаграмму нагрузки P — смещение берегов трещины v . Величину критического коэффициента интенсивности напряжения K_{Ic} испытываемого материала рассчитывают по нагрузке P_Q , соответствующей на диаграмме P — v старту трещины, с использованием некоторой, зависящей от конфигурации образца, функции его размеров и длины трещины $Y(l/w)$.

Коэффициент интенсивности напряжений K_Q , соответствующий нагрузке P_Q , определяется по формуле

где

$$(22.27)$$

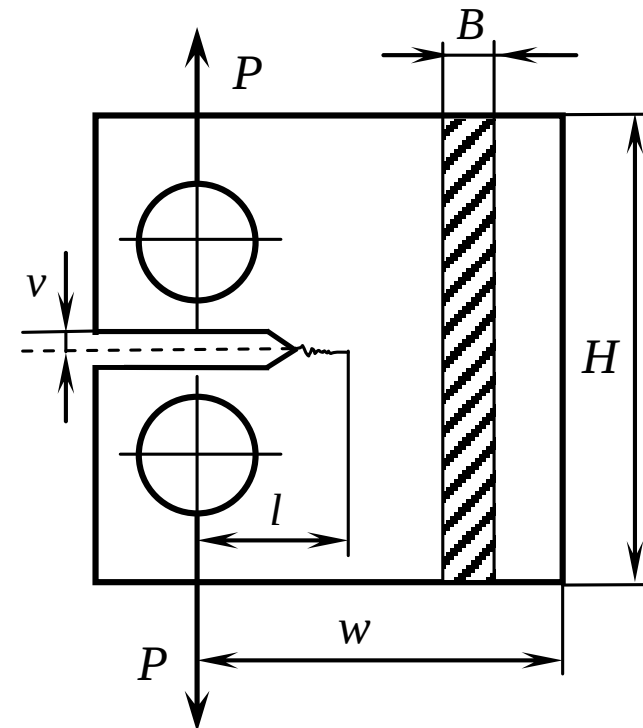


Рисунок 7.12 – Схема испытаний
на трещиностойкость



7.8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ РАЗРУШЕНИЯ



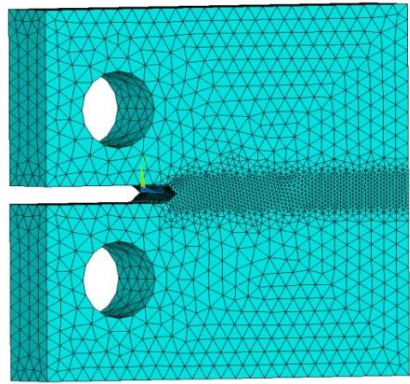
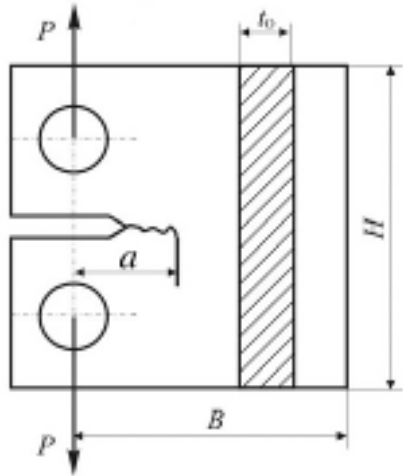
Если полученная таким образом величина K_Q удовлетворяет размерному требованию (22.26) и максимальный коэффициент интенсивности напряжений цикла при выращивании усталостной трещины $K_{f \max} \leq 0,6K_Q$, то K_Q считается искомой характеристикой материала K_{Ic} . В противном случае необходимо повторить испытания на образцах увеличенных размеров.

Поскольку значение нагрузки на диаграмме $P - v$ не зависит от места измерения смещений, то последние целесообразно измерять вблизи точек приложения нагрузки или вблизи средней точки линии фронта трещины. Этим смещениям на рис. 7.10 соответствуют обозначения v_p и δ . По синхронно регистрируемым диаграммам $P - v_p$ можно дополнительно к силовой характеристике K_{Ic} определять и деформационную δ_{Ic} характеристику трещиностойкости материала.

Такой подход позволяет комплексно, с единых методических позиций, оценивать трещиностойкость материала как в хрупком, так и в пластичном состояниях. Отметим, что описанная выше методика определения характеристики K_{Ic} теоретически строго обоснована и технически приемлема только при испытаниях хрупких материалов.



7.9. ПРИМЕНЕНИЯ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО РАЗРУШЕНИЯ



$$\sigma_q = \sigma_I = \sigma_1$$

$$\sigma_q = \sigma_{II} = \varepsilon_1 E$$

$$\sigma_q = \sigma_{III} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

$$\sigma_q = \sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Алгоритм итерационного моделирования распространения трещиноподобного повреждения основан на предварительном проведении расчета напряженно-деформированного состояния образца для каждого (i -го) конечного элемента, который рассматривается как элементарный объем, повреждаемость которого:

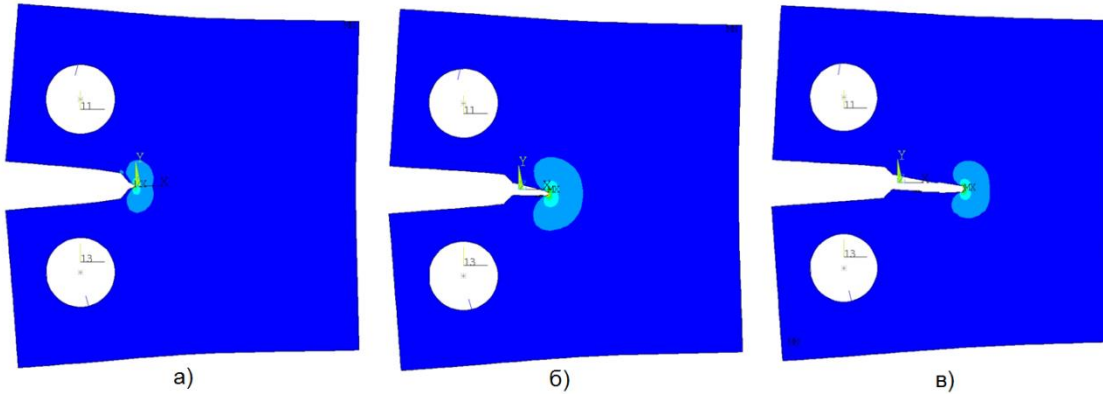
$$\psi_q^i = \left| \sigma_q / \sigma_q^{\text{lim}} \right| \quad q = I, II, III, IV \text{ и др.}$$

Распространение трещиноподобного повреждения моделируется удалением массива, составляющего опасный объем

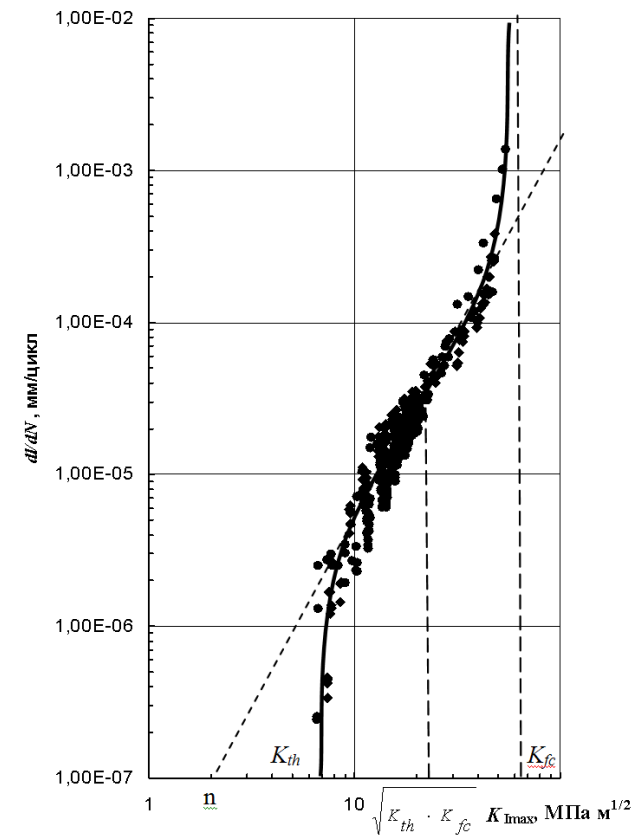
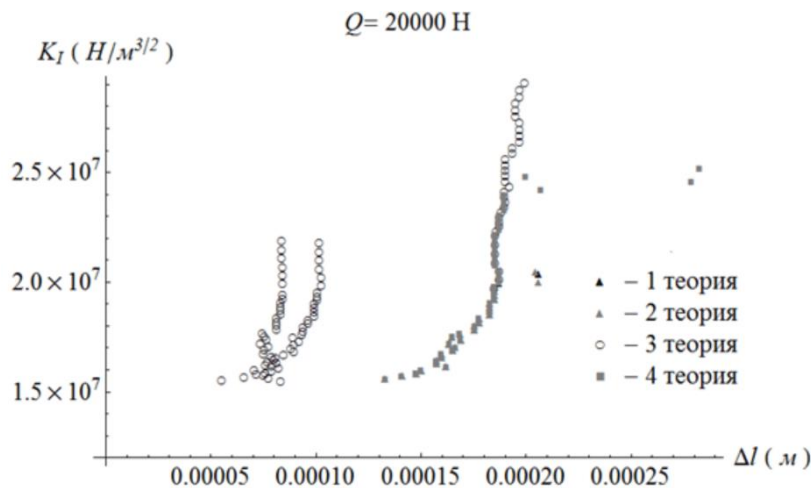
$$V_q = \{dV / \psi_q \geq 1, dV \subset V_k\}.$$



7.9. ПРИМЕНЕНИЯ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО РАЗРУШЕНИЯ

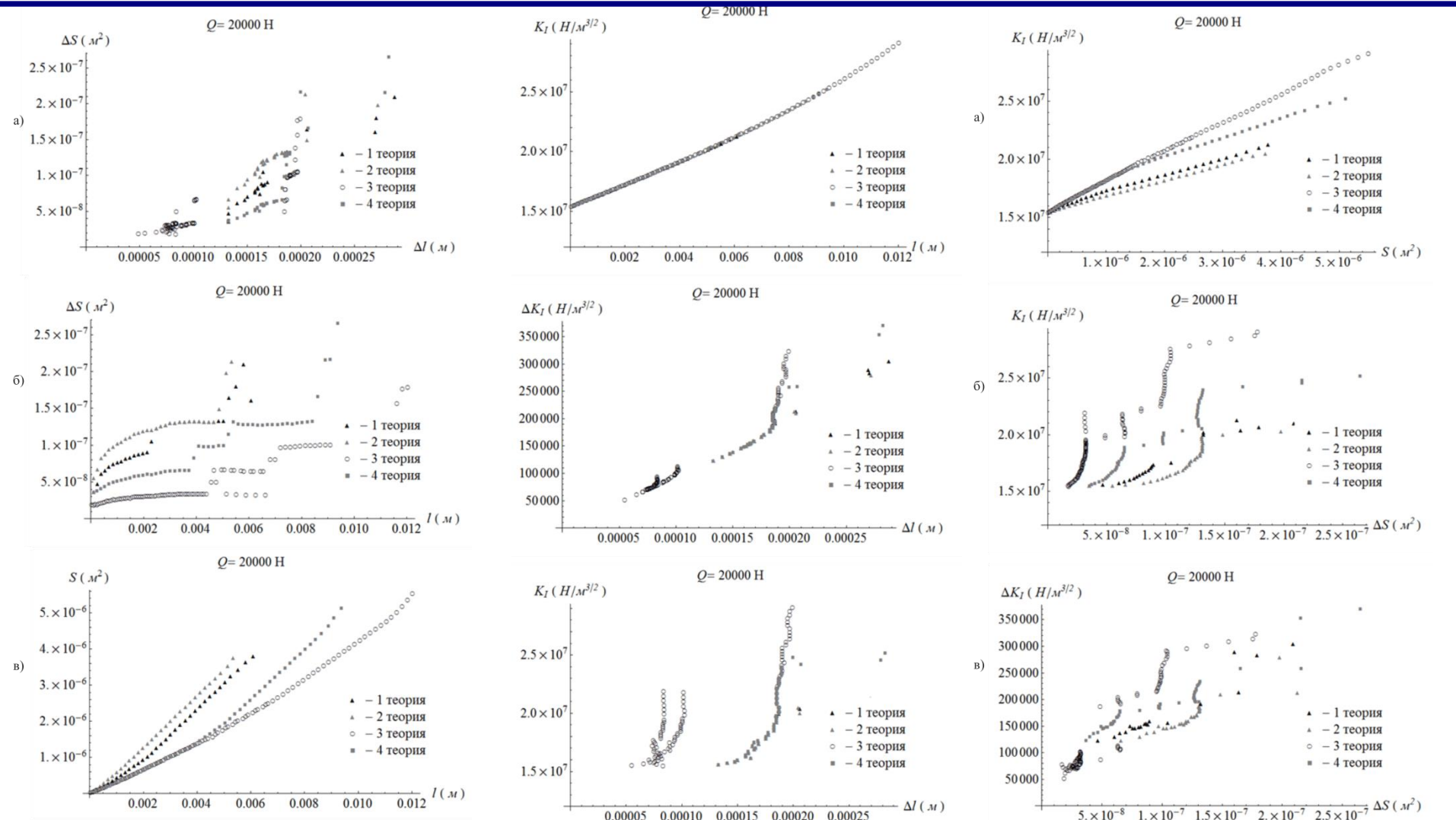


Распространение трещиноподобного повреждения на а) десятой, б) сороковой, г) семьдесят пятой итерации, моделируется удалением на каждой итерации опасных поверхностей S_q (объемов) из поверхности (объема) образца S_k ,





7.9. ПРИМЕНЕНИЯ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО РАЗРУШЕНИЯ





7.9. ПРИМЕНЕНИЯ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО РАЗРУШЕНИЯ

