§ 10. ГОМОТЕТИИ И ДЕЗАРГОВЫ ПЛОСКОСТИ

Теперь обратимся к вопросу о существовании "достаточно большого" количества гомотетий в плоскостях аффинного типа. Более точно, нас будет интересовать ответ на следующий вопрос:

для любой ли тройки коллинеарных точек $P, Q, R,$ $(P \neq Q,\ P \neq R)$ *плоскости аффинного типа* $\mathcal{A}$ *существует гомотетия* h_P *с центром в точке* P *такая, что* $h_P(Q) = R$?

Оказывается, что положительный ответ на этот вопрос эквивалентен справедливости в $\mathcal{A}$ следующего утверждения.

Теорема 1 (***большая аффинная теорема Дезарга***). *Пусть* ABC, $A'B'C'$ *– два треугольника в плоскости аффинного типа таких, что прямые* $l(A, A'), l(B, B'), l(C, C')$ *различны и имеют общую точку. Тогда из условий* $l(A, B) \,\|\, l(A', B'),\ l(A, C) \,\|\, l(A', C')$ *следует, что* $l(B, C) \,\|\, l(B', C')$.

Определение 1. *Плоскость аффинного типа называется* ***дезарговой плоскостью****, если в ней справедлива предыдущая теорема.*

В дезарговой плоскости верно утверждение, которое можно считать обратным теореме 1.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– дезаргова плоскость. Тогда, если* ABC, $A'B'C'$ *– треугольники такие, что прямые* $l(A, A'), l(B, B'), l(C, C')$ *различны и* $l(A, B) \,\|\, l(A', B'),\ l(A, C) \,\|\, l(A', C'),\ l(B, C) \,\|\, l(B', C'),$ *то прямые* $l(A, A'), l(B, B'), l(C, C')$ *либо попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Если прямые $l(A, A'), l(B, B'), l(C, C')$ не являются попарно параллельными, то, по крайней мере, две из них, скажем, $l(A, A')$ и $l(B, B')$, имеют общую точку P. Покажем, что $P \in l(C, C')$. Допустим, что $P \notin l(C, C')$. Прямая $l(P, C)$ не может быть параллельна одновременно прямым $l(A', C')$ и $l(B', C')$, так как в противном случае через точку C' проходили бы две различные прямые $l(A', C')$ и $l(B', C')$, параллельные $l(P, C)$). Предположим, например, что C'' – общая точка прямых $l(P, C)$ и $l(A', C')$ (рис. 1).

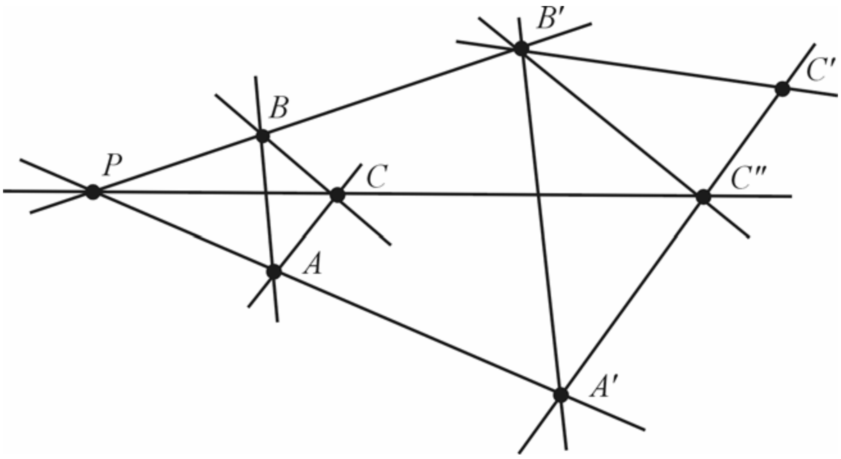

Рис. 1

Рассмотрим треугольники ABC *и* $A'B'C''$. Ввиду дезарговости плоскости $\mathcal{A}$ из условий $l(A,B)\,||\,l(A',B')$, $l(A,C)\,||\,l(A',C'')$ вытекает, что $l(B,C)\,||\,l(B',C'')$. Так как еще $l(B,C)\,||\,l(B',C')$, то в силу единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой получаем, что $l(B',C')=l(B',C'')$. Поскольку точка C' – единственная общая точка прямых $l(B',C')$ и $l(A',C')$, а точка C'' – единственная общая точка прямых $l(B',C'')$ и $l(A',C')$, то $C'=C''$. ◄

Покажем, что всякая дезаргова плоскость является плоскостью параллельных переносов. Для этого ввиду теоремы 8.2 достаточно доказать, что в дезарговой плоскости справедлива малая аффинная теорема Дезарга.

Теорема 2. *Из большой аффинной теоремы Дезарга вытекает малая аффинная теорема Дезарга .*

Доказательство. Пусть ABC *и* $A'B'C'$ – треугольники с попарно различными и параллельными прямыми $l(A,A')$, $l(B,B')$, $l(C,C')$. Предположим, что $l(A,B)\,||\,l(A',B')$, $l(A,C)\,||\,l(A',C')$. Нам нужно показать, что $l(B,C)\,||\,l(B',C')$. Допустим, что прямые $l(B,C)$ и $l(B',C')$ не параллельны (рис. 2). Тогда прямая, проходящая через C' и параллельная прямой $l(B,C)$, пересекала бы прямую $l(A',B')$ в некоторой точке B'', отличной от B', а прямая $l(B,B'')$ имела бы общую точку O с прямой $l(A,A')$. Поскольку выполняются условия $l(A,B)\,||\,l(A',B'')$, $l(A,C)\,||\,l(A',C')$, $l(B,C)\,||\,l(B'',C')$, то по теореме 2 прямые $l(A,A'), l(B,B''), l(C,C')$ пересекаются в точке O, что противоречит параллельности $l(A,A')$ и $l(C,C')$. ◄

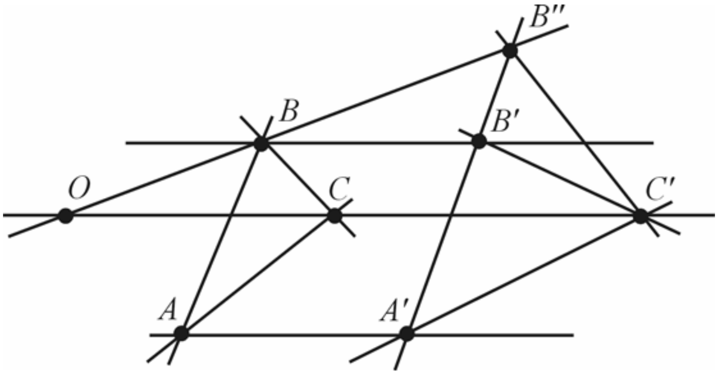

Рис. 2

Покажем теперь, что в плоскости параллельных переносов существование гомотетий с данным центром и заданным образом другой точки влечет ее дезарговость.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– плоскость параллельных переносов и пусть для каждой тройки коллинеарных и попарно различных точек* $O, P, Q \in \mathcal{A}$ *существует гомотетия* σ_O *с центром O такая, что* $\sigma_O(P) = Q$. *Тогда плоскость* $\mathcal{A}$ *дезаргова.*

Доказательство. Предположим, что три попарно различные прямые $l(A, A'), l(B, B'), l(C, C')$ пересекаются в точке P и что $l(A, B) \| l(A', B')$, $l(B, C) \| l(B', C')$ (рис. 3).

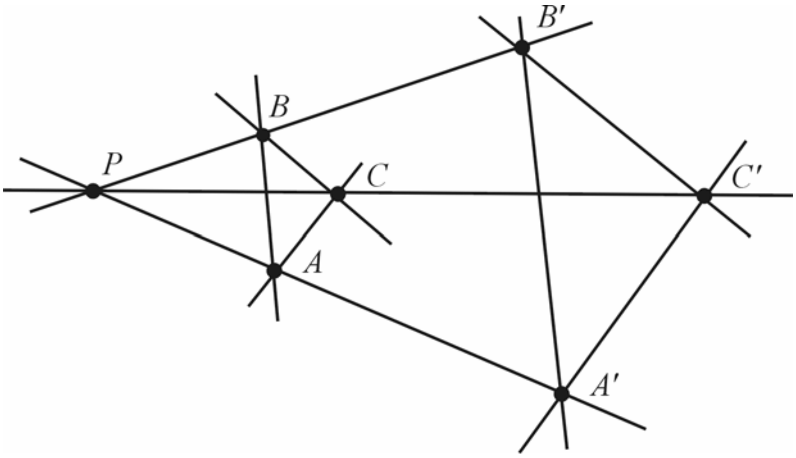

Рис. 3

Пусть σ_P – гомотетия с центром *P,* переводящую A в A'. Тогда $\sigma_P(B) = B'$, $\sigma_P(C) = C'$. Действительно, так как σ_P – гомотетия, то $\sigma(B)$ принадлежит единственной прямой, проходящей через A' и параллельной $l(A, B)$, по условию, это прямая $l(A', B')$. С другой стороны, $\sigma_P(B)$

принадлежит прямой $l(P,B)$, поэтому $\sigma_P(B)=B'$. Аналогично устанавливается совпадение $\sigma_P(C)$ и C. Значит, образ прямой $l(B,C)$ при гомотетии σ_P есть прямая $l(B',C')$ и потому $l(B,C)\,||\,l(B',C')$.◄

На самом деле, верно и обратное.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}$ – дезаргова плоскость. Тогда $\mathcal{A}$ – плоскость параллельных переносов и для каждой тройки попарно различных коллинеарных точек $P,Q,R\in\mathcal{A}$ существует единственная гомотетия σ_P с центром P, переводящая точку Q в точку R.*

Доказательство. Поскольку всякая гомотетия однозначно определяется образами двух точек, то остается установить существование σ_P. Для этого мы построим некоторую биекцию $\sigma_P:\ \mathcal{A}\ \to\ \mathcal{A}$ такую, что $\sigma_P(P)=P$ и $\sigma_P(Q)=R$, и покажем, что σ_P – гомотетия.

Рассмотрим точку B вне $l(P,Q)$ и пусть B'– точка пересечения $l(P,B)$ и прямой, содержащей точку R и параллельной $l(Q,B)$. Отображение σ_P зададим следующими условиями:

(i) $\sigma_P(P)=P$;

(ii) *для всякой точки M вне прямой* $l(P,Q)$ $\sigma_P(M)\in l(P,M)$, *причем* $l(Q,M)\,||\,l(R,\sigma_P(M))$ (рис. 4);

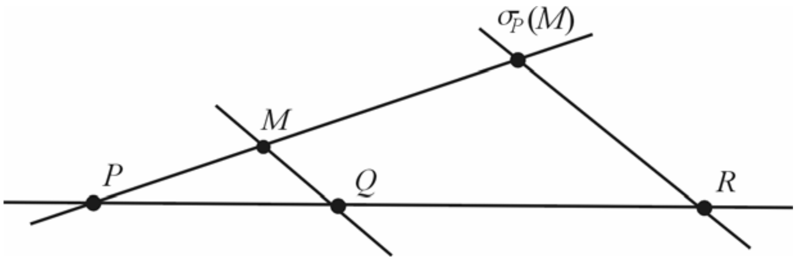

Рис. 4

(iii) *для всякой точки* $M\in l(P,Q)\setminus\{P\}$ $\sigma_P(M)\in l(P,M)$, *причем* $l(B,M)\,||\,l(B',\sigma_P(M))$ (рис. 5).

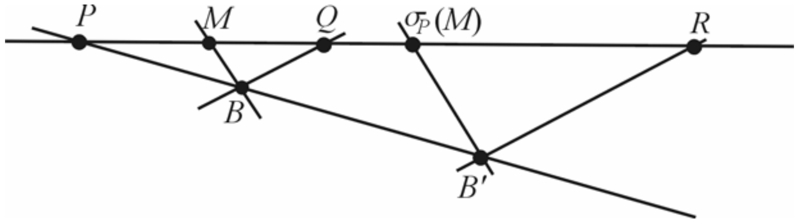

Рис. 5

Ясно, что $\sigma_P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – биекция (убедитесь в этом!), имеющая единственную неподвижную точку P. Остается показать, что для любой пары различных точек M, N, не совпадающих с P, выполняется условие: $l(M,N) \| l(\sigma_P(M), \sigma_P(N))$.

В зависимости от расположения точек M, N следует различать четыре случая:

a) $M,\ N \notin l(P,R)$;

b) $M,\ N \in l(P,R)$;

c) $M \in l(P,R),\ N \notin l(P,R)$;

d) $M \in l(P,R),\ N \in l(B,B')$.

В случае a) из условий $l(Q,M) \| l(R,\sigma_P(M))$, $l(Q,N) \| l(R,\sigma_P(N))$ и дезарговости плоскости $\mathcal{A}$ получаем: $l(M,N) \| l(\sigma_P(M), \sigma_P(N))$.

В случае b) $l(M,N) = l(\sigma_P(M), \sigma_P(N))$.

В случае c) $M \in l(P,N)$, а $N \notin l(P,R)$, $N \notin l(B,B')$ (рис. 6). Тогда в силу дезарговости плоскости $\mathcal{A}$ имеем $l(B,N) \| l(B', \sigma_P(N))$ и, так как по построению $l(B,M) \| l(B', \sigma_P(M))$, то снова из дезарговости $\mathcal{A}$ заключаем, что $l(M,N) \| l(\sigma_P(M), \sigma_P(N))$.

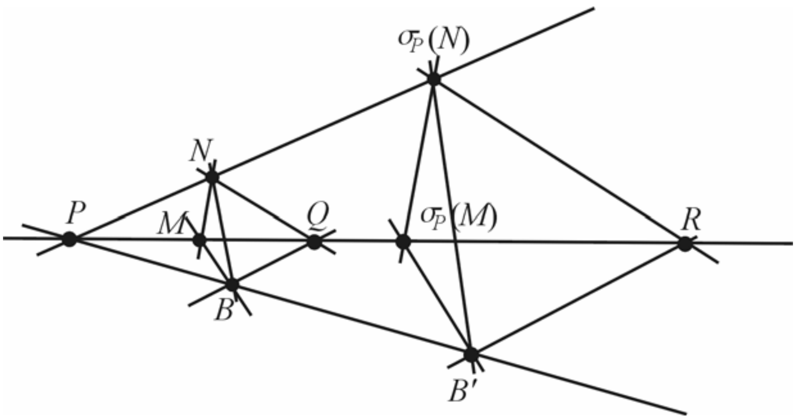

Рис. 6

Наконец в случае d) можно рассуждать так. Поскольку существует точка S вне пересекающихся прямых $l(P,R)$ и $l(B,B')$, то ввиду случая a) $l(N,S) \| l(\sigma_P(N), \sigma_P(S))$. Ввиду случая c) $l(M,S) \| l(\sigma_P(M), \sigma_P(S))$. Дезарговость $\mathcal{A}$ теперь влечет параллельность $l(M,N) \| l(\sigma_P(M), \sigma_P(N))$. ◄

В заключение рассмотрим еще одно свойство векторных частей гомотетии, которое будет играть важную роль в дальнейшем.

Утверждение 2. (i) *Для произвольного ненулевого вектора $\vec{a}$ плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$ и произвольной гомотетии λ: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ векторы $\vec{\lambda}(\vec{a})$ и $\vec{a}$ коллинеарны*;

(ii) *В дезарговой плоскости $\mathcal{A}$ для всякой пары коллинеарных ненулевых векторов $\vec{a},\vec{b}$ существует единственный элемент $\vec{\lambda} \in \overrightarrow{H}(\mathcal{A})$, переводящий $\vec{a}$ в $\vec{b}$.*

Доказательство. (i) Пусть λ – не тождественная гомотетия с центром O и $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Тогда $\vec{\lambda}(\vec{a}) = \vec{\lambda}\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{\lambda(O)\lambda(A)} = \overrightarrow{O\lambda(A)}$. Поскольку λ – гомотетия, прямые $l(O,A)$ и $l(\lambda(O),\lambda(A))$ = $l(O,\lambda(A))$ параллельны, и, следовательно, совпадают. Значит, векторы $\vec{\lambda}(\vec{a})$ и $\vec{a}$ коллинеарны.

(ii) Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ – коллинеарные ненулевые векторы. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ (заметим, что так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $A \neq O$, $B \neq O$). Тогда дезарговость плоскости влечет существование гомотетии λ с центром O, такой, что $\lambda(A) = B$. Тогда $\vec{\lambda}(\vec{a}) = \vec{\lambda}\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{\lambda(O)\lambda(A)} = \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, что и утверждалось. Единственность $\vec{\lambda}$ устанавливается следующим образом. Пусть $\vec{\alpha} \neq \vec{\lambda}$ и $\vec{\alpha}(\vec{a}) = \vec{b}$. Тогда $\vec{\lambda}(\vec{a}) = \vec{\alpha}(\vec{a})$. Откуда $\left(\overrightarrow{\lambda^{-1}\alpha}\right)(\vec{a}) = \vec{a}$. Заметим, что $\lambda^{-1}\alpha$ – нетождественная дилатация, поэтому если α имеет тот же центр, что и λ, то $\lambda^{-1}\alpha$ – нетождественная гомотетия с центром О. Тогда при $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ $\vec{\lambda}(\vec{a}) = \overrightarrow{O\lambda(A)}$, $\vec{\alpha}(\vec{a}) = \overrightarrow{O\alpha(A)}$. Следовательно из $\vec{\lambda}(\vec{a}) = \vec{\alpha}(\vec{a})$ следует $\lambda^{-1}\alpha(A) = A$. Так как еще $\lambda^{-1}\alpha(O) = O$, то $\lambda^{-1}\alpha = \mathbf{Id}$, что не так. Ввиду пункта (v) теоремы 9.1 случай гомотетий с разными центрами сводится к предыдущему.◄