БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Э К О Н О М И Ч Е С К И Й   Ф А К У Л Ь Т Е Т
КАФЕДРА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Ряды

Конспект лекций и практикум
для студентов экономических специальностей

Составил В. С. Мастяница

2010 г.

Глава 1. Ряды

1. Числовые ряды

1.1. Основные понятия

Числовым рядом (или просто рядом) называется бесконечная сумма вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где - числа действительные или комплексные. Слагаемые $u_1, u_2, \ldots$, называются членами ряда, u_n - общий член ряда.

Ряд задан, если известно правило, по которому для каждого значения k можно вычислить значение члена ряда. Для этого необходимо задать функцию натурального аргумента, выражающую общий член ряда: $u_k = f(k), k = 1, 2, \cdots$.

Например, члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ определяются как значения функции $f(n) = \frac{1}{n^2}$.

Числовой ряд представлен бесконечной суммой, для этого необходимо соответствующее определение.

Сумма первых n членов числового ряда называется частичной суммой ряда и обозначается S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Частичные суммы

$$S_1 = u_1, \ S_2 = u_1 + u_2, \ \ldots, \ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

образуют числовую последовательность $\{S_n\}$.

Если существует конечный предел

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

последовательности частичных сумм числового ряда, то этот предел называется суммой ряда. Это значит, что

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В этом случае говорят, что числовой ряд *сходится* и называют ряд *сходящимся*. Если же предел не существует или равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

►**Пример 1.** Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots.$$

Частичная сумма ряда

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Каждое слагаемое представим в виде суммы простейших дробей по формуле:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Тогда

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

В последнем выражении сокращаются все дроби кроме первой и последней. В итоге получим

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Теперь можно вычислить

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Значит, ряд сходится и его сумма равна 1.

◄

►**Пример 2.** Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\ldots$$

расходится, так как его последовательность частичных сумм

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0, \ldots$$

не имеет предела.

◄

1.2. Свойства числовых рядов

1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} au_k = au_1 + au_2 + \ldots$, где a - число, также сходится и его сумма равна aS.

Действительно, пусть $S_n(u)$ и $S_n(au)$ частичные суммы соответственно рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} au_k$, т.е.

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ и } S_n(au) = \sum_{k=1}^{n} au_k.$$

Так как

$$S_n(au) = au_1 + au_2 + \ldots + au_n = a(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = aS_n(u),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(au) = \lim_{n\to\infty} aS_n(u) = a\lim_{n\to\infty} S_n(u) = aS.$$

2. Если сходится ряд $\sum_{\kappa=1}^{\infty} u_\kappa$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, то сходятся и ряды $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Доказательство этого свойства можно выполнить по аналогии с предыдущим.

3. Если от ряда $\sum_{k=1}^{n} u_k$ отнять конечное число членов, то исходный ряд и полученный ряд $\sum_{k=m}^{\infty} u_k,\ 1 < m < \infty,$ сходятся или расходятся одновременно.

Данное свойство примем без доказательства, пояснив его на примере. Выше (см. пример 1) было показано, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

сходится и его сумма равна 1. Удалив из этого ряда первые 10 членов, получим ряд

$$\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Исследуем сходимость этого ряда по определению. Частичная сумма

$$S_n=\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{11}.$$

Следовательно, полученный ряд также сходится, но его *сумма равна другому значению*.

Дополнение к свойству 3. Сходимость ряда *не изменится*, если к ряду *добавить конечное число членов*.

1.3. Необходимый признак сходимости числового ряда

Вычисление частичной суммы и её предела для произвольного ряда может быть сложной задачей. Для выяснения сходимости числовых рядов применяют признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, то его общий член* u_k *стремится к нулю, т. е.* $\lim_{k\to\infty} u_k=0$.

Действительно, пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится и его сумма равна S, т.е. существует конечный предел его частичных сумм $\{S_n\}$: $S=\lim_{n\to\infty} S_n$. Тогда и $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$ (если $n\to\infty$, то и $(n-1)\to\infty$).

Далее, так как $u_n=S_n-S_{n-1}, n>1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$$

Следует отметить, что необходимый признак сходимости не позволяет определять сходимость рядов. Так, если $\lim_{k\to\infty} u_k=0$, то о сходимости ряда нельзя ничего сказать. Но невыполнение необходимого признака указывает на расходимость ряда.

Если $\lim_{k\to\infty} u_k\neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится. Действительно, если бы ряд сходился, то по необходимому признаку $\lim_{k\to\infty} u_k=0$.

►**Пример 3.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n-2}{2n+4}$.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-2}{2n+4}=3\neq 0,$$

то ряд расходится.

◄

►**Пример 4.** Исследовать сходимость ряда $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}+\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}+\ldots$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\neq 0,$$

Следовательно, данный ряд расходится.
◄
►**Пример 5.** Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

Предел общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Составим частичную сумму S_n и оценим её.

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Получили, что $S_n>\sqrt{n}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$.

Следовательно, ряд расходится.
◄

1.4. Гармонический ряд

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

называется гармоническим.
Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Но ряд расходится. Покажем это.
Известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Отсюда следует, что при любом натуральном n имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e.$$

Прологарифмируем это неравенство:

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}$$

или

$$\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n.$$

Подставляя в последнее неравенство вместо n числа $1,2,\ldots,n-1,n$, получим последовательность неравенств:

$$1 > \ln 2, \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2, \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3, \cdots, \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Сложив эти неравенства, получим в левой части частичную сумму:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) .$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty .$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

1.5. Ряд геометрической прогрессии

Ряд геометрической прогрессии имеет вид

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots,$$

где a, q - действительные числа, причем $a \neq 0$.

Ряд геометрической прогрессии используется при исследовании сходимости других рядов. Для частичной суммы ряда имеет место формула:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1.$$

Вычислим предел частичной суммы ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} .$$

Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} .$$

Следовательно, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$.

Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $q^n \to \infty, n \to \infty$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Значит, ряд геометрической прогрессии расходится при $|q| > 1$.

Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд геометрической прогрессии принимает вид

$$a + a + \ldots + a + \ldots,$$

и так как $S_n = na$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, значит, ряд геометрической прогрессии расходится.

При $q = -1$ ряд геометрической прогрессии принимает вид

$$a - a + a - a + \ldots$$

и при $n = 2k$ $S_n = 0$, а при $n = 2k+1$ $S_n = a$. Предел частичных сумм не существует и ряд геометрической прогрессии расходится.

Следовательно, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

►**Пример 6.** Исследовать сходимость ряда $3^2+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$.

Данный ряд – ряд геометрической прогрессии ($a=9, q=\frac{1}{3}$), он сходится, так как $q<1$, и его сумма равна $\frac{9}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}$.

◄

1.6. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Необходимый признак сходимости не позволяет сказать, сходится данный ряд или нет. Сходимость или расходимость ряда можно установить при помощи достаточных признаков сходимости.

Рассмотрим знакоположительные ряды вида:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots(u_n>0).$$

Признак сравнения

Пусть заданы два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$*, причем для всех* n *выполняется неравенство* $u_n \le v_n$.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$*, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$*; если расходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$*, то расходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

Доказательство.

Обозначим частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из условия теоремы $u_n \le v_n$ следует, что

$$S_n^{(u)} \le S_n^{(v)}.$$

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится и его сумма равна S_v, тогда $\lim_{n\to\infty}S_n^{(v)}=S_v$. Члены этого ряда положительны, поэтому $S_n^{(v)} \le S_v$ и, значит, с учетом неравенства $u_n \le v_n$ и $S_n^{(u)} \le S_v$. Следовательно, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, \ldots, S_n^{(u)}, \ldots$ монотонно возрастает ($u_n>0$) и ограничена сверху числом S_v. По признаку существования предела, последовательность $\{S_n^{(u)}\}$ имеет предел $\lim_{n\to\infty}S_n^{(u)}=S_u$, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится. Так как $u_n \ge 0$, то $\lim_{n\to\infty}S_n^{(u)}=\infty$. Тогда с учетом неравенства $u_n \le v_n$ имеем, что $\lim_{n\to\infty}S_n^{(v)}=\infty$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится.

Признак сравнения применим и в том случае, когда неравенство $u_n \le v_n$ выполняется не для всех членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, а, начиная с некоторого номера N.

Предельный признак сравнения

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *и существует конечный, отличный от нуля, предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A, (0 < A < \infty).$$

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство.

По определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon .$$

Выполнив несложные преобразования:

$$|u_n - Av_n| < \varepsilon v_n \text{ , } -\varepsilon v_n \le u_n - Av_n \le \varepsilon v_n ,$$

получим

$$(A-\varepsilon)v_n \le u_n \le (A+\varepsilon)v_n .$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то по признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$. Отсюда по свойству числовых рядов следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то по признаку сравнения расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n$ и по свойству числовых рядов расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

►**Пример 7.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$.

Для любого натурального n справедливо неравенство

$$\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n} .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, как ряд геометрической прогрессии ($q = \frac{1}{2}$), следовательно, сходится и исходный ряд по признаку сравнения.
◄

►**Пример 8.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

Данный ряд будем сравнивать с гармоническим рядом (расходящимся). Так как для любого натурального n справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n},$$

то по признаку сравнения исходный ряд расходится.
◄

►**Пример 9.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$.

Применим предельный признак сравнения. Исходный ряд сравним с гармоническим рядом. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{5}\neq 0,$$

то исходный ряд расходится.

◄

Признак Д'Аламбера.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q.$$

Тогда, если $q<1$*, то ряд сходится, если* $q>1$*, то ряд расходится. При* $q=1$ *ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Доказательство.

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то по определению предела для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое натуральное число N, что при $n>N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-q\right|<\varepsilon$$

или

$$q-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\varepsilon.$$

Пусть $q<1$, тогда можно выбрать ε настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $q+\varepsilon<1$. Обозначим $p=q+\varepsilon,\ p<1$. Тогда $\frac{u_{n+1}}{u_n}<p$ или $u_{n+1}<pu_n$. Это неравенство выполняется для всех $n>N$, т. е. для $n=N+1,N+2,\cdots$. В силу свойства числовых рядов можно считать, что

$$u_{n+1}<pu_n, n=1,2,\cdots.$$

Из данного неравенства запишем цепочку неравенств:

$$\begin{gathered}u_2<pu_1,\\ u_3<pu_2<p^2u_1,\\ u_4<pu_3<p^3u_1,\\ \cdots\\ u_n<pu_{n-1}<p^{n-1}u_1,\\ \cdots.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что члены ряда $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} p^n u_1$, который является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $p<1$, а, значит, сходящимся рядом. Поэтому на основании признака сравнения сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть $q>1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$. Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера N, справедливо неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ или $u_{n+1}>u_n$. Следовательно, члены ряда возрастают с увеличением n, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. Значит, на основании следствия из необходимого признака сходимости числовых рядов ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Замечание. Признак Д'Аламбера рекомендуется применять, когда общий член ряда содержит выражение вида a^n или $n!$.

►**Пример 10.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, по признаку Д'Аламбера ряд сходится.

◄

►**Пример 11.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{3^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n^2}{(n+1)^2 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{(n+1)^2}=3>1.$$

Ряд расходится.

Признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n>0)$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$. Тогда ряд сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$. Если же $q=1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся не решённым.

►**Пример 12.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$.

По признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=2>1.$$

Следовательно, ряд расходится.

◄

►**Пример 13.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3e}<1.$$

Ряд сходится.

◄

Интегральный признак Коши.

Пусть члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \cdots$.

Тогда, если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если же $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

►**Пример 14.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ удовлетворяет условию интегрального признака. Действительно, эта функция непрерывна и так как $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$, то монотонно убывает на промежутке $[1;\infty)$. Кроме того, $f(n) = \frac{1}{1+n^2}$. Следовательно, можно применить интегральный признак Коши, для этого вычислим

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} arctg x\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} (arctg a - arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то исходный ряд также сходится.

◄

►**Пример 15.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ удовлетворяет условию интегрального признака на промежутке $[2;\infty)$ (докажите это).

Применяя интегральный признак, вычислим

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{a\to\infty} \int_2^{a} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{a\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^a = \lim_{a\to\infty} (\ln(\ln(a)) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Несобственный интеграл расходится, значит, и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ расходится.

◄

1.7. Знакопеременные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется знакопеременным, если он имеет бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных членов. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ - знакопеременный.

Будем рассматривать также и ряд, из модулей членов исходного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *абсолютно сходящимся.*

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ с положительными членами, то для исследования его сходимости можно применять ранее рассмотренные признаки (признаки сравнения, Д'Аламбера, Коши, интегральный признак Коши).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *условно сходящимся.*

1.8. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимся рядом называется ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n ,$$

где $u_n > 0, n \in N$.

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ *сходится, если последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е.* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$, *и общий член ряда стремится к нулю:* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда удовлетворяет условию $0 < S < u_1$.

►**Пример 16.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$

Абсолютные величины членов этого ряда убывают:

$$1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots > \frac{1}{n^2} > \ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 .$$

Значит, ряд сходится .

Если учесть, что ряд из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (докажите), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ сходится абсолютно.

◄

►**Пример 17.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

Условия признака Лейбница для этого ряда выполнены ($1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$), значит, ряд сходится.

Ряд из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд (расходящийся). Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ сходится условно.

◄

1.9. Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда

Условие $0 < S < u_1$ дает удобную оценку погрешности, которая появляется при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n.

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots \approx S_n = u_1 - u_2 + u_n - \ldots + (-1)^{n-1}u_n,$$

$$S = S_n + r_n, r_n = (-1)^n(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots).$$

r_n-остаток, также ряд, сумма которого меньше первого члена, $r_n < u_{n+1}$.

►**Пример 17.** Вычислить приближённо сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$.

Данный ряд сходится абсолютно, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

сходится. Это можно доказать, применив признак Д'Аламбера.

Вычислим сумму первых четырех слагаемых и оценим её погрешность.

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} = \frac{5413}{6912} \approx 0{,}7831.$$

Погрешность $r_4 < \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125} = 0{,}00032$. Значит, $S \approx 0{,}783$ и все цифры верные.

◄

1.10. Экономические приложения числовых рядов

В экономике бесконечные ряды и их суммы применяются в основном в теоретических исследованиях.

Предположим, что рассматривается задача о рыночной цене бессрочной облигации номиналом 1000$ и 3-% купоном. Это значит, что владелец этой облигации каждый год должен получать 30$. Необходимо определить истинную цену этой бесконечной последовательности платежей.

Любая валюта подвержена инфляции. Если инфляция составляет 2% в год, то 30$, которые получим через год, сейчас равны $\frac{30}{1{,}02}$. 30$, которые планируем получить через 2 года, сейчас равны $\frac{30}{(1{,}02)^2}$ и т. д. В итоге получаем, что бесконечный ряд платежей в 30$, которые будем получать каждый год, сейчас эквивалентны сумме ряда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{30}{(1{,}02)^k}.$$

Применив формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$S = \frac{30}{1{,}02}\frac{1}{1 - \frac{1}{1{,}02}} = \frac{30 \cdot 1{,}02}{1{,}02 \cdot 0{,}02} = 1500.$$

2. Степенные ряды

Степенным рядом называется

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

где x - переменная, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ - числа, называемые коэффициентами ряда.

Задавая переменной x различные значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться. Множество значений переменной x, для которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости степенного ряда.* Любой степенной ряд сходится при $x = 0$.

Исследования сходимости степенных рядов основаны на применении следующей теоремы.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при некотором значении* $x_0 \neq 0$*, то он сходится абсолютно при любом* $|x| < |x_0|$. *Если ряд расходится при некотором* x_1*, то он расходится при всех* $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля позволяет определять множество точек сходимости степенного ряда. Геометрическая иллюстрация теоремы состоит в следующем. Если степенной ряд сходится в точке x_0, то во всех точках интервала $(-|x_0|;|x_0|)$ ряд сходится абсолютно, а если ряд расходится в точке x_1, то он расходится во всех точках множества $(-\infty;-|x_1|) \cup (|x_1|;+\infty)$.

Радиусом сходимости степенного ряда называется такое число *R*, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится. Интервал $(-R;R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Из теоремы Абеля фактически следует, что радиус сходимости существует. Если радиус сходимости $R = 0$, то степенной ряд сходится только в одной точке $x = 0$. Если радиус сходимости $0 < R < \infty$, то степенной ряд сходится на интервале $(-R;R)$. В точках $x = -R, x = R$ ряд может сходиться и расходиться, для этих точек необходимы дополнительные исследования. Если радиус сходимости $R = \infty$, то степенной ряд сходится на всей числовой оси.

Следовательно, областью сходимости может быть или единственная точка $x = 0$, или интервалы $(-R;R)$, $(-R;R]$, $[-R;R)$, $[-R;R]$, или вся числовая прямая.

Радиус сходимости степенного ряда можно находить с помощью признаков Д'Аламбера и Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

►**Пример 18.** Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^n x^n = x - (2x)^2 + (3x)^3 - \cdots.$$

Коэффициент общего члена ряда $a_n = (-1)^{n-1} n^n$ и $|a_n| = n^n$. Радиус сходимости найдем по признаку Коши:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Следовательно, ряд сходится только в точке $x=0$.

◄

►**Пример 19.** Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots.$$

Коэффициенты этого ряда положительны: $a_n=\frac{1}{n}$. Радиус сходимости найдем по признаку Д'Аламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Значит, ряд сходится на интервале $(-1;1)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При подстановке $x=-1$ в степенной ряд получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница.

При $x=1$ получим гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots,$$

который расходится.

Следовательно, областью сходимости ряда является промежуток $[-1;1)$.

◄

►**Пример 20.** Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots.$$

Коэффициенты этого ряда положительны: $a_n=\frac{1}{n!}$. Радиус сходимости найдем по признаку Д'Аламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Значит, ряд сходится на всей числовой прямой.

◄

►**Пример 21.** Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}=\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3}+\cdots.$$

После замены переменной $t=x-1$ получим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n2^n}$.

Коэффициенты этого ряда: $a_n=\frac{1}{n2^n}$. Радиус сходимости найдем по признаку Д'Аламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n2^n}:\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n}=2.$$

Значит, ряд сходится на интервале $(-2;2)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала. При $t=-2$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Это знакочередующийся ряд, который сходится в соответствии с признаком Лейбница. При $t=2$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Следовательно, областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n2^n}$ является промежуток $[-2;2)$, т.е. ряд сходится при всех $t\in[-2;2)$.

Для исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$ областью сходимости является промежуток $[-1;3)$, этот ряд сходится при любых $x\in[-1;3)$.

◄

3. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.1-1.10, применяя частичные суммы ряда, найти сумму ряда или установить его расходимость.

1.1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$.

1.2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+3)}$.

1.3. $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)$.

1.4. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}7$

1.5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

1.6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

1.7. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9k^2+3k-2}$.

1.8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^2-8k-3}$.

1.9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}}$.

1.10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{5^{k-1}}$.

В задачах 1.11-1.20 исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости числовых рядов. Найти предел общего члена ряда: $\lim\limits_{k\to\infty}u_k$. Если $\lim\limits_{k\to\infty}u_k\neq 0$, то ряд расходится

1.11. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k+1}{6k+2}$.

1.12. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k-5}{7k+3}$.

1.13. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k+2^k}{2^k}$.

1.14. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k-7}{\sqrt{25k^2+13k+1}}$.

1.15. $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k^2+1}{k+1}$.

1.16. $\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{1}{\sqrt{k^2+k+1}}$.

1.17. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k$.

1.18. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k+5}{4k+1}\right)^{4k+3}$.

1.19. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[k]{5}}$.

1.20. $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{5k+7}{3k+1}$.

В задачах 1.21-1.30 исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения числовых рядов. Указать общий член ряда, с которым выполняется сравнение.

1.21. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

1.22. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+2}$.

1.23. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k+\sqrt{k}}{k^2+k+1}$.

1.24. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4k^2+3k+1}}$.

1.25. $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k+1}$.

1.26. $\sum_{k=1}^{\infty}tg^2\frac{1}{\sqrt{k}}$.

1.27. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{3^{2k}+2}$.

1.28. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k+5^k}$.

1.29. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7^k+3}{5^k+4}$.

1.30. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+7}{3^k+5}$.

В задачах 1.31-1.40 исследовать сходимость ряда, применяя признак Д'Аламбера. Указать значение $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1.31. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3^k}$.

1.32. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^3}$.

1.33. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{k!}$.

1.34. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{5^k}$.

1.35. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)5^{2k-1}}$.

1.36. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k-1)5^k}$.

1.37. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{3^{k+1}(2k)!}$.

1.38. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k!)^2}$.

1.39. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{5^k k!}$.

1.40. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k}$.

В задачах 1.41-1.50 исследовать сходимость ряда, применяя признак Коши. Указать значение $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$.

1.41. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{3k+4}\right)^k$.

1.42. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7k+1}{k+4}\right)^k$.

1.43. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{3^k}$.

1.44. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}$.

1.45. $\sum_{k=1}^{\infty}\cos^k\frac{1}{2k-1}$.

1.46. $\sum_{k=1}^{\infty}arctg^k\frac{1}{k}$.

1.47. $\sum_{k=1}^{\infty}2^k\left(\frac{k+1}{k+3}\right)^{k^2}$.

1.48. $\sum_{k=1}^{\infty}3^k\left(\frac{k-1}{k+2}\right)^{k(k+1)}$.

1.49. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^k(k+1)}{k^k}$.

1.50. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^k(2k-1)}{k^k}$.

В задачах 1.51-1.60 исследовать сходимость ряда, применяя интегральный признак. Указать значение $\int_1^{\infty}u(x)dx$.

1.51. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

1.52. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

1.53. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$.

1.54. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\sqrt[3]{k}}$.

1.55. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+4k+5}$.

1.56. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+4k+3}$.

1.57. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$.

1.58. $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{1}{k\ln k\ln\ln k}$.

1.59. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^p}, p>0$.

1.60. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\ln k}}{k}$.

В задачах 1.61-1.70 исследовать сходимость знакочередующегося ряда. Указать применяемый признак.

1.61. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}}$.

1.62. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2\sqrt[3]{k}}$.

1.63. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

1.64. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k}}$.

1.65. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$.

1.66. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2+3k+2}$.

1.67. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

1.68. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k+2^k}$.

1.69. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k\ln^2 k}$.

1.70. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}$.

В задачах 1.71-1.80 найти область сходимости степенного ряда.

1.71. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{3^k}$.

1.72. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^{2k}}$.

1.73. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{\sqrt[3]{k}}$.

1.74. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{\sqrt{k}}$.

1.75. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k 3^k}{k+1}x^k$.

1.76. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k k}{2^k}x^k$.

1.77. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^2}{k!}x^k$.

1.78. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k!}{3^k}x^k$.

1.79. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k-1)2^k}(x-1)^k$.

1.80. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k 3^k}{k}(x+2)^k$.

Ответы

1.1. $\dfrac{3}{4}$. **1.2**. $\dfrac{11}{18}$. **1.3**. Расходится. **1.4**. Расходится. **1.5**. $\dfrac{1}{2}$.**1.6**. $\dfrac{1}{3}$. **1.7**. $\dfrac{1}{6}$. **1.8**. $\dfrac{1}{4}$. **1.9**. $\dfrac{4}{3}$. **1.10**. $\dfrac{11}{4}$. **1.11**. $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{3k+1}{6k+2}=\dfrac{1}{2}$, ряд расходится. **1.12**. $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{4k-5}{7k+3}=\dfrac{4}{7}$, ряд расходится. **1.13**. $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{3^k+2^k}{2^k}=\infty$, ряд расходится. **1.14**. $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{4k-7}{\sqrt{25k^2+13k+1}}=\dfrac{4}{5}$, ряд расходится. **1.15**.

$\lim\limits_{k\to\infty}\sin\dfrac{k^2+1}{k+1}$ не существует, ряд расходится. **1.16**. $\lim\limits_{k\to\infty}\cos\dfrac{1}{\sqrt{k^2+k+1}}=1$, ряд расходится.

1.17. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^k=e$, ряд расходится. **1.18**. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{4k+5}{4k+1}\right)^{4k+3}=e^4$, ряд расходится.

1.19. $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[k]{5}}$ не существует, ряд расходится. **1.20**. $\lim\limits_{k\to\infty}\ln\dfrac{5k+7}{3k+1}=\ln\dfrac{5}{3}$, ряд расходится.

1.21. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}>\dfrac{1}{k},k>1$, ряд расходится.**1.22**. $\dfrac{1}{\sqrt{k+2}}>\dfrac{1}{k},k>4$ ряд расходится.

1.23. $\dfrac{1}{k}$, ряд расходится. **1.24**. $\dfrac{1}{k}$, ряд расходится. **1.25**. $\dfrac{1}{k}$, ряд расходится.**1.26**. $\dfrac{1}{k}$, ряд расходится. **1.27**. $\dfrac{1}{3^k}$, ряд сходится. **1.28**. $\dfrac{1}{5^k}$, ряд сходится. **1.29**. $\left(\dfrac{7}{5}\right)^k$, ряд расходится.

1.30. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, ряд сходится. **1.31**. $\dfrac{1}{3}$, ряд сходится. **1.32**. 2, ряд расходится. **1.33**. 0, ряд сходится. **1.34**. ∞, ряд расходится. **1.35**. $\dfrac{1}{25}$, ряд сходится. **1.36**. $\dfrac{1}{5}$, ряд сходится. **1.37**.0, ряд сходится. **1.38**. 4, ряд расходится. **1.39**. $\dfrac{e}{5}$, ряд сходится. **1.40**. $\dfrac{2}{e}$, ряд сходится.

1.41. $\dfrac{1}{3}$, ряд сходится. **1.42**. 7, ряд расходится. **1.43**. $\dfrac{1}{3}$, ряд сходится. **1.44**. $\dfrac{1}{5}$, ряд сходится. **1.45**. 1, признак Коши не дает результата. **1.46**. 0, ряд сходится. **1.47**. $\dfrac{2}{e^2}$, ряд сходится. **1.48**. $\dfrac{3}{e^3}$, ряд сходится. **1.49**. 0, ряд сходится. **1.50**. 0, ряд сходится. **1.51**. 1, ряд сходится. **1.52**. ∞, ряд расходится. **1.53**. 2, ряд сходится. **1.54**. 3, ряд сходится. **1.55**. $\dfrac{\pi}{2}-arctg3$, ряд сходится. **1.56**. ∞, ряд расходится. **1.57**. ∞, ряд расходится. **1.58**. ∞, ряд расходится. **1.59**. Ряд расходится при $0<p\le 1$ и сходится при $p>1$. **1.60**. ∞, ряд расходится. **1.61**. Сходится абсолютно, интегральный признак. **1.62**. Сходится абсолютно, интегральный признак. **1.63**. Сходится условно, признак Лейбница. **1.64**. Сходится условно, признак Лейбница. **1.65**. Сходится абсолютно, интегральный признак или признак сравнения. **1.66**. Сходится абсолютно, интегральный признак или признак сравнения. **1.67**. Сходится абсолютно, ряд геометрической прогрессии. **1.68**. Сходится абсолютно, признак сравнения с рядом геометрической прогрессии. **1.69**. Сходится абсолютно, интегральный признак. **1.70**. Сходится абсолютно, признак Д’Аламбера.

1.71. $(-3;3)$. **1.72**. $(-4;4)$. **1.73**. $[-1;1)$.**1.74**. $[-1;1)$.**1.75**. $(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}]$.**1.76**. $(-2;2)$. **1.77**. $(-\infty;\infty)$.

1.78. 0. **1.79**. $(-1;3]$. **1.80**. $(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}]$.

Литература

1. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 2, Мн., БГУ, 1998 г.
2. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Т. 1, Мн., Высш. школа, 1988 г.
3. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Т. 2, Мн., Высш. школа, 1988 г.
4. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс, – М.: 2001 г
5. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред проф. В.И. Ермакова, 2007 г.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.Г. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 2001г.
7. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. 1999 г.
8. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. Ч. 2. М.,2001 г.