

**Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической и прикладной механики**

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТРИБОФАТИКИ (часть 2)

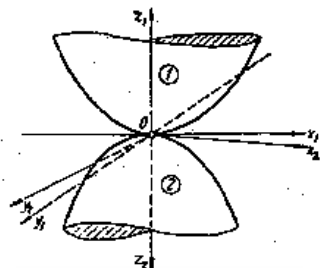
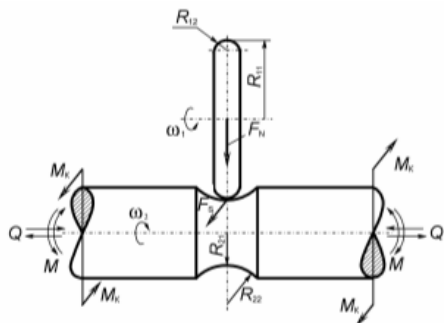
ВВЕДЕНИЕ

**ТЕМА 1. СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НОРМАЛЬНАЯ (ЗАДАЧА ФЛАМАНА)
И КАСАТЕЛЬНАЯ К ПОЛУППЛОСКОСТИ СИЛЫ**



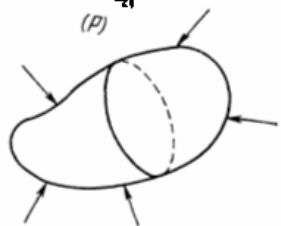
ВВЕДЕНИЕ

1



⇒ **МНОГО-КОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА**

⇒ **СИСТЕМА ТОЧЕК**



⇒ **МАТЕРИАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ**



СИЛОВАЯ СИСТЕМА

↑
(деформирование,
диалектика
повреждения,
разрушение)

↑
ПАРА ТРЕНИЯ
(повреждение)

↑
ДВА И БОЛЕЕ ТЕЛ
(деформирование)

↑
**ДЕФОРМИРУЕМОЕ
ТВЕРДОЕ ТЕЛО**
(деформирование,
повреждение,
разрушение)

↑
ТОЧКА
(движение)

Трибофатика
(или механика
износоусталостного
повреждения)

Трибология

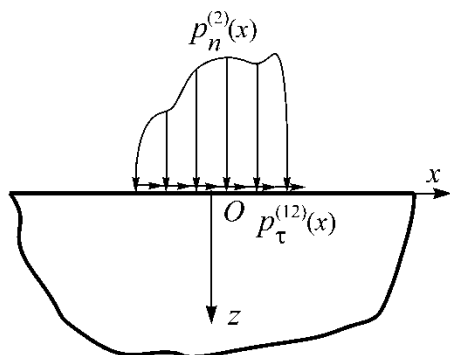
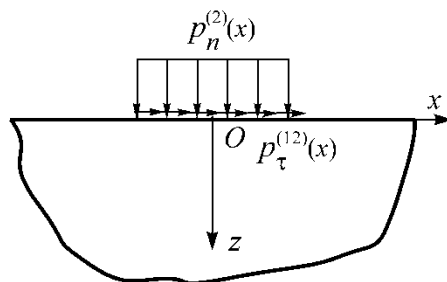
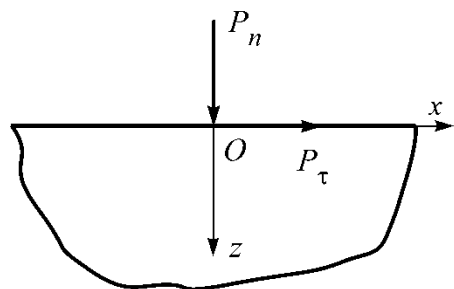
**Механика
контактного
взаимодействия**

**Механика
деформируемого
твёрдого тела**

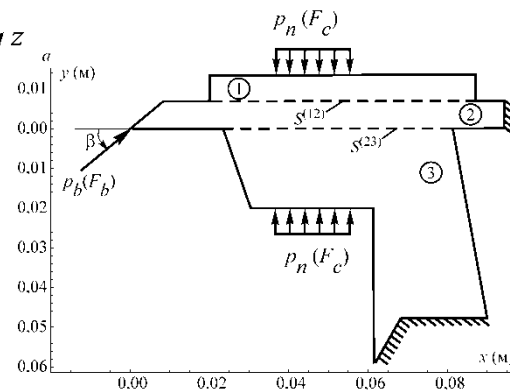
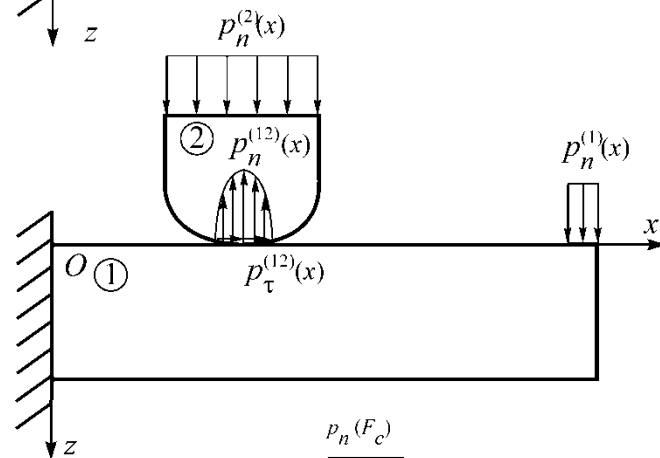
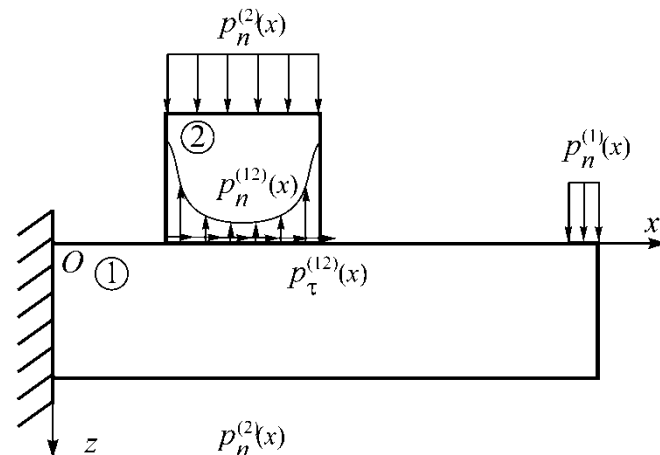
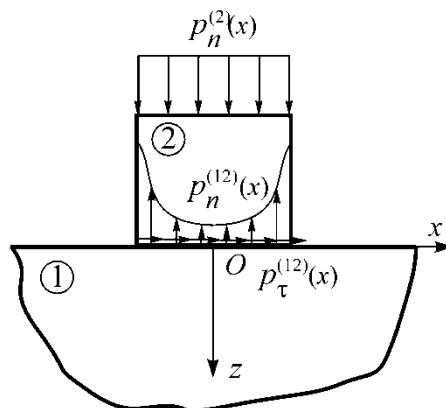
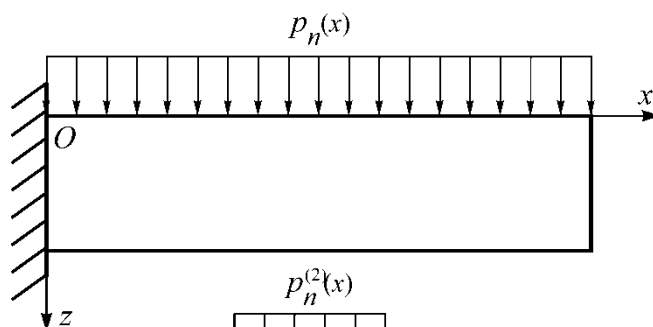
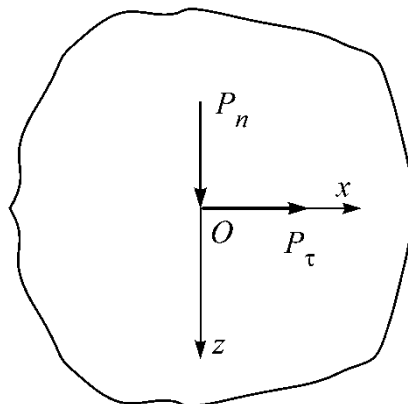
**Теоретическая
механика**



Задача Фламана



Задача Кельвина





Трибофатика:

С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. Механика трибофатических систем – Минск: БГУ, 2011.
Л.А. Сосновский, М.А. Журавков, С.С. Щербаков. Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций. – Минск: БГУ, 2011.

Теория упругости и МДТТ:

М.А. Журавков Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований: курс лекций. – Минск: БГУ, 2008.
Ю.Н. Работнов. Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1988.

Механика контактного взаимодействия:

В.М. Макушин. Упругие перемещения и напряженное состояние деталей в местах силового контакта деталей // Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.]; под ред. С. Д. Пономарева. – М.: 1958. – Т. 2. – С. 387–486.
К. Джонсон. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989.

Метод граничных элементов:

С. Крауч, А. Старфилд. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987.
П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984.



1.1. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ СИЛА

4

Рассмотрим напряженное состояние упругой полуплоскости вызванное действием сосредоточенной силы P_n , действующей в направлении нормали к поверхности изотропной полуплоскости
(задача Фламана).

Тогда закон Гука примет вид

Рис. 1.1 Полуплоскость по действию сосредоточенной нормальной силы

Задачу будем решать в условиях
плоской деформации

(1.2)

(1.1)



Решение в полярных координатах ищут с помощью функции напряжений

(1.3)

которая удовлетворяет бигармоническому уравнению (уравнению Лапласа)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Компоненты напряжений выражаются через функцию φ следующим образом

(1.5)



1.1. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ СИЛА



В качестве искомой функции (1.3) возьмем

(1.6)

Тогда напряжения (1.5) будут

(1.7)

Постоянная A находится из условия равенства суммы вертикальных составляющих напряжений, действующих вдоль полуокружности радиуса r , и приложенной внешней силы P_n :

(1.8)

Следовательно

(1.9)



1.1. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ СИЛА



В декартовой системе координат радиальному напряжению σ_r (1.9) будут соответствовать следующие эквивалентные компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xx}^{(n)} = P_n \cdot G_{xx}^{(\sigma,n)} =$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = P_n \cdot G_{zz}^{(\sigma,n)} = \quad (1.10)$$

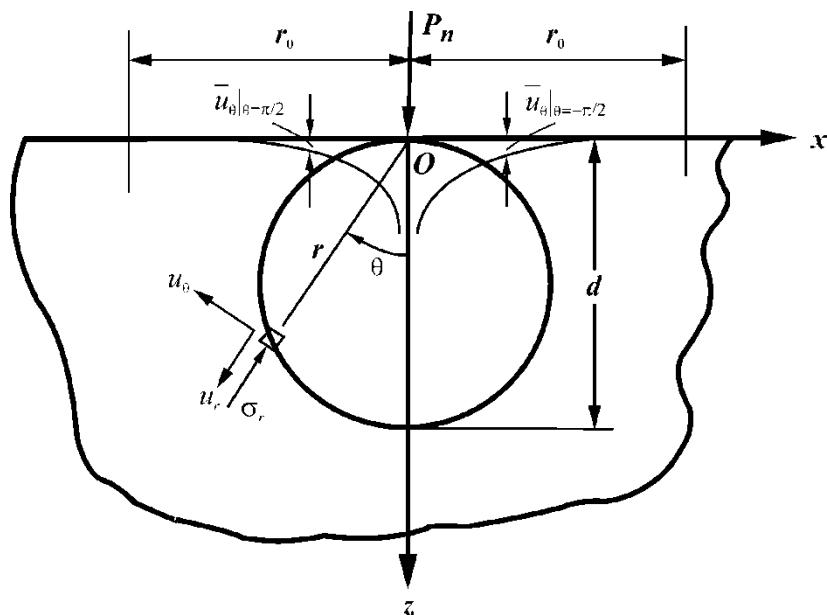
$$\sigma_{xz}^{(n)} = P_n \cdot G_{xz}^{(\sigma,n)} =$$

где G_{ij} – функции влияния.

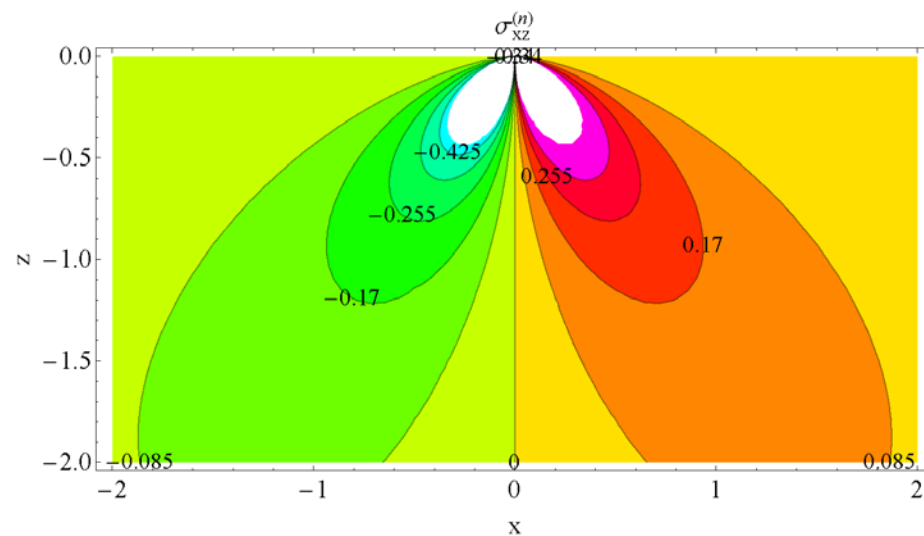
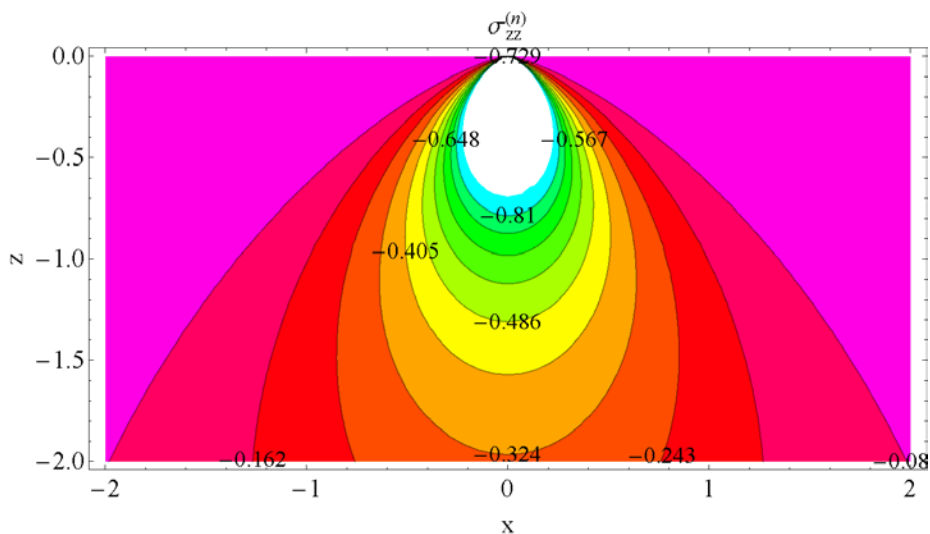
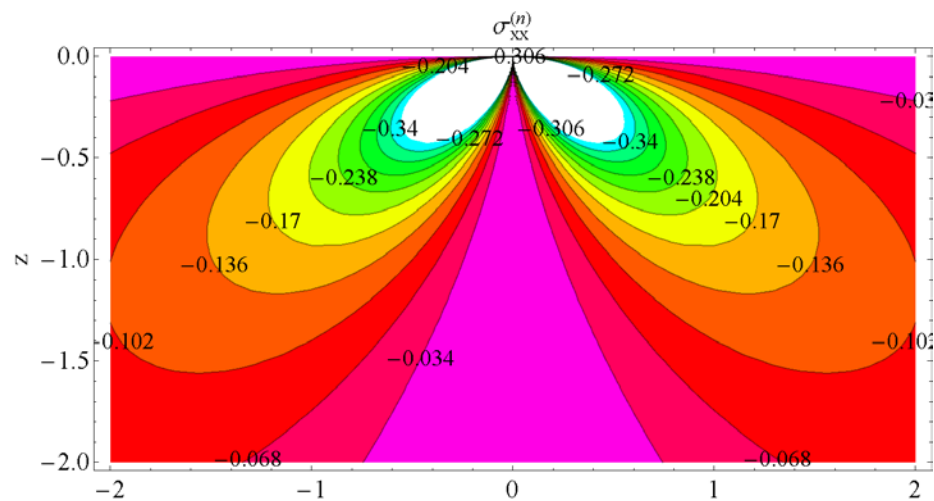


1.1. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ СИЛА

8



Распределение напряжений





Запишем выражения для деформаций в полярной системе координат:

(1.11)

Решение этих уравнений относительно u_r , u_θ имеет вид

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} 2P_n \cos \theta \ln r - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} P_n \theta \sin \theta + C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta, \\ u_\theta &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} 2P_n \sin \theta \ln r + \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} 2P_n \sin \theta - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} 2P_n \theta \cos \theta + \\ &+ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} P_n \sin \theta + C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta + C_3 r. \end{aligned} \quad (1.12)$$



1.1. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ СИЛА

10

Если тело (полуплоскость) не испытывает перекоса, так что точки оси z смещаются только вдоль Oz , то $C_1=C_3=0$. На поверхности, где $\theta = \pi/2$, имеем

(1.13)

где постоянная C определяется выбором точки поверхности на некотором расстоянии r_0 (или, наоборот, на оси z под поверхностью), в которой задается фиксированное значение (например, нулевое) нормального перемещения.

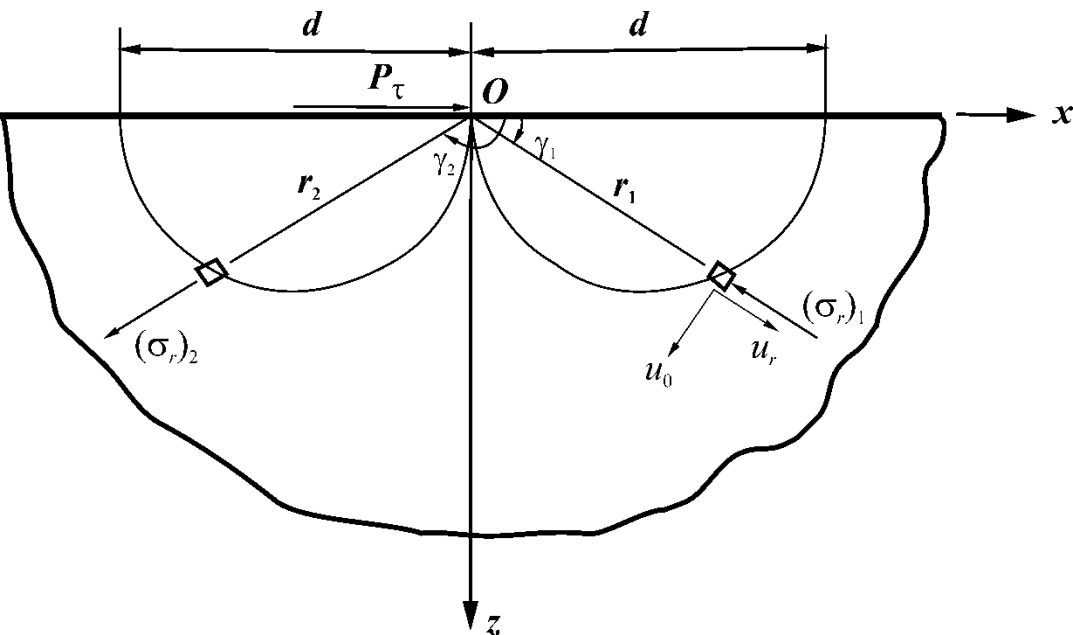
Тогда

(1.14)



1.2. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ КАСАТЕЛЬНАЯ СИЛА

11



Если измерять полярный угол γ от линии действия силы, т.е. от направления оси Ox , то формулы для напряжений будут такими же, как и для нормальной силы:

Рис. 1.2. Действие сосредоточенной касательной нагрузки

(1.15)



1.2. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ КАСАТЕЛЬНАЯ СИЛА

12

Аналогичным образом определяются выражения для напряжений в координатной плоскости xz :

(1.16)

При соответствующем изменении определения угла γ выражения (1.12) для перемещений сохраняют свой вид.

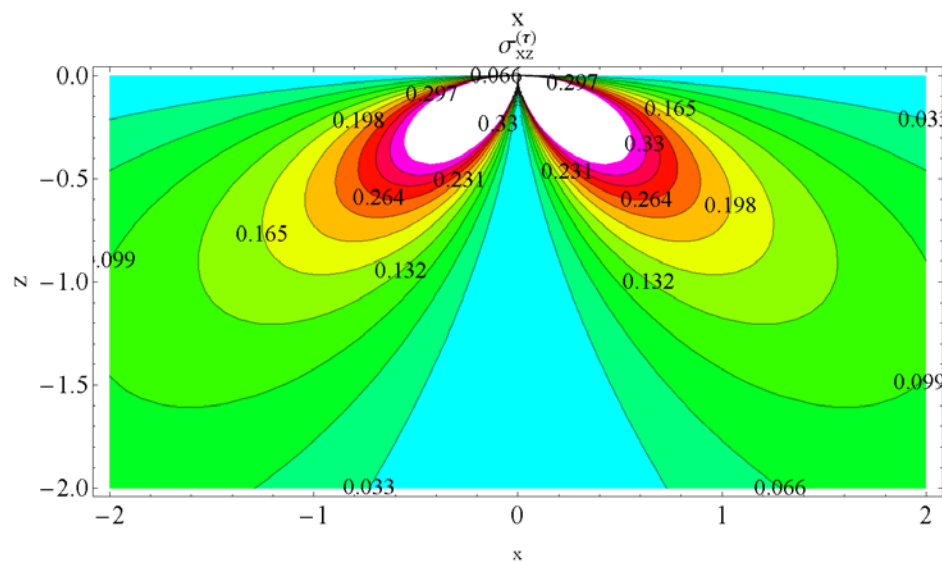
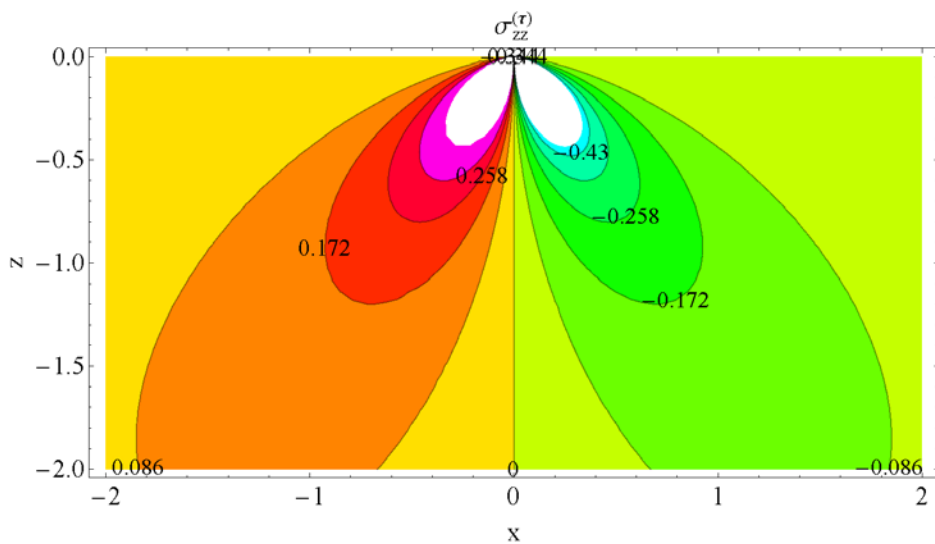
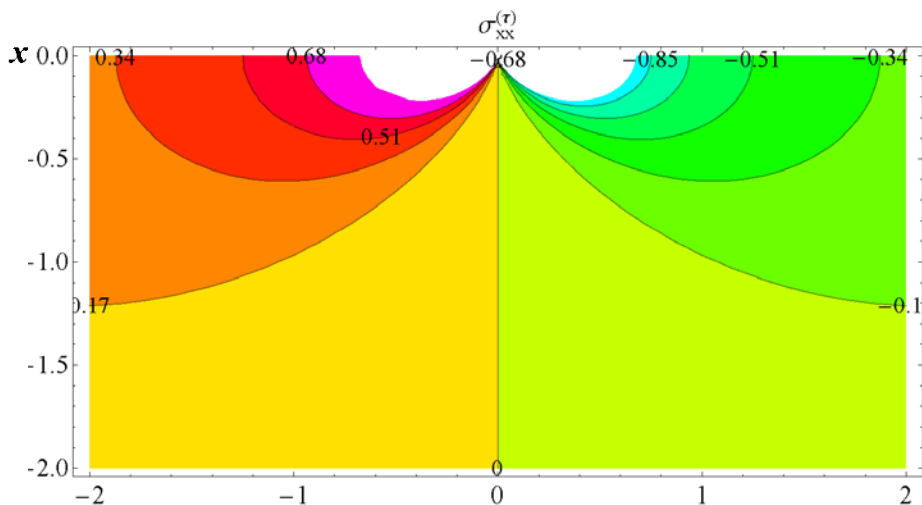
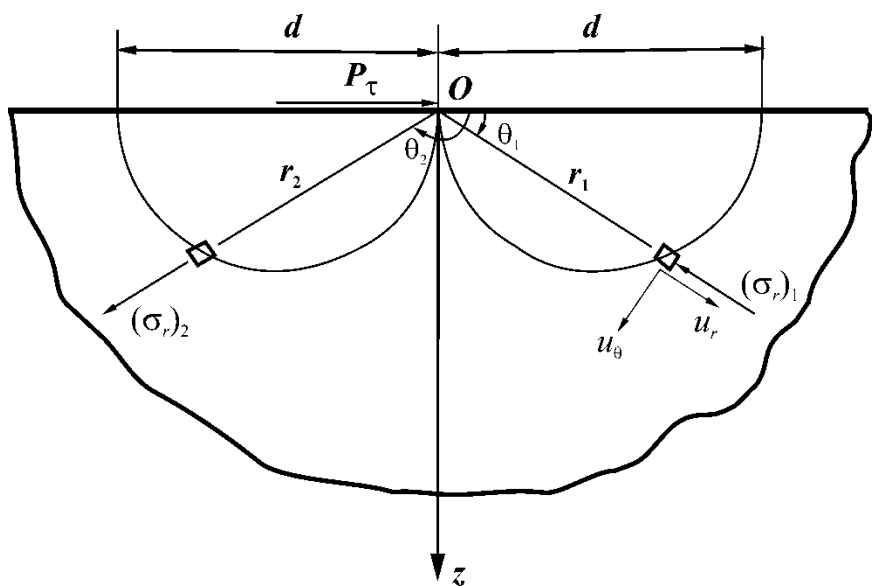
Если отсутствуют повороты тела (полуплоскость) как жесткого целого и равны нулю вертикальные перемещения точек оси z , то получим следующие формулы для перемещений поверхности:

(1.17)



1.2. СОСРЕДОТОЧЕННАЯ КАСАТЕЛЬНАЯ СИЛА

13

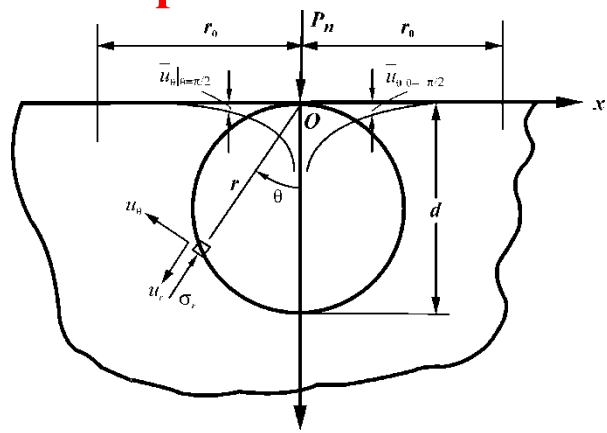




Задание №1. Построить следующие распределения в плоскости xOy при действии сосредоточенных нагрузок:

нормальной

касательной

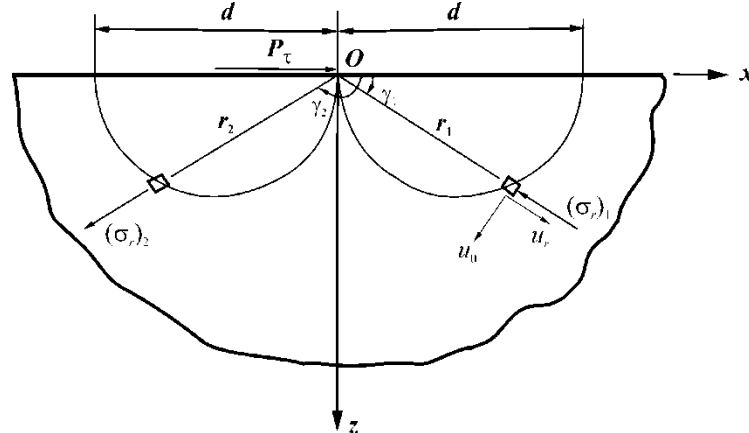


$$\sigma_r^{(n)} = -\frac{2P_n \cos \theta}{\pi r}.$$

$$\sigma_{xx}^{(n)} = P_n \cdot G_{xx}^{(\sigma,n)} = -\frac{2P_n}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = P_n \cdot G_{zz}^{(\sigma,n)} = -\frac{2P_n}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(n)} = P_n \cdot G_{xz}^{(\sigma,n)} = -\frac{2P_n}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$



$$\sigma_r^{(\tau)} = -\frac{2P_\tau \cos \gamma}{\pi r},$$

$$\sigma_{xx}^{(\tau)} = P_\tau \cdot G_{xx}^{(\sigma,\tau)} = -\frac{2P_\tau}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + z^2)^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(\tau)} = P_\tau \cdot G_{zz}^{(\sigma,\tau)} = -\frac{2P_\tau}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(\tau)} = P_\tau \cdot G_{xz}^{(\sigma,\tau)} = -\frac{2P_\tau}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}.$$