§5. ПОНЯТИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА. ПЛОСКОСТИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ. АФФИННЫЕ И ДЕЗАРГОВЫ ПЛОСКОСТИ

Прежде чем продолжить наши рассмотрения, подведем некоторые итоги. Напомним, что, пытаясь определить предмет изучения аналитической геометрии и применяемые при этом методы исследований, мы, с одной стороны, вычленили из множества свойств плоскости, изучающейся в школьном курсе геометрии, три: $\mathbf{AP_1}$ – $\mathbf{AP_3}$ (см. § 1) и, приняв их за аксиомы, определили понятие плоскости аффинного типа. С другой стороны, обсудили метод координат, как основной метод изучения всякой такой плоскости. В процессе наших обсуждений было выяснено, что возможность использования этого метода (по крайней мере, в привычной нам форме) зависит от существования в данной плоскости "большого" количества гомотетий и параллельных переносов, что эквивалентно ее дезарговости. Мы выяснили также, что не все плоскости аффинного типа дезарговы, и потому свойство дезарговости определяет границы применимости метода координат. На самом деле, недезарговы плоскости также могут быть координатизированы, но, как уже отмечалось в § , возникающие в этой ситуации в качестве координат объекты уже сильно отличаются по своим свойствам от чисел или их обобщений (элементов полей и тел). Изучение недезарговых плоскостей выходит за рамки нашего курса, поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь дезарговых плоскостей. С каждой дезарговой плоскостью $\mathcal{A}$ при помощи метода координат можно связать изоморфную ей плоскость $\mathrm{A}^2(D_{\mathcal{A}})$ над телом $D_{\mathcal{A}}$, ассоциированным с $\mathcal{A}$ (§). Помимо этого, ранее (§ 13) с каждой плоскостью параллельных переносов $\mathcal{A}$ (в частности, с дезарговой плоскостью) мы связали векторное пространство $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ над телом $D_{\mathcal{A}}$. Имея ввиду в дальнейшем не только изучение аффинной планиметрии (но и аффинной стереометрии и более общих геометрических систем), мы введем в рассмотрение так называемые *аффинные пространства*, определение которых получается методом намеренно неполного знания на основе плоскостей параллельных переносов.

Обсудим вначале свойства, которые будут положены в основу определения аффинных пространств. Напомним, что любой направленный отрезок (A,B) плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$ определяет вектор $\overrightarrow{AB}$, т.е. элемент векторного пространства $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, как класс направленных отрезков, эквиполлентных отрезку (A,B) (§ 7). Тем самым задается отображение:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}(\mathcal{A}),\ (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Кроме того, если $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ – некоторый вектор и A – произвольная точка плоскости $\mathcal{A}$, то $\vec{a}$ содержит направленный отрезок с началом в точке A, причем конец этого направленного отрезка (точка B) определяется однозначно. Это означает, что определено отображение:

$$\mathcal{A} \times \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A},\ (A, \overrightarrow{AB}) \mapsto B. \qquad (2)$$

Наконец, для любых точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ имеет место соотношение

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \qquad (3)$$

Свойства (1), (2), (3) кладутся в основу определения аффинного пространства.

Определение 5.1. *Пусть* $\mathbf{V}$ *– векторное пространство над телом* $\mathbf{D}$. *Непустое множество* $\mathcal{A}$ (*элементы которого будут называться* ***точками***) *называется* ***аффинным пространством, связанным с векторным пространством*** $\mathbf{V}$, *если:*

$\mathcal{A}_{\mathrm{I}}$. *Задано отображение*

$$\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V},\ (A, B) \mapsto \Phi(A, B). \qquad (4)$$

Элемент $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *называется обычно* ***направленным отрезком*** (A *–* ***начало****,* B *–* ***конец*** *отрезка* (A, B)); *образ* $\Phi(A, B)$ *обычно* (*как и в случае плоскости параллельных переносов*) *обозначается* $\overrightarrow{AB}$ *и называется* ***вектором,*** *определяемым направленным отрезком* (A, B);

$\mathcal{A}_{\mathrm{II}}$. *Задано отображение*

$$\Psi :\ \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A},$$

сопоставляющее паре $(A, \vec{a})$ *точку* B *такую, что* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. *Отображение* Ψ *называется* ***откладыванием вектора*** *от заданной точки* (*его результат есть конец направленного отрезка, которому соответствует данный вектор*);

$\mathcal{A}_{\mathrm{III}}$. *Для любых точек* $A, B, C \in \mathcal{A}$ *верно* ***соотношение Шаля****:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Иногда, чтобы подчеркнуть, что при одних и тех же множествах $\mathcal{A}$ и $\mathbf{V}$ в зависимости от отображения Φ могут возникать разные аффинные пространства, говорят об аффинном пространстве $\mathcal{A}$, связанном с $\mathbf{V}$, *относительно отображения* Φ. Об отображении Ψ при этом можно не упоминать, так как существование отображения Ψ, связанного с отображением Φ так, как предписывает аксиома $\mathcal{A}_{\mathrm{II}}$, означает по существу то, что Φ обладает некоторыми "хорошими" свойствами (см. ниже утверждение 5.3).

Определение 5.2. Размерностью аффинного пространства, *связанного с конечномерным векторным пространством* $\mathbf{V}$, *называется размерность пространства* $\mathbf{V}$; n*-мерное аффинное пространство обозначается* $\mathcal{A}^n$. *Если* $\mathbf{V}$ *бесконечномерно, то аффинное пространство* $\mathcal{A}$ *также называется* **бесконечномерным**. *Нуль-мерное аффинное пространство* $\mathcal{A}^0$ *называется* ***аффинной точкой***, *1-мерное аффинное пространство* $\mathcal{A}^1$ *называется* ***аффинной прямой***.

Замечание 5.1. Как отмечалось выше, обозначение $\overrightarrow{AB}$ для вектора $\Phi(A,B)$, по виду совпадающее с обозначением класса эквиполлентных отрезков плоскости параллельных переносов, есть на самом деле лишь условность, позволяющая подчеркнуть близость этих понятий в определенном контексте (но не их совпадение). Ниже (следствие 1) будет показано, что для любого векторного пространства существует аффинное пространство, связанное с ним. Поэтому векторы, определяемые парами точек аффинного пространства, могут иметь различную природу, они могут являться числами, многочленами, функциями, матрицами и т.д. (см. примеры векторных пространств в §§ 3.1. и 3.2).

Приведем некоторые следствия, непосредственно вытекающие из определения аффинного пространства.

Утверждение 5.1. *Пусть* $A,B\in\mathcal{A}$. *Тогда* $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ *тогда и только тогда, когда* $A=B$.

Доказательство. Если $A=B$, то виду соотношения Шаля получаем $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{AA}$, откуда $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Из доказанного вытекает, что для любой точки $A\in\mathcal{A}$ верно равенство $\Psi(A,\vec{0})=A$. Если теперь $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, т.е. $\Psi(A,\vec{0})=B$, то $A=B$.◄

Утверждение 5.2. *Для любых точек* $A,B\in\mathcal{A}$ *верно равенство* $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Доказательство. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ ввиду соотношения Шаля и утверждения 1. Следовательно, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.◄

С помощью отображения (4), зафиксировав точку O, построим отображение

$$\Phi_O:\mathcal{A}\to\mathbf{V}, M\mapsto\overrightarrow{OM}. \tag{5}$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется ***радиус-вектором*** точки M.

Утверждение 5.3. *Для любой точки* $O \in \mathcal{A}$ *отображение* (5) *является биекцией.*

Доказательство. Пусть $\vec{a} \in \mathbf{V}$, тогда для $M = \Psi(O, \vec{a})$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, следовательно, отображение Φ_O сюръективно. Если $\Phi_O(A) = \Phi_O(B)$, т.е. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, то применяя утверждения 5.2 и соотношение Шаля, получаем, что $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Утверждение 5.1 теперь влечет, что $A = B$, т.е. Φ_O инъективно.◄

Примеры аффинных пространств

Пример 5.1. Пусть $\{A\}$ – одноэлементное множество, $\mathbf{V} = \{\vec{0}\}$ – нулевое векторное пространство над телом $\mathbf{D}$. Зададим отображения Φ и Ψ следующим (единственно возможным) образом:

$$\Phi(A, A) = \vec{0}, \ \Psi(A, \vec{0}) = A.$$

Очевидно, выполняются условия $\mathcal{A}_{\mathrm{I}}$ – $\mathcal{A}_{\mathrm{III}}$. Следовательно, *любое одноэлементное множество может рассматриваться как нульмерное аффинное пространство* (*аффинная точка*), *связанное с нулевым векторным пространством над произвольным телом* $\mathbf{D}$.

Пример 5.2. Любая плоскость параллельных переносов $\mathcal{A}$ может рассматриваться как аффинное пространством, связанное с векторным пространством $\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Отображения Φ и Ψ в этом случае определяются следующим образом:

$$\Phi(A, B) = \overrightarrow{AB}, \ \Psi(A, \overrightarrow{AB}) = B.$$

В случае, когда $\mathcal{A}$ – дезаргова плоскость, векторное пространство $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ двумерно (утверждение 14.2), т.е. *любая дезаргова плоскость может рассматриваться как двумерное аффинное пространство.*

Пример 5.3. Любая прямая l плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$ может рассматриваться как аффинное пространство, связанное с векторным пространством $\mathbf{V}(\pi)$, где π – направление плоскости $\mathcal{A}$, определяемое прямой l. В случае, когда $\mathcal{A}$ – дезаргова плоскость, векторное пространство $\mathbf{V}(\pi)$ одномерно (упражнение 14.4), т.е. *любая прямая дезарговой плоскости может рассматриваться как аффинная прямая*.

Таким образом, для векторных пространств размерностей 0,1,2 аффинные пространства, связанные с ними, существуют. Оказывается, что это же верно для любого векторного пространства. Справедливость этого утверждения мы установим немного ниже. Сначала зададимся следующим вопросом: каким должно быть множество $\mathcal{A}$ (при заданном векторном пространстве $\mathbf{V}$), чтобы его можно было рассматривать как аффинное пространство, связанное с $\mathbf{V}$? Одно необходимое условие, которому должно удовлетворять множество $\mathcal{A}$, определяется утверждением 5.3: между множествами $\mathcal{A}$ и $\mathbf{V}$ должна существовать биекция $\tau:\mathcal{A}\to\mathbf{V}$. Покажем, что это условие и достаточно.

Утверждение 5.4. *Пусть* $\mathbf{V}$ – *векторное пространство над телом* $\mathbf{D}$ *и* $\tau:\mathcal{A}\to\mathbf{V}$ – *биективное отображение. Определим отображение*

$$\Phi_\tau:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbf{V},\ (A,B)\mapsto\tau(B)-\tau(A).$$

Тогда $\mathcal{A}$ – *аффинное пространство, связанное с* $\mathbf{V}$ *относительно отображения* Φ_τ.

Доказательство. Зададим отображение

$$\Psi_\tau:\mathcal{A}\times\mathbf{V}\to\mathcal{A},\ (A,\vec{a})\mapsto B=\tau^{-1}(\tau(A)+\vec{a}).$$

Отображения Φ_τ и Ψ_τ связаны так, как требует аксиома $\mathcal{A}_{\mathbf{II}}$. Действительно,

$$\overrightarrow{AB}=\Phi_\tau(A,B)=\tau(B)-\tau(A)=\tau(A)+\vec{a}-\tau(A)=\vec{a}.$$

Убедимся, что выполняется соотношение Шаля:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\tau(B)-\tau(A)+\tau(C)-\tau(B)=\tau(C)-\tau(A)=\overrightarrow{AC}.$$

Итак, для множеств $\mathcal{A}$ и $\mathbf{V}$ выполняются свойства, сформулированные в аксиомах $\mathcal{A}_{\mathbf{I}}-\mathcal{A}_{\mathbf{III}}$, т.е. $\mathcal{A}$ есть аффинное пространство, связанное с $\mathbf{V}$. ◄

Объединяя два последних утверждения, получаем ответ на заданный выше вопрос.

<u>**Теорема 5.1.**</u> *Пусть* $\mathbf{V}$ – *векторное пространство над телом* $\mathbf{D}$. *Множество* $\mathcal{A}$ *может рассматриваться как аффинное пространство, связанное с* $\mathbf{V}$, *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *и* $\mathbf{V}$ *равномощны. Для любой биекции* $\tau:\mathcal{A}\to\mathbf{V}$ *структура аффинного пространства в множестве* $\mathcal{A}$ *задается отображением*

$$\Phi_\tau:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbf{V},\ (A,B)\mapsto\tau(B)-\tau(A).$$

Следствие 5.1. (i) *Для любого векторного пространства существует аффинное пространство, связанное с ним, в частности, существуют аффинные пространства любой размерности;*

(ii) *Любое векторное пространство* $\mathbf{V}$ *может рассматриваться как аффинное пространство, связанное с* $\mathbf{V}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{V}$ – произвольное векторное пространство над телом $\mathbf{D}$. Положим $\mathcal{A}=\mathbf{V}$, т.е. будем рассматривать каждый элемент множества $\mathbf{V}$ и как вектор и как точку. Рассмотрим в качестве биекции $\tau:\mathcal{A}\to\mathbf{V}$ тождественное отображение $\mathbf{Id}:\mathcal{A}\to\mathbf{V},\ \vec{a}\mapsto\vec{a}$. По теореме 5.1

множество $\mathcal{A}$ (совпадающее с $\mathbf{V}$) может рассматриваться как аффинное пространство, связанное с $\mathbf{V}$. Отображения Φ и Ψ определяются в этом случае следующим образом:

$$\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{b} - \vec{a}; \quad \Psi : \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}, (\vec{a}, \vec{c}) \mapsto \vec{a} + \vec{c}.$$

Приведенное рассуждение, очевидно, доказывает оба пункта следствия.◄

В частности, если в качестве векторного пространства $\mathbf{V}$, фигурирующего в доказательстве последнего следствия, взять векторное пространство строк $\mathbf{D^n} = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbf{D}\}$, то множество $\mathbf{D^n}$ можно рассматривать как аффинное пространство, связанное с векторным пространством $\mathbf{D^n}$. В этом случае $\mathbf{D^n}$ называется ***n-мерным арифметическим аффинным пространством*** над телом $\mathbf{D}$.

Итак, каждое векторное пространство может рассматриваться как аффинное, связанное с самим собой. Эта связь между пространствами допускает обращение, т.е. всякое аффинное пространство можно рассматривать как некоторое векторное пространство.

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– аффинное пространство, связанное с векторным пространством* $\mathbf{V}$ *над телом* $\mathbf{D}$. *Тогда* $\mathcal{A}$ *можно рассматривать как векторное пространство* $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, *линейно изоморфное пространству* $\mathbf{V}$.

Доказательство. Положем $\mathcal{A} = \mathbf{V}(\mathcal{A})$ и определим операции сложения и умножения на скаляры в $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ следующим образом. Зафиксируем в $\mathcal{A}$ точку O; пусть $\Phi_O : \mathcal{A} \to \mathbf{V}$ – отображение, ставящее в соответствие точке $M \in \mathcal{A}$ ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Как известно (утверждение 5.3), Φ_O – биекция.

Суммой $A + B$ векторов $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ назовем вектор

$$\Phi_O^{-1}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Произведением λA скаляра $\lambda \in \mathbf{D}$ на вектор $A \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ назовем вектор

$$\Phi_O^{-1}(\lambda \overrightarrow{OA}).$$

Легко видеть, что с определенными выше операциями множество $\mathcal{A}$ является векторным пространством, линейно изоморфным пространству $\mathbf{V}$.◄

Отметим, что отображение Φ_O зависит от точки O и поэтому, если $O_1 \neq O_2$, то операции сложения и умножения на скаляры, превращающие

$\mathcal{A}$ в $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, различны, поэтому точнее было бы пространство $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, построенное при доказательстве теоремы 2, обозначать $\mathbf{V}(\mathcal{A},O)$.

Определим важное понятие *подпространства* аффинного пространства, обобщающее понятия прямых и плоскостей в трехмерном пространстве евклидовой геометрии, изучаемой в школе.

При введении этого понятия будем руководствоваться общим правилом, принятым в математике в подобных ситуациях. Мы сталкивались с ними при определении понятий *подгруппы*, а также *подпространства векторного пространства.* Известно, что не всякое непустое подмножество $\mathbf{H}$ группы $\mathbf{G}$ является группой относительно ограничения операции умножения на это подмножество, и только в случае, когда это имеет место, $\mathbf{H}$ называется подгруппой. Аналогично, не всякое непустое подмножество $\mathbf{W}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ является векторным пространством относительно ограничения на него операций сложения и умножения на скаляры, и только в случае, когда это имеет место, $\mathbf{W}$ называется подпространством. Точно также, не всякое непустое подмножество $\mathcal{B}$ аффинного пространства $\mathcal{A}$ является аффинным пространством относительно ограничения на него отображения Φ (приведите примеры!). В том случае, когда это так (т.е. ограничение Φ на $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ задает в $\mathcal{B}$ структуру аффинного пространства), говорят, что $\mathcal{B}$ – ***подпространство аффинного пространства*** $\mathcal{A}$. При таком подходе к определению подпространства аффинного пространства получаем, во-первых, что множество

$$\mathbf{W} = \Phi_{|\mathcal{B}\times\mathcal{B}}(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$$

является подпространством векторного пространства $\mathbf{V}$, а во-вторых, что для фиксированной точки $M_O \in \mathcal{B}$ отображение

$$\Phi_{M_0|\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathbf{W}, M \mapsto \overrightarrow{M_0M}$$

является биекцией. Таким образом, $\mathcal{B} = \Phi_{M_0}^{-1}(\mathbf{W})$. С учетом этих замечаний мы можем сформулировать определение подпространства аффинного пространства следующим образом.

Определение 5.3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– аффинное пространство, связанное с векторным пространством* $\mathbf{V}$; M_0 *– некоторая точка пространства* $\mathcal{A}$; $\mathbf{W}$ *– подпространство векторного пространства* $\mathbf{V}$. ***Подпространством*** *аффинного пространства* $\mathcal{A}$ *называется множество*

$$\mathcal{B} = \Phi_{M_0}^{-1}(\mathbf{W}) = \{M \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{W}\}. \tag{6}$$

Для подпространства $\mathcal{B}$ *точка* M_0 *называется* ***начальной точкой**, а* $\mathbf{W}$ – ***направляющим пространством***.

Итак, подпространство аффинного пространства состоит из всех точек, получающихся откладыванием от фиксированной точки M_0 всевозможных векторов некоторого подпространства $\mathbf{W}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ (рис. 1).

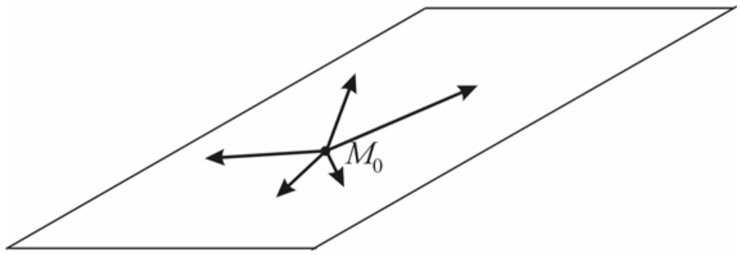

Рис. 1

Отметим некоторые свойства подпространства аффинного пространства.

1) Подпространство $\mathcal{B}=\Phi^{-1}_{M_0}(\mathbf{W})$ содержит точку M_0, так как $\overrightarrow{M_0M_0}=\vec{0}\in\mathbf{W}$.

2) Для любых точек $A,B\in\mathcal{B}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ принадлежит подпространству $\mathbf{W}$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM_0}+\overrightarrow{M_0B}=-\overrightarrow{M_0A}+\overrightarrow{M_0B}\in\mathbf{W}$. Это означает, что ограничение отображения Φ на $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ принимает значения в подпространстве $\mathbf{W}$.

3) Пусть $A\in\mathcal{B}$, $\vec{a}\in\mathbf{W}$. Отложим вектор $\vec{a}$ от точки A, т.е. рассмотрим точку $B\in\mathcal{A}$ такую, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Убедимся, что $B\in\mathcal{B}$. Действительно, $\overrightarrow{M_0B}=\overrightarrow{M_0A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{M_0A}+\vec{a}\in\mathbf{W}$. Это означает, что ограничение отображения Ψ на $\mathcal{B}\times\mathbf{W}$ принимает значения в $\mathcal{B}$.

Если к перечисленным свойствам добавить замечание о том, что для точек подпространства $\mathcal{B}$ выполняется соотношение Шаля, то можно сделать вывод о том, что верно следующее утверждение.

Утверждение 5.4. *Подпространство* $\mathcal{B}=\Phi^{-1}_{O}(\mathbf{W})$ *аффинного пространства* $\mathcal{A}$ *является аффинным пространством, связанным с векторным пространством* $\mathbf{W}$, *при ограничении на* $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ *отображения* Φ *и ограничении на* $\mathcal{B}\times\mathbf{W}$ *отображения* Ψ.

Отметим, что если $\mathbf{W}=\{\vec{0}\}$, то $\mathcal{B}=\{M_0\}$ – точка в $\mathcal{A}$; если $\dim\mathbf{W}=1$, то $\mathcal{B}$ – аффинная прямая в $\mathcal{A}$; если $\mathbf{W}=\mathbf{V}$, то $\mathcal{B}=\mathcal{A}$.

В общем случае, если подпространство $\mathcal{B}$ задается формулой (6), то $\mathcal{B}$ называется также ***плоскостью*** в аффинном пространстве $\mathcal{A}$ с ***начальной точкой*** M_0 и ***направляющим пространством*** $\mathbf{W}$. Если $\dim \mathbf{W} = k$, то $\mathcal{B}$ называется k***-мерной плоскостью*** в аффинном пространстве $\mathcal{A}$. В дальнейшем мы будем придерживаться этой терминологии, носящей более геометрический характер[1]. Плоскость в аффинном пространстве с начальной точкой M_0 и направляющим подпространством $\mathbf{W}$ будем обозначать $\mathcal{A}(M_0, \mathbf{W})$.

Важную роль в аффинном пространстве (например, при задании произвольной плоскости (см. §) играют *гиперплоскости.*

Определение 5.4. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– аффинное пространство, связанное с векторным пространством* $\mathbf{V}$. *Плоскость* $\mathcal{B}$ *в пространстве* $\mathcal{A}$ *называется* ***гиперплоскостью****, если ее направляющее пространство* $\mathbf{W}$ *имеет коразмерность* 1 *в пространстве* $\mathbf{V}$.

В частности, гиперплоскость в n-мерном аффинном пространстве – это $(n-1)$ - мерная плоскость.

Следующее утверждение показывает, что в качестве начальной точки плоскости в аффинном пространстве можно брать любую точку этой плоскости, сохраняя направляющее пространство.

Утверждение 5.5. *Пусть* $\mathcal{B} = \Phi_{M_0}^{-1}(\mathbf{W})$ *– плоскость в аффинном пространстве* $\mathcal{A}$. *Тогда* $\Phi_M^{-1}(\mathbf{W}) = \mathcal{B}$ *для любой точки* $M \in \mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{B}$. Тогда $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0A} = -\overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{M_0A} \in \mathbf{W}$, т.е. $A \in \Phi_M^{-1}(\mathbf{W})$. Обратно, пусть $A \in \Phi_M^{-1}(\mathbf{W})$. Тогда $\overrightarrow{M_0A} = \overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{MA} \in \mathbf{W}$, т.е. $A \in \mathcal{B}$. ◄

Утверждение 5.6. *Пусть* $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ *– семейство плоскостей в аффинном пространстве* $\mathcal{A}$ *и* $\forall i \in I$ $\mathbf{W}_i$ *– направляющее пространство плоскости* $\mathcal{B}_i$. *Тогда либо* $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{B}_i = \varnothing$, *либо* $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{B}_i$ *– плоскость в пространстве* $\mathcal{A}$ *с направляющим пространством* $\mathbf{W} = \bigcap\limits_{i\in I}\mathbf{W}_i$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{B}_i \neq \varnothing$ и $M_0 \in \mathcal{B}$. Легко проверить, что $\mathcal{B}$ является плоскостью в $\mathcal{A}$ с начальной точкой M_0 и направляющим пространством $\mathbf{W} = \bigcap\limits_{i\in I}\mathbf{W}_i$. ◄

---

[1] Иногда k – мерные плоскости в аффинном пространстве называются также *линейными многообразиями* размерности k.

В аффинном пространстве можно определить аналог линейной оболочки подмножества векторов векторного пространства.

Определение 5.5. *Пусть* $S-$ *непустое подмножество аффинного пространства* $\mathcal{A}$. ***Аффинной оболочкой*** $Aff(S)$ *множества* S *называется наименьшая по включению плоскость в* $\mathcal{A}$, *содержащая* S.

Аффинная оболочка существует для любого непустого подмножества S. Действительно, семейство $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$, $S\subset\mathcal{B}_i\ \forall i\in I$, всех плоскостей в $\mathcal{A}$, содержащих S, не пусто, поскольку все аффинное пространство $\mathcal{A}$ содержит S, т.е. является одной из таких плоскостей. Рассмотрим пересечение этого семейства $\mathcal{B}=\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{B}_i$. Поскольку множество S содержится в каждой плоскости $\mathcal{B}_i$, то $S\subset\mathcal{B}$ и, следовательно, $\mathcal{B}\neq\varnothing$. Согласно утверждению 5, $\mathcal{B}=\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{B}_i-$ плоскость в $\mathcal{A}$, содержащая множество S. Кроме того, по определению, плоскость $\mathcal{B}$ содержится в каждой плоскости, содержащей S, т.е. является наименьшей из таких плоскостей. Таким образом, $\mathcal{B}=Aff(S)$.

Рассмотрим подробнее аффинную оболочку конечного множества точек, содержащего $k+1$ точку: $S=\{M_0,...,M_k\}$, $k\in\{0,1,...\}$. Пусть $\mathcal{B}-$ плоскость с начальной точкой M_0 и направляющим подпространством $L(\overrightarrow{M_0M_1},...,\overrightarrow{M_0M_k})$, являющимся линейной оболочкой векторов $\overrightarrow{M_0M_1},...,\overrightarrow{M_0M_k}$. Плоскости $\mathcal{B}$, очевидно, принадлежат все точки $M_0,...,M_k$, а сама она содержится в любой плоскости, проходящей через точки $M_0,...,M_k$. Следовательно, $\mathcal{B}=Aff(S)$, в частности, направляющее подпространство аффинной оболочки $Aff(M_0,...,M_k)$ совпадает с линейной оболочкой $L(\overrightarrow{M_0M_1},...,\overrightarrow{M_0M_k})$. Отсюда следует, что $\dim Aff(M_0,...,M_k)\le k$. При максимально возможном значении этой размерности используют следующую терминологию.

Определение 5.6. *Точки* $M_0,...,M_k$ *аффинного пространства* $\mathcal{A}$ *называются* ***аффинно независимыми*** (*или* ***точками общего положения***), *если* $\dim Aff(M_0,...,M_k)=k$.

Приведем несколько простых утверждений об аффинной независимости точек.

1) Если $S=\{M_0,...,M_k\}$ – аффинно независимое множество точек, то любое непустое подмножество S аффинно независимо.

2) Две (различные) точки M_0, M_1 аффинно независимы.

3) Три точки M_0, M_1, M_2 аффинно независимы тогда и только тогда, когда они не лежат на одной прямой. Четыре точки M_0, M_1, M_2, M_3 аффинно независимы тогда и только тогда, когда они не лежат в одной двумерной плоскости и т.д.

4) В n-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$ существуют $n+1$ точек общего положения.

Упражнение 5.1. *Докажите утверждения* 1) – 4).

В заключение параграфа рассмотрим связь между понятиями дезарговой плоскости и аффинной плоскости (аффинного пространства размерности 2). В примере 2 этого параграфа мы отмечали, что каждая дезаргова плоскость $\mathcal{A}$ является аффинным пространством, связанным с двумерным векторным пространством $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ над телом $D_{\mathcal{A}}$. Таким образом, дезаргова плоскость $\mathcal{A}$ является двумерной аффинной плоскостью. При этом множество прямых плоскости $\mathcal{A}$ как плоскости аффинного типа совпадает с множеством прямых плоскости $\mathcal{A}$, рассматриваемой как аффинная плоскость. Следующая теорема показывает, что верно и обратное.

Теорема 5.3. *Пусть $\mathcal{A}$ – аффинная плоскость, связанная с векторным пространством* $\mathbf{V}$ *над телом* $\mathbf{D}$. *Тогда $\mathcal{A}$ является дезарговой плоскостью, если в качестве ее прямых рассматривать все аффинные прямые* (*одномерные аффинные подпространства*) *в $\mathcal{A}$.*

Истинность этой теоремы будет непосредственным следствием ряда утверждений, доказываемых ниже. Далее для краткости прямая с начальной точкой M и направляющим пространством $\mathbf{W}$ будет обозначаться $M+\mathbf{W}$, а точка, получающая откладыванием вектора $\vec{a}\in\mathbf{V}$ от точки M, т.е. точка $\Psi(M,\vec{a})$, будет обозначаться $M+\vec{a}$.

Лемма 5.1. *Прямые $l_1 = M+\mathbf{W}$ и $l_2 = N+\mathbf{W}$ совпадают тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MN}\in\mathbf{W}$.*

Доказательство. Если $l_1 = l_2$, то, взяв в качестве начальной точки прямой точку M, получим в соответствии с определением 5.3 и формулой (6), что $\overrightarrow{MN}\in\mathbf{W}$.

Обратно, пусть $\overrightarrow{MN}\in\mathbf{W}$. Тогда, вновь используя формулу (6), получаем, что $N\in l_1$. Итак, точка N может быть взята в качестве начальной точки не только прямой l_2, но и прямой l_1. Теперь можно утверждать, что прямые l_1 и l_2 совпадают, поскольку они имеет одну и ту же начальную точку и одно и то же направляющее пространство.◄

Лемма 5.2. *Для любой пары* M, N *различных точек плоскости* $\mathcal{A}$ *существует единственная прямая, проходящая через них.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{W} = L(\overrightarrow{MN})$ – линейная оболочка вектора $\overrightarrow{MN}$. $\mathbf{W}$ – одномерное подпространство пространства $\mathbf{V}$ и прямая $l = M + \mathbf{W}$, очевидно, проходит через точки M и N. Пусть $l' = M + \mathbf{U}$ – какая-то прямая, проходящая через точки M и N. Тогда $\mathbf{U}$ – одномерное подпространство пространства $\mathbf{V}$, содержащее вектор $\overrightarrow{MN}$. Поскольку точки M и N различны, то вектор $\overrightarrow{MN}$ ненулевой и, следовательно, он может быть взят в качестве базиса пространства $\mathbf{U}$. Это означает, что $\mathbf{U} = L(\overrightarrow{MN}) = \mathbf{W}$. По лемме 5.1 получаем, что $l = l'$. ◄

Определение 5.7. *Две прямые* l_1, l_2 *аффинной плоскости* $\mathcal{A}$ *называются* ***параллельными*** $(l_1 \| l_2)$, *если* $l_1 = l_2$ *либо* $l_1 \bigcap l_2 = \varnothing$.

Лемма 5.3. *Для произвольной прямой* l *аффинной плоскости* $\mathcal{A}$ *и произвольной точки* $N \in \mathcal{A}$ *существует единственная прямая, параллельная* l *и проходящая через* N.

Доказательство. Пусть прямая l имеет вид $l = M + \mathbf{W}$, где $\mathbf{W}$ – одномерное подпространство пространства $\mathbf{V}$, с которым связана аффинная плоскость $\mathcal{A}$.

Существование. Рассмотрим прямую $l' = N + \mathbf{W}$ и убедимся что она параллельна l. Предположим, что у прямых l и l' есть общая точка P. Тогда прямые l и l' совпадают, так как по утверждению 5.5 точку P можно взять в качестве начальной точки каждой из прямых l и l', сохранив направляющее пространство $\mathbf{W}$. Следовательно, прямые l и l' либо совпадают, либо не пересекаются, т.е. параллельны.

Единственность. Допустим, что $l'' = N + \mathbf{U}$ – прямая, отличная от l', проходящая через точку N и параллельная l. Это означает, в частности, что $\mathbf{U} \neq \mathbf{W}$. Если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – базисные векторы пространств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$, то они линейно независимы и, следовательно, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ – базис пространства $\mathbf{V}$. Пусть

$$\overrightarrow{MN} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2, \ x, y \in \mathbf{D}. \tag{7}$$

Так как $x\vec{a}_1 \in \mathbf{W}$, то на прямой l лежит точка $P_1 = M + x\vec{a}_1$ $(\overrightarrow{MP_1} = x\vec{a}_1)$, а так как $-y\vec{a}_2 \in \mathbf{U}$, то на прямой l'' лежит точка $P_2 = N - y\vec{a}_2$ $(\overrightarrow{P_2N} = y\vec{a}_2)$. В силу равенства (7) имеем:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{P_2N}. \tag{8}$$

Из соотношения Шаля следует, что

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP_2}. \qquad (9)$$

Подставляя (8) в (9), получим, что

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + (\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{P_2N}) + \overrightarrow{NP_2} = (\overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MP_1}) + (\overrightarrow{P_2N} + \overrightarrow{NP_2}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

т.е. $P_1 = P_2$. Таким образом, прямые l и l'' пересекаются, а так как они параллельны, то $l = l''$, в частности, $\mathbf{U} = \mathbf{W}$. Получили противоречие, значит, предположение о существовании более чем одной прямой, параллельной данной, неверно.◄

Следствие 5.2. *Любая аффинная плоскость $\mathcal{A}$, связанная с векторным пространством $\mathbf{V}$, является плоскостью аффинного типа, если в качестве точек рассматривать точки множества $\mathcal{A}$, а в качестве прямых – прямые в $\mathcal{A}$ как в аффинном пространстве, т.е. подмножества вида $M + \mathbf{W}$, где M – произвольная точка $\mathcal{A}$, а $\mathbf{W}$ – одномерное подпространство пространства $\mathbf{V}$.*

Доказательство. Из лемм 5.2 и 5.3 вытекает, что для $\mathcal{A}$ истинны утверждения аксиом $\mathbf{AP_1}$ и $\mathbf{AP_{1II}}$. Осталось доказать что, если $l = M + \mathbf{W}$ – произвольная прямая, то существует точка плоскости $\mathcal{A}$, лежащая вне этой прямой. Ясно, что в качестве такой точки можно взять любую точку вида $M + \vec{a}$, где $\vec{a} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$. ◄

Поскольку аффинная плоскость $\mathcal{A}$ является плоскостью аффинного типа в определенном выше смысле, мы можем говорить о дилатациях, параллельных переносах и гомотетиях плоскости $\mathcal{A}$. Далее мы опишем эти преобразования в терминах аффинной плоскости, предварительно установив критерии параллельности и пересечения прямых.

Утверждение 5.7. *Пусть $l = M + \mathbf{W}$ и $l' = N + \mathbf{U}$ – прямые аффинной плоскости $\mathcal{A}$. Тогда*

(i) $(l \parallel l') \Leftrightarrow \mathbf{W} = \mathbf{U}$;

(ii) $(l \cap l' \neq \varnothing) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$.

Доказательство. Истинность части (i) установлена при доказательстве леммы 5.3.

(ii) Пусть $P \in l \cap l'$. Тогда $\overrightarrow{MP} \in \mathbf{W}, \overrightarrow{PN} \in \mathbf{U}$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$. Обратно, пусть $\overrightarrow{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$. Это означает, что вектор $\overrightarrow{MN}$ есть линейная комбинация векторов из подпространств $\mathbf{W}$ и $\mathbf{U}$. Поскольку эти подпространства одномерные, то имеем: $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} \in \mathbf{W}, \vec{b} \in \mathbf{U}$. Выберем точки $P_1 = M + \vec{a} \in l$ и $P_2 = N - \vec{b} \in l'$.

Тогда $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP_2} = -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \vec{0}$, т.е. $P_1 = P_2$. Таким образом, прямые l и l' имеют непустое пересечение.◄

Замечание 5.2. Подобные критерии встретятся ниже при исследовании взаимного расположения любых двух плоскостей (произвольных размерностей) в аффинном пространстве. Поэтому для доказанных критериев наряду с формальными полезно иметь в виду следующие словесные формулировки:

(i) *две прямые аффинной плоскости параллельны тогда и только тогда, когда у них совпадают направляющие пространства;*

(ii) *две прямые аффинной плоскости пересекаются* (*т.е. их пересечение непусто*) *тогда и только тогда, когда "вектор-мостик"* (*вектор, "соединяющий" произвольные точки этих прямых*) *принадлежит сумме направляющих пространств этих прямых.*

Опишем теперь параллельные переносы аффинной плоскости.

Утверждение 5.8. *Пусть $\mathcal{A}$ – аффинная плоскость, связанная с векторным пространством* $\mathbf{V}$. *Отображение $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является параллельным переносом плоскости $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существует вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}$ такой, что $\forall\, M \in \mathcal{A}$ $\tau(M) = M + \vec{a}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\vec{a}$ – фиксированный вектор пространства $\mathbf{V}$ и $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – отображение, которое задается формулой:

$$M \mapsto M + \vec{a}. \tag{10}$$

Если $l = M_0 + \mathbf{W} = \{M_0 + \vec{w} \mid \vec{w} \in \mathbf{W}\}$ – произвольная прямая плоскости $\mathcal{A}$, то ее образом при отображении τ является, очевидно, прямая $l' = M'_0 + \mathbf{W}$, где $M'_0 = M_0 + \vec{a}$. Прямые l и l' параллельны (утверждение 5.7), следовательно, τ – дилатация. Если M – неподвижная точка отображения τ, т.е. $M + \vec{a} = M$, то $\overrightarrow{MM} = \vec{a}$, откуда следует, что $\vec{a} = \vec{0}$, т.е. τ – тождественное отображение. Следовательно, если дилатация τ не является тождественным отображением, то у нее нет неподвижных точек. Таким образом, τ – параллельный перенос.

Необходимость. Любой параллельный перенос τ полностью определяется образом одной точки (свойство 2.6.4). Пусть для какой-то точки $M \in \mathcal{A}$ $\tau(M) = M'$. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{MM'}$. Отображение μ, действующее по формуле (10), является параллельным переносом и на точку M действует так же, как τ. Следовательно, $\tau = \mu$.◄

Следствие 5.3. *Любая аффинная плоскость $\mathcal{A}$, рассматриваемая как плоскость аффинного типа, является плоскостью параллельных переносов.*

Доказательство. Если A, B произвольные точки плоскости $\mathcal{A}$, то существует параллельный перенос, переводящий A в B, который задается формулой (10) при $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. ◀

Следствие 5.4. *Пусть M – фиксированная точка аффинной плоскости $\mathcal{A}$, связанной с векторным пространством* $\mathbf{V}$. *Тогда отображение*

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}) \to \mathbf{V}, \ \ \tau \mapsto \vec{a}, \tag{11}$$

которое каждому параллельному переносу $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A})$, действующему по формуле (10), *ставит в соответствие вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}$, является изоморфизмом абелевых групп.*

Доказательство. Легко видеть, что отображение (11) биективно. Если τ_1, τ_2 – параллельные переносы на векторы соответственно $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ то

$$(\tau_2 \circ \tau_1)(M) = (\tau_2(\tau_1(M)) = (\tau_2(M + \vec{a}_1)) = (M + \vec{a}_1) + \vec{a}_2 = M + (\vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

Таким образом, композиции параллельных переносов по формуле (11) соответствует сумма векторов, что и завершает доказательство. ◀

По-видимому, внимательный читатель уже обратил внимание, что для аффинной плоскости $\mathcal{A}$ мы должны различать векторы двух разных видов: векторы из векторного пространства $\mathbf{V}$, с которым связана $\mathcal{A}$ как аффинное пространство, и векторы $\mathcal{A}$ как плоскости аффинного типа (т.е. классы эквиполлентных направленных отрезков). Напомним, что множество векторов этого второго вида обозначается $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ и является абелевой группой. Векторное пространство $\mathbf{V}$ также является абелевой группой относительно сложения. Сейчас мы убедимся, что группы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ можно не различать, поскольку они изоморфны. Тем самым будет устранена двусмысленность обозначения $\overrightarrow{AB}$, которое употреблялось для векторов различных видов.

Вначале заметим, что следствие 5.4 позволяет отождествить группу параллельных переносов $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ и группу векторов $\mathbf{V}$.

С другой стороны, в § 2.3 отмечалось что, векторы как классы эквиполлентных отрезков также тесно связаны с параллельными переносами. Более точно, если A и B – произвольные точки плоскости $\mathcal{A}$ и $\tau_{A,B}$ – параллельный перенос плоскости $\mathcal{A}$, переводящий A в B, то отображение

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbf{T}(\mathcal{A}), \quad \overrightarrow{AB} \mapsto \tau_{A,B} \tag{12}$$

является биекцией множества $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ векторов плоскости $\mathcal{A}$ (как плоскости аффинного типа) на множество $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ параллельных переносов этой плоскости. Если, кроме того, учесть определение 2.3.6 операции сложения векторов множества $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, то можно утверждать, что отображение (12) является изоморфизмом абелевых групп. Композиция двух изоморфизмов групп (отображения (12) и отображения (11)) является изоморфизмом группы $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ на группу $\mathbf{V}$, позволяющий их отождествить. Зафиксируем итог наших рассмотрений в виде следующего утверждения.

Утверждение 5.9. *Пусть $\mathcal{A}$ – аффинная плоскость, связанная с векторным пространством $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ – группа векторов плоскости $\mathcal{A}$ как плоскости аффинного типа. Отображение $\mathbf{V} \to \mathbf{V}(\mathcal{A})$, которое вектору $\overrightarrow{AB} = \Phi(A,B) \in \mathbf{V}$ ставит в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ является изоморфизмом абелевых групп.*

Учитывая доказанную теорему и то, о чем говорилось перед ее формулировкой, можно сказать, что понятия дезарговой плоскости и двумерной аффинной плоскости (аффинного пространства размерности 2) по существу совпадают. Различие этих двух понятий состоит лишь в том, что в случае аффинной плоскости мы подчеркиваем существование пространства векторов, а в случае дезарговой мы о нем «забываем». Поскольку всегда можно привлечь к рассмотрению это пространство (тем самым превратив дезаргову плоскость в аффинную), то в этом смысле изучение аффинных плоскостей эквивалентно изучению дезарговых. Предпочтительность языка аффинных плоскостей состоит в том, что с геометрическим объектом $\mathcal{A}^2$ ассоциирован алгебраический объект – векторное пространство $\mathbf{V}^2$, и алгебраическая информация о $\mathbf{V}^2$ часто оказывается полезной для изучения плоскости $\mathcal{A}^2$.

Докажем вначале, что $\mathcal{A}^2$ является плоскостью аффинного типа, т.е. для нее выполняются аксиомы **AP₁** – **AP₃**.

AP₁. Пусть A и B – две точки плоскости $\mathcal{A}^2$. Тогда $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ и $\mathbf{W}^1 = L(\overrightarrow{AB})$ – одномерное подпространство векторного пространства $\mathbf{V}^2$. Очевидно, что прямая $l_0 = \mathcal{A}(A, \mathbf{W}^1)$ с начальной точкой A и направляющим подпространством $\mathbf{W}^1$ проходит через точки A и B. Пусть l – какая-то прямая, проходящая через точки A и B, с направляющим подпространством $\mathbf{U}^1$. Тогда в силу утверждения 4 в качестве ее начальной точки можно взять A и, следовательно, $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{U}^1$. Поскольку векторное пространство $\mathbf{U}^1$ одномерно, то $\overrightarrow{AB}$ – базис этого пространства, т.е. $\mathbf{U}^1 = L(\overrightarrow{AB}) = \mathbf{W}^1$. Таким образом, $l = l_0$, т.е. через любые две точки плоскости $\mathcal{A}^2$ проходит единственная прямая.

AP₂. Если $l = \mathcal{A}(M_0, \mathbf{W}^1)$ – любая прямая в плоскости $\mathcal{A}^2$ и $\vec{a} \in \mathbf{V}^2 \setminus \mathbf{W}^1$, то, отложив от точки M_0 вектор $\vec{a}$, получим точку $B = \Psi(M_0, \vec{a})$, лежащую, очевидно, вне прямой l.

AP₃. Пусть $l = \mathcal{A}(M_0, \mathbf{W}^1)$ – некоторая прямая в плоскости $\mathcal{A}^2$ и A – произвольная точка плоскости $\mathcal{A}^2$. Тогда, как легко убедиться, $l' = \mathcal{A}(A, \mathbf{W}^1)$ – единственная прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой l.

Теперь покажем, что $\mathcal{A}^2$ – дезаргова плоскость, т.е. что для любых трех точек $O,B,C,$ принадлежащих прямой $l=\mathcal{A}(M_0,\mathbf{W}^1)$, существует гомотетия плоскости $\mathcal{A}^2$ с центром O, переводящая точку B в точку C. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Так как это два различных ненулевых вектора одномерного векторного пространства $\mathbf{W}^1$, то существует элемент $\lambda\in\mathbf{D}, \lambda\neq 0{,}1,$ такой, что $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OB}$. Рассмотрим отображение $f:\mathcal{A}^2\to\mathcal{A}^2$, сопоставляющее каждой точке $A\in\mathcal{A}^2$ точку $f(A)$ такую, что $\overrightarrow{Of(A)}=\lambda\overrightarrow{OA}$. В частности, $f(O)=O,$ $f(B)=C$. Покажем, что f – гомотетия плоскости $\mathcal{A}^2$. В самом деле, пусть M,N – две точки плоскости $\mathcal{A}^2$. Они лежат на прямой $l(M,N)=\mathcal{A}(M,L(\overrightarrow{MN}))$. Если $M'=f(M)$, $N'=f(N)$, то

$$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{M'O}+\overrightarrow{ON'}=-\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{ON'}=-\lambda\overrightarrow{OM}+\lambda\overrightarrow{ON}=\lambda(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=\lambda\overrightarrow{MN}.$$

Это означает, что образы точек M и N при отображении f лежат на прямой $\mathcal{A}(M',L(\overrightarrow{MN}))$. Тем самым доказано, что отображение f прямые переводит в прямые и является дилатацией плоскости $\mathcal{A}^2$. Если точка $A-$ неподвижная точка отображения f, то $\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}$ или $(\lambda-1)\overrightarrow{OA}=\vec{0}$. Так как $\lambda\neq 1$, то $\overrightarrow{OA}=\vec{0}$, т.е. $O=A$. Итак, $f-$ гомотетия плоскости $\mathcal{A}^2$ с центром O. ◄