§8 ПЛОСКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ И МАЛАЯ АФФИННАЯ ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

До сих пор мы изучали свойства параллельных переносов, не заботясь об их существовании. Теперь рассмотрим эту проблему. Напомним, что плоскость аффинного типа $\mathcal{A}$ называется плоскостью параллельных переносов, если для любых точек P, Q $\in \mathcal{A}$ существует параллельный перенос $\tau_{P,Q}$ со свойством $\tau_{P,Q}(P) = Q$.

Упражнение 1. *Найдите число параллельных переносов в плоскости параллельных переносов порядка n.*

Приведем вначале пример плоскости аффинного типа, которая, как будет показано ниже (см. замечание 2), не являются плоскостью параллельных переносов.

☝ **Пример 1. (*плоскости Мултона*)**. Эти плоскости (обозначение $\mathbf{M}(m)$) определяются для каждого положительного вещественного числа m. Плоскость $\mathbf{M}(m)$ может быть получена на основе плоскости $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$. Точками плоскости $\mathbf{M}(m)$, как и плоскости $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$, являются всевозможные упорядоченные пары (x, y) вещественных чисел. Множество прямых плоскости $\mathbf{M}(m)$ описывается следующим образом. Во-первых, это “вертикальные” и “горизонтальные” прямые плоскости $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$, т.е. прямые, которые задаются уравнениями $x = c$ и $y = c, c \in \mathbf{R}$, во-вторых, прямые с уравнениями $y = kx + b$, где $k < 0$, и, в-третьих, так называемые "сломанные прямые". Всякая сломанная прямая может быть получена следующим образом: для произвольной прямой вида $y = mx + b, m > 0, b \in \mathbf{R}$ сломанная прямая состоит из точек этой прямой с неотрицательными ординатами и точек прямой $y = 2mx + b$ для точек с неположительными ординатами (рис. 1).

Прямые плоскости Мултона

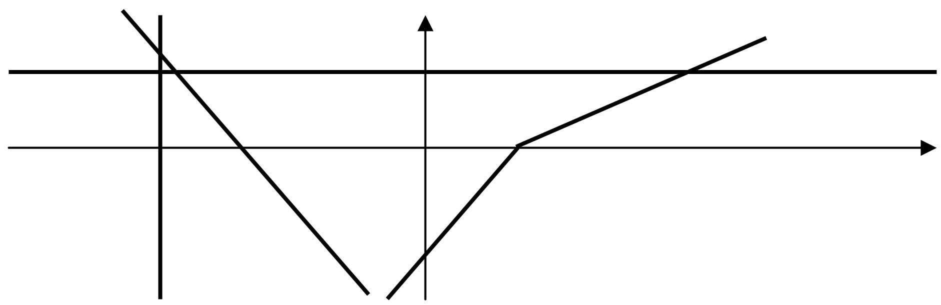

Рис. 1

Упражнение 2. *Постройте прямую, проходящую через точку A* = (2;1) *параллельно прямой: a)* $y = -4x + 1$; *b)* $y(x) = \begin{cases} 2x - 5, y \ge 0, \\ 4x - 5, y \le 0. \end{cases}$

Упражнение 3. *Выясните, будут ли отрезки* M_1M_2 *и* N_1N_2 *лежать на параллельных прямых, если* $M_1 = (-2,0)$, $M_2 = (0,2)$, $N_1 = (0,-2)$, $N_2 = (2,0)$?

Упражнение 4. *Докажите, что плоскость Мултона – плоскость аффинного типа.*

Теорема 1 (*малая аффинная теорема Дезарга*). *Пусть* ABC *и* $A'B'C'$ *– два треугольника таких, что*
(i) $ABB'A'$ – *параллелограмм*;
(ii) $ACC'A'$ – *параллелограмм*;
(iii) *точки* B, C, B', C' *не коллинеарны.*
Тогда $BCC'B'$ – *параллелограмм.*

Следующий рисунок иллюстрирует тот факт, что на плоскости Мултона малая аффинная теорема Дезарга не верна (рис. 2):

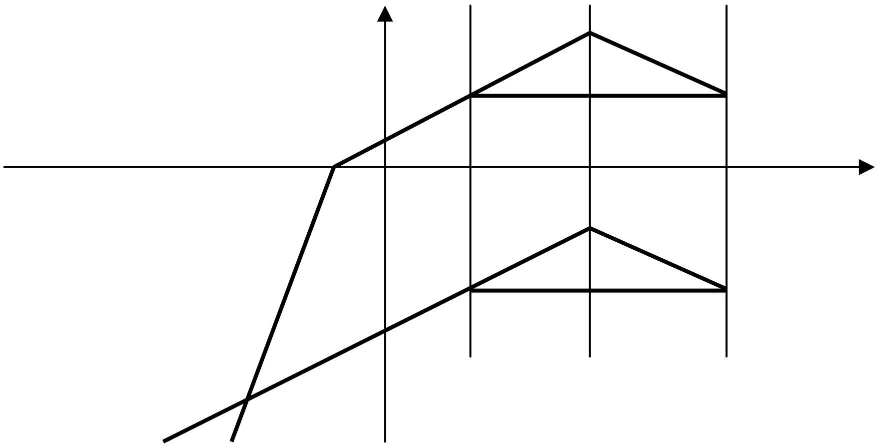

Рис. 2

!! **Замечание 1.** Нетрудно видеть, что формулировка малой теоремы Дезарга эквивалентна следующей:

Пусть ABC *и* $AB'C'$ – *два треугольника таких, что прямые* $l(A,A'), l(B,B'), l(C,C')$ *различны и параллельны. Тогда из условий* $l(A,B) \parallel l(A',B')$ *и* $l(A,C) \parallel l(A',C')$ *следует, что* $l(B,C) \parallel l(B',C')$.

Как показывает следующая теорема, плоскости параллельных переносов полностью характеризуются тем, что в них выполняется малая теорема Дезарга.

Теорема 2. *Для того, чтобы плоскость аффинного типа была плоскостью параллельных переносов, необходимо и достаточно, чтобы в ней была справедлива малая аффинная теорема Дезарга.*

Доказательство. Необходимость. Если $\mathcal{A}$ – плоскость параллельных переносов с параллелограммами $ABB'A'$ и $ACC'A'$, то параллельный перенос $\tau_{A,A'}$ обладает свойствами $\tau_{A,A'}(B) = B'$, $\tau_{A,A'}(C) = C'$. Следовательно, $l(B,C) \parallel l(B',C')$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ – плоскость аффинного типа, для которой выполняется малая теорема Дезарга. Пусть (A, A') – пара точек плоскости $\mathcal{A}$. Докажем, что существует параллельный перенос плоскости $\mathcal{A}$, переводящий A в A'. Ясно, что лишь случай $A \neq A'$ является нетривиальным. Дополним пару (A, A') парой точек (B, B') таких, что $ABB'A'$ – параллелограмм. Построим теперь отображение $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, положив:

(i) при условии $M \notin l(A, A')$, $\tau(M)$ – точка такая, что $AM\tau(M)A'$ – параллелограмм;

(ii) при условии $M \in l(A, A')$, $\tau(M)$ – точка такая, что $BM\tau(M)B'$ – параллелограмм;

Легко видеть, что $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – биекция без неподвижных точек и что $\tau(A) = A'$. Остается показать, что τ – дилатация, т.е., что для любой пары точек (M, N) верно условие: $l(M, N) \parallel l(M', N')$. В зависимости от расположения точек M, N имеются следующие возможности:

a) $M, N \notin l(A, A')$;

b) $M, N \in l(A, A')$;

c) $M \in l(A, A'), N \notin l(A, A'), N \notin l(B, B')$;

d) $M \in l(A, A')$ $N \in l(B, B')$.

В случае a) $AM\tau(M)A'$ и $AN\tau(N)A'$ – параллелограммы. Тогда, поскольку точки $M, \tau(M)$, $N, \tau(N)$ не лежат на одной прямой и в плоскости $\mathcal{A}$ выполняется малая аффинная теорема Дезарга, то $l(M, N) \parallel l(\tau(M), \tau(N))$.

Случай b) иллюстрируется рисунком 3.

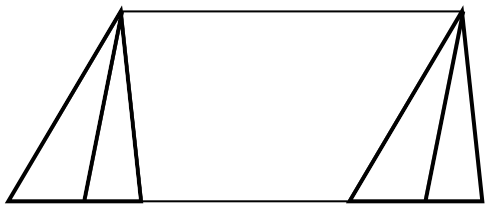

Рис. 3

В случае c) так как $\tau(M), \tau(N) \in l(A, A')$, то $BM\tau(M)B'$, $BAA'B'$, $A\tau(N)NA'$ – параллелограммы (рис. 4).

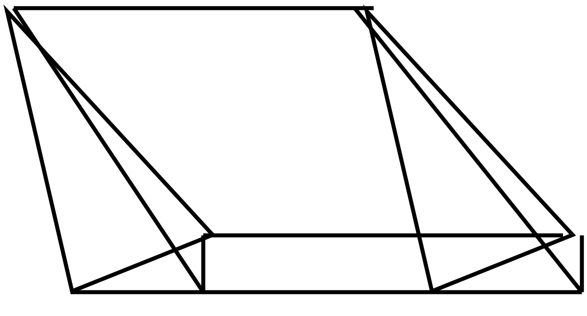

Рис. 4

Ввиду малой аффинной теоремы Дезарга получаем $BN\tau(N)B'$ - параллелограмм. Второе ее использование приводит к заключению: $MN\tau(M)\tau(N)$ - параллелограмм, т.е. $l(M,N) \| l(\tau(M),\tau(N))$.

В случае d) предположим вначале, что вне прямых $l(A,A')$, $l(B,B')$ существует точка S. Тогда, ввиду случая a), $NS\tau(S)\tau(N)$ – параллелограмм, а ввиду случая c), $MS\tau(S)\tau(M)$ – параллелограмм. Применение теперь малой аффинной теоремы Дезарга дает: $MN\tau(M)\tau(N)$ - параллелограмм, т.е. $l(M,N) \| l(\tau(M),\tau(N))$.

Если вне прямых $l(A,A')$, $l(B,B')$ нет точек плоскости $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ состоит из четырех точек и справедливость теоремы проверяется непосредственно (проделайте это). ◄

!! **Замечание 2.** Поскольку в плоскости Мултона малая аффинная теорема Дезарга неверна, то в качестве следствия теоремы 2 получаем, что плоскость Мултона не является плоскостью параллельных переносов.

!! **Замечание 3.** Легко видеть, что утверждение, аналогичное малой аффинной теореме Дезарга, верно и в случае, когда точки A,B,C лежат на одной прямой:

Пусть A,B,C – три попарно различные точки одной прямой и A',B',C' – точки такие, что $ABB'A$ и $ACC'A'$ - параллелограммы. Тогда $BCC'B'$ – параллелограмм.

Упражнение 5. *Докажите последнее утверждение.*

!! **Замечание 4.** Предыдущее замечание вместе с упражнением 5 показывают, что в малой аффинной теореме Дезарга можно не оговаривать то, что точки A,B,C образуют треугольник.

Помимо малой аффинной теоремы Дезарга плоскости параллельных переносов можно охарактеризовать еще одним условием, формулируемым в терминах направленных отрезков.

Теорема 3. *Плоскость аффинного типа $\mathcal{A}$ является плоскостью параллельных переносов тогда и только тогда, когда в $\mathcal{A}$ выполняется следующее условие:*

($*$) *для любых двух троек точек $(A,B,C),(A',B',C')$ плоскости $\mathcal{A}$ из эквиполлентностей направленных отрезков $AB \sim A'B'$ и $BC \sim B'C'$ следует эквиполлентность $AC \sim A'C'$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\mathcal{A}$ – плоскость параллельных переносов, то для пар точек (A,B) и (B,C) существуют параллельные переносы $\tau_1 = \tau_{A,B}$ и $\tau_2 = \tau_{B,C}$. Отображение $\tau_2\tau_1$ является параллельным переносом, причем $\tau_2\tau_1(A) = C$. По определению 7.3 эквиполлентности направленных отрезков $\tau_{A',B'} = \tau_{A,B} = \tau_1$, аналогично, $\tau_{B',C'} = \tau_{B,C} = \tau_2$. Но тогда $\tau_2\tau_1(A') = C'$, т.е. $AC \sim A'C'$.

Достаточность. Пусть в плоскости $\mathcal{A}$ выполняется условие ($*$). Для доказательства того, что $\mathcal{A}$ – плоскость параллельных переносов, достаточно проверить, что в $\mathcal{A}$ выполняется малая аффинная теорема Дезарга. Пусть выполняются условия (i), (ii), (iii) теоремы Дезарга, т.е. $(A,B,C),(A',B',C')$ – тройки неколлинеарных точек, расположенные на трех параллельных прямых l_1, l_2, l_3 (рис. 5)

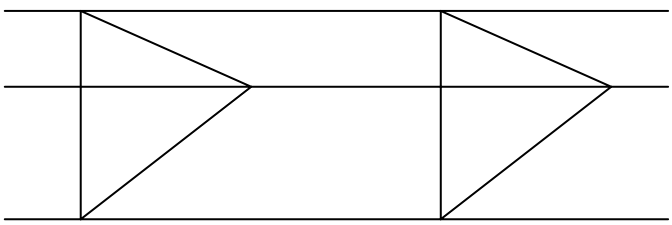

Рис. 5

Рассмотрим параллельный перенос τ, переводящий точку A в точку A'. Если $A = A'$, то нетрудно видеть, что $B = B'$, $C = C'$, поэтому малая аффинная теорема Дезарга в этом случае истинна (то же рассуждение показывает, что, не ограничивая общности, можно считать, что $B \neq B', C \neq C'$). Условия $l_1 \| l_2$ и $l(A,B) \| l(A',B')$ означают, что

$ABB'A'$ – параллелограмм. Применяя теорему 7. 1, (ii), получаем, что $AB \sim A'B'$. Аналогично доказывается, что $BC \sim B'C'$. По условию $(*)$ $AC \sim A'C'$, что влечет $l(A,C) \parallel l(A',C')$.◄

Из предыдущей теоремы вытекает, что свойство $(*)$ однозначно выделяет плоскости параллельных переносов из класса плоскостей аффинного типа. Зададимся теперь вопросом: когда одну плоскость параллельных переносов $\mathcal{A}_1$ следует считать “похожей” на другую плоскость параллельных переносов $\mathcal{A}_2$? Поскольку всякая плоскость параллельных переносов является плоскостью аффинного типа, то, конечно, это понятие “похожести” должно включать “похожесть плоскостей аффинного типа”, т.е., существование морфизма аффинного типа $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. Естественно также потребовать, чтобы информация о плоскости $\mathcal{A}_1$ наследовалась плоскостью $\mathcal{A}_2$ при отображении f (пусть даже в немного искаженном виде). Более точно, нам хотелось бы, чтобы всякое высказывание о фигурах плоскости $\mathcal{A}_1$ превращалось бы в аналогичное высказывание об их образах в $\mathcal{A}_2$. Применительно к высказыванию $(*)$ это приводит к заключению, что следует требовать выполнимость следующего условия: при отображении f эквиполлентные направленные отрезки переходят в эквиполлентные. Такие отображения мы и будем считать морфизмами плоскостей параллельных переносов. “Похожесть” двух плоскостей параллельных переносов означает существование морфизма плоскостей параллельных переносов, который определяется следующим образом.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – плоскости параллельных переносов. Морфизм аффинного типа $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ называется* ***морфизмом плоскостей параллельных переносов****, если эквиполлентные пары направленных отрезков при отображении f переходят в эквиполлентные, т.е.*

$$\forall\, A,B,C,D \in \mathcal{A}_1 \quad AB \sim CD \;\Rightarrow\; f(A)f(B) \sim f(C)f(D). \tag{1}$$

Если $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ – морфизмом плоскостей параллельных переносов, то будем говорить, что $\mathcal{A}_1$ ***"похожа"*** *на $\mathcal{A}_2$.*

Вот несколько простых примеров таких морфизмов.

☝ **Пример 2.** Тождественное отображение $\mathbf{Id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – морфизм плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$ на себя.

☝ **<u>Пример 3.</u>** Постоянное отображение $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, $A \mapsto A'_0$, A'_0 – фиксированная точка плоскости $\mathcal{A}_2$.

☝ **<u>Пример 4.</u>** Всякий параллельный перенос $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – морфизм плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$ на себя.

<u>Упражнение 6.</u> *Докажите, что композиция морфизмов плоскостей параллельных переносов является морфизмом плоскостей параллельных переносов.*

<u>Утверждение 1.</u> *Морфизм аффинного типа $f: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ плоскостей параллельных переносов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ является их морфизмом тогда и только тогда, когда для произвольного параллельного переноса $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_1)$ существует единственный параллельный перенос $\mu_\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_2)$ такой, что*

$$\mu_\tau f = f\tau. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $f: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ – морфизм плоскостей параллельных переносов и $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_1)$. Для произвольной точки $A \in \mathcal{A}_1$ и фиксированной точки $B \in \mathcal{A}_1$ рассмотрим эквиполлентные направленные отрезки AB и $\tau(A)\tau(B)$. Тогда направленные отрезки $f(A)f(B))$ и $f(\tau(A))f(\tau(B))$ эквиполлентны, т.е. существует параллельный перенос $\mu_\tau^A \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_2)$ такой, что $f(\tau(A) = \mu_\tau^A(f(A)), f(\tau(B) = \mu_\tau^A(f(B))$. Поскольку μ_τ^A – параллельный перенос, переводящий точку $f(B)$ в точку $f(\tau(B))$, то он не зависит от точки A. Обозначим его μ_τ. Тогда $f(\tau(A) = \mu_\tau(f(A))$ для произвольной точки $A \in \mathcal{A}_1$ и потому равенство (2) верно.

Обратно, пусть выполнено условие (2) и $AB \sim CD$ для $A, B, C, D \in \mathcal{A}_1$. Покажем, что $f(A)f(B) \sim f(C)f(D)$. Так как условие $AB \sim CD$ означает, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то по следствию 7.1 имеем: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, т.е. $AC \sim BD$. Пусть $\tau = \tau_{A,C}$, тогда $\tau(A) = C, \tau(B) = D$. Ясно, что $f(C) = f(\tau(A))$, $f(D) = f(\tau(B))$. Пользуясь соотношением (2), получаем $f(C) = \mu_\tau(f(A)), f(D) = \mu_\tau(f(B))$. Таким образом, μ_τ устанавливает эквиполлентность направленных отрезков $f(A)f(B)$ и $f(C)f(D)$. ◀

Существуют плоскости параллельных переносов очень “непохожие” друг на друга в том смысле, что единственными морфизмами между ними являются морфизмы, образы которых одноточечны.

☝ **Пример 5.** Пусть $\mathcal{A}_1$ – конечная плоскость параллельных переносов (например, $\mathcal{A}_2 = \mathrm{A}^2(\mathbf{Z}/(p))$, $\mathcal{A}_2 = \text{Б}^2(\mathbf{R})$. Любой морфизм $f: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ плоскостей параллельных переносов должен удовлетворять соотношению (2)

$$f\tau = \mu_\tau f$$

для произвольного переноса $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_1)$ и подходящего переноса $\mu_\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_2)$. Заметим, что предыдущее равенство влечет для любого натурального k равенство

$$f\tau^k = \mu_\tau^k f .$$

Действительно, используя (2), получаем:

$$f\tau^2 = (f\tau)\tau = (\mu_\tau f)\tau = \mu_\tau(f\tau) = \mu_\tau(\mu_\tau f) = \mu_\tau^2 f,$$

и так далее. Если хотя бы для одного $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_1)$ $\mu_\tau \neq \mathbf{Id}$, то и $\mu_\tau^k \neq \mathbf{Id}$ (докажите!). С другой стороны, ввиду конечности плоскости $\mathcal{A}_1$ для подходящего $k \in \mathbf{N}$ $\tau^k = \mathbf{Id}$. Поэтому должно быть

$$f\tau^k = f\,\mathbf{Id} = f = \mu_\tau^k f .$$

Для любой точки $C \in \mathcal{A}_1$ теперь будем иметь

$$f(C) = \mu_\tau^k(f(C)) .$$

Но $\mu_\tau^k \neq \mathbf{Id}$ и потому не имеет неподвижных точек. Полученное противоречие показывает, что для любого $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_1)$ $\mu_\tau = \mathbf{Id}$. С учетом последнего, из равенства (2) для произвольной точки $C \in \mathcal{A}_1$ имеем

$$f(\tau(C)) = f(C) .$$

Так как $\mathcal{A}_1$ – плоскость параллельных переносов, то зафиксировав C, и меняя τ, мы можем получить в виде $\tau(C)$ любую точку плоскости $\mathcal{A}_1$, что влечет $\operatorname{Im} f = \{f(c)\}$.

Упражнение 7. *Докажите, что и обратно, любой морфизм плоскостей параллельных переносов* $f:\ \text{Б}^2(\mathbf{R}) \to \mathcal{A}_1$, *где* $\mathcal{A}_1$ *– конечная плоскость, есть постоянное отображение.*

!! **Замечание 5.** Ниже, пользуясь понятием характеристики плоскости, мы покажем, что для плоскостей параллельных переносов различных характеристик справедливо аналогичное утверждение.

Следующий пример показывает, что множество морфизмов аффинного типа плоскостей параллельных переносов шире множества морфизмов плоскостей параллельных переносов.

☝ **Пример 6.** Пусть $\mathcal{A}$ – плоскость параллельных переносов; l_1, l_2 – две различные параллельные прямые; AB, CD, $(A \neq B)$ – пара эквиполлентных направленных отрезков на прямых l_1 и l_2 соответственно; E – точка вне l_1. Определим отображение $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ так:

$$f(\mathcal{A} \backslash l_1) = E, \ f(P) = P \ \ \forall P \in l_1.$$

Тогда f – морфизм аффинного типа, но не является морфизмом плоскостей параллельных переносов, поскольку не сохраняет эквиполлентность отрезков AB и CD.

Ниже мы увидим, что ситуация иная, если f – биективный морфизм.

Морфизмы любых двух плоскостей параллельных переносов, как и морфизмы аффинного типа, естественным образом разбиваются на три класса в зависимости от их образов:

(i) $\operatorname{Im} f$ – точка;

(ii) $\operatorname{Im} f$ состоит из коллинеарных точек числом более одной;

(iii) $\operatorname{Im} f$ содержит 3 неколлинеарные точки.

Понятно, что морфизмы первого класса малоинтересны. Напротив, морфизмы третьего класса, как мы сейчас покажем, уже обязаны быть инъективными (морфизмы второго класса, естественно, занимают промежуточное положение). Напомним, что выше мы показали, что все морфизмы аффинного типа, сохраняющие параллельность, содержащие в своем образе 3 неколлинеарные точки, не могут стягивать никакую прямую в точку. Теперь мы установим более сильное утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $f: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ – морфизм аффинного типа, сохраняющий параллельность и содержащий в образе три неколлинеарные точки. Тогда f инъективен.*

Доказательство. Предположим, что, напротив, для различных точек $A, B \in \mathcal{A}_1$ $f(A) = f(B) = C' \in \mathcal{A}_2$. Выберем точку $D' \in \mathcal{A}_2$ (отличную от C') так, чтобы у нее существовал прообраз $D = f^{-1}(D')$, не принадлежащий прямой $l(A, B)$. Пусть $E' \in \operatorname{Im} f$ – точка, дополняющая пару C', D' до неколлинеарной тройки и пусть $E \in f^{-1}(E')$. Тогда параллель l к прямой $l(A,D)$, проходящая через E, обладает свойством: $l \nparallel l(B,D)$. В самом деле, если $l \parallel l(B,D)$, то, учитывая условие $l \parallel l(A,D)$, заключаем, что $l(A,D) \parallel l(B,D)$, следовательно, $l(A,D) = l(B,D)$. Значит, $D \in l(A,B)$, что не так. Итак, $l \nparallel l(B,D)$ и поэтому определяется точка $Q = l \bigcap l(B,D)$. Заметим, что множество $f(l)$ содержит точки E' и $f(Q)$. Тогда $f(Q) \in f(l) \bigcap l(C',D')$. С другой стороны, множество $f(l)$ не пересекается с $l(C',D')$, поскольку $l(C',D') = f(l(A,D))$ и f сохраняет параллельность. Кроме того, $E' \notin l(C,D)$, но $E' \in f(l)$ и потому $f(l) \bigcap l(C',D') = \varnothing$. Получили противоречие с предположением $f(A) = f(B)$. ◀

Следствие 1. *Всякий морфизм плоскостей параллельных переносов, содержащий в своем образе три неколлинеарные точки, инъективен.*

Доказательство. Поскольку всякий такой морфизм сохраняет параллельность, то применимо утверждение 2.

Аналогично тому, как всякий морфизм аффинного типа, не стягивающий никакую прямую в точку, индуцирует отображение на множествах прямых соответствующих плоскостей, всякий морфизм плоскостей параллельных переносов индуцирует отображение множеств векторов этих плоскостей.

<u>Определение 2.</u> Векторной частью *морфизма $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ плоскостей параллельных переносов называется отображение*

$$\vec{f} : \mathbf{V}(\mathcal{A}_1) \to \mathbf{V}(\mathcal{A}_2),\ \overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{f(A)f(B)}. \qquad (2)$$

В силу условия (1) в определении морфизма плоскостей параллельных переносов определение 2 корректно, т.е. не зависит от выбора направленного отрезка AB, представляющего вектор $\overrightarrow{AB}$.

<u>Утвержение 3.</u> *Отображение* (2) *является гомоморфизмом групп, т.е.*

$$\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_1)\quad \vec{f}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}(\vec{b}).$$

Доказательство. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда

$$\vec{f}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{f}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{f}(\overrightarrow{AC}) =$$
$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}(\vec{b}). ◀$$

На диаграммном языке то обстоятельство, что $f-$ морфизм плоскостей параллельных переносов можно сформулировать следующим образом.

Утверждение 3. *Морфизм аффинного типа* $f: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *плоскостей параллельных переносов* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *является их морфизмом тогда и только тогда, когда существует отображение* $g: \mathbf{V}(\mathcal{A}_1) \to \mathbf{V}(\mathcal{A}_2)$ *такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & \mathbf{V}(\mathcal{A}_1) \\ \downarrow f \times f & & \downarrow g \\ \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{\Phi_2} & \mathbf{V}(\mathcal{A}_2) \end{array} \qquad (4)$$

коммутативна.

Доказательство. Поясним обозначения в диаграмме (4). Для каждой из двух плоскостей $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, множество $\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i$ отождествляется с множеством $\mathbf{OS}(\mathcal{A}_i)$ направленных отрезков этой плоскости: $(A,B) \leftrightarrow AB$; символом Φ обозначено отображение, ставящее в соответствие каждому направленному отрезку AB плоскости вектор $\overrightarrow{AB}$; отображение $f \times f$ действует покомпонентно: $f \times f: \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2$, $(A,B) \mapsto (f(A), f(B))$.

Пусть $f-$морфизм плоскостей параллельных переносов. Тогда в качестве g можно взять $\vec{f}$. Обратно, пусть $g: \mathbf{V}(\mathcal{A}_1) \to \mathbf{V}(\mathcal{A}_2)$ – отображение, для которого коммутативна диаграмма (4). Тогда ввиду коммутативности диаграммы для произвольного направленного отрезка AB будем иметь: $\overrightarrow{f(A)f(B)} = g(\overrightarrow{AB})$. Если отрезки AB и CD эквиполлентны, т.е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то отрезки $f(A)f(B)$ и $f(C)f(D)$ также эквиполлентны, поскольку $\overrightarrow{f(C)f(D)} = g(\overrightarrow{CD}) = g(\overrightarrow{AB})$. Значит, $f-$морфизм плоскостей параллельных переносов.◀

Отметим некоторые свойства перехода от морфизма f к его векторной части $\vec{f}$.

Утверждение 4. (i) *Если* $\mathcal{A}$ – *плоскость параллельных переносов, то*

$$\overrightarrow{\mathbf{Id}_{\mathcal{A}}} = \mathbf{Id}_{\mathbf{V}(\mathcal{A})}.$$

(ii) *Если* $f_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *и* $f_1 : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ *– морфизмы плоскостей параллельных переносов, то*

$$\overrightarrow{f_2 f_1} = \overrightarrow{f_2}\,\overrightarrow{f_1}.$$

Доказательство. (i) Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор плоскости $\mathcal{A}$, то

$$\overrightarrow{\mathbf{Id}_{\mathcal{A}}}(\vec{a}) = \overrightarrow{\mathbf{Id}_{\mathcal{A}}(A)\mathbf{Id}_{\mathcal{A}}(B)} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{Id}_{\mathbf{V}(\mathcal{A})}(\vec{a}).$$

(ii) Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор плоскости $\mathcal{A}_1$, то

$$\overrightarrow{f_2}\,\overrightarrow{f_1}(\vec{a}) = \overrightarrow{f_2}\,(\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{AB})) = \overrightarrow{f_2}\,(\overrightarrow{f_1(A)f_1(B)}) = \overrightarrow{f_2(f_1(A))f_2(f_1(B))} =$$
$$\overrightarrow{(f_2 f_1)(A)(f_2 f_1)(B)} = \overrightarrow{f_2 f_1}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f_2 f_1}(\vec{a}).\text{[1]} \blacktriangleleft$$

<u>Определение 3</u>. *Биективный морфизм* $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *плоскостей параллельных переносов называется* ***изоморфизмом*** *плоскости параллельных переносов* $\mathcal{A}_1$ *на плоскость параллельных переносов* $\mathcal{A}_2$. *Плоскость параллельных переносов* $\mathcal{A}_1$ *называется* ***изоморфной*** *плоскости параллельных переносов* $\mathcal{A}_2$ (*обозначение* $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$), *если существует изоморфизм* $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$.

Пусть f – изоморфизмом плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}_1$ на плоскость параллельных переносов $\mathcal{A}_2$. Рассмотрим обратное отображение $f^{-1} : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$. Оно является изоморфизмом аффинного типа (утверждение 4.1), следовательно, сохраняет параллелограммы и, как следует из теоремы 7.1, сохраняет эквиполлентность направленных отрезков. Таким образом, $f^{-1} : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$ также является изоморфизмом плоскостей параллельных переносов, так что можно, упрощая терминологию определения 3, говорить о паре изоморфных плоскостей параллельных переносов, не разделяя их на первую и вторую. Изоморфные плоскости параллельных переносов не только устроены одинаково как плоскости аффинного типа, но и имеют изоморфные группы векторов, как показывает следующее утверждение.

---

[1] Для читателей, знакомых с теорией категорий, доказанное утверждение означает что переход $(\mathcal{A}, f) \to (\mathbf{V}(\mathcal{A}), \vec{f})$ является *функтором* из категории плоскостей аффинного типа в категорию абелевых групп.

Утвержение 5. *Пусть* $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *– изоморфизм плоскостей параллельных переносов. Тогда отображение* $\vec{f} : \mathbf{V}(\mathcal{A}_1) \to \mathbf{V}(\mathcal{A}_2)$ *является изоморфизмом групп и* $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$.

Упражнение 8. *Докажите сформулированное утверждение.*

Последующие определения формулируются по аналогии со случаем плоскостей аффинного типа (см. § 4).

Определение 4. ***Автоморфизмом*** *плоскости параллельных переносов* $\mathcal{A}$ *называется изоморфизм* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *плоскости параллельных переносов на себя.*

Утвержение 6. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– плоскость параллельных переносов. Тогда любой автоморфизм плоскости* $\mathcal{A}$ *как плоскости аффинного типа является автоморфизмом плоскости* $\mathcal{A}$ *как плоскости параллельных переносов.*

Доказательство. Пусть $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – автоморфизм плоскости $\mathcal{A}$ как плоскости аффинного типа. Требуется показать, что f сохраняет эквивалентность направленных отрезков. Для этого, согласно теореме 7.1, достаточно доказать, что при отображении f параллелограмм переходит в параллелограмм. Другими словами, достаточно доказать, что свойство фигуры быть параллелограммом является аффинным свойством, что и было сделано в утверждении 4.4.◄

Таким образом, множество всех автоморфизмов плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$ совпадает с множеством всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ плоскости $\mathcal{A}$ как плоскости аффинного типа и является группой относительно композиции отображений.

!! **Замечание 5.** По аналогии со случаем плоскости аффинного типа можно было бы определить *планиметрию параллельных переносов* как раздел математики, изучающий геометрические свойства фигур в плоскости параллельных переносов, т.е. свойства, инвариантные относительно всех автоморфизмов этой плоскости. Однако, как следует из утверждения 5, ничего нового мы не получим, планиметрия параллельных переносов является частью аффинной планиметрии.

Пусть $\mathcal{A}$ – плоскость параллельных переносов и $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – гомотетия. Как и любая дилатация, гомотетия h является автоморфизмом этой плоскости как плоскости аффинного типа (теорема 4.1). Следовательно (утверждение 8.6), отображение h – автоморфизм плоскости $\mathcal{A}$ как плоскости параллельных переносов. Поэтому можно говорить о *векторной части гомотетии* h, т.е. об отображении

$$\vec{h} : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbf{V}(\mathcal{A}),\ \overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{h(A)h(B)}.$$

Для $\vec{h}$ справедливы все сформулированные выше утверждения о векторных частях морфизмов, в частности, $\vec{h}$ – автоморфизм группы векторов $\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Кроме того, векторные части гомотетий обладают некоторыми дополнительными свойствами.

Теорема 9.1. (i) *Пусть* $\mathcal{A}$ *– плоскость параллельных переносов,* h *– гомотетия плоскости* $\mathcal{A}$ *с неподвижной точкой* O*. Тогда для любого параллельного переноса* $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A})$ *отображение* $\tau h \tau^{-1}$ *является гомотетией с неподвижной точкой* $\tau(O)$ *и векторные части гомотетий* $\tau h \tau^{-1}$ *и* h *равны.*

(ii) *Пусть* $\vec{H}(\mathcal{A})$ *– множество векторных частей гомотетий плоскости* $\mathcal{A}$*. Тогда* $\vec{H}(\mathcal{A})$ *является группой относительно композиции отображений. При фиксированной точке* $O \in \mathcal{A}$ *естественное отображение*

$$H_O(\mathcal{A}) \to \vec{H}(\mathcal{A}),\ h \mapsto \vec{h} \tag{5}$$

является изоморфизмом групп[2].

Доказательство. (i) Ясно, что $\tau(O)$ - неподвижная точка дилатации $\tau h \tau^{-1}$ и потому $\tau h \tau^{-1}$ – гомотетия. С учетом того, что при параллельном переносе τ всегда $\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} = \overrightarrow{AB}$, заключаем, что векторные части гомотетий h и $\tau h \tau^{-1}$ равны.

(ii) Прежде всего, отметим, что ввиду (i) множество $\vec{H}(\mathcal{A})$ векторных частей всех гомотетий совпадает с множеством векторных частей гомотетий, оставляющих неподвижной фиксированную точку $O \in \mathcal{A}$. Поэтому для любых $\vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \vec{H}(\mathcal{A})$ можно считать, что O – неподвижная точка гомотетий h_1 и h_2, т.е. $h_1, h_2 \in H_O(\mathcal{A})$. Но тогда $h_1 h_2 \in H_O(\mathcal{A})$ и так как $\vec{h}_2 \vec{h}_1 = \overrightarrow{h_2 h_1}$, то $\vec{h}_2 \vec{h}_1 \in \vec{H}(\mathcal{A})$. Таким образом, множество $\vec{H}(\mathcal{A})$ замкнуто

---

[2] Напомним, что $H_O(\mathcal{A})$ обозначает множество всех гомотетий плоскости, оставляющих неподвижной точку O.

относительно композиции отображений. Нейтральным элементом в $\overrightarrow{H}(\mathcal{A})$ является, очевидно, векторная часть тождественной гомотетии и для любого $\vec{h} \in \overrightarrow{H}(\mathcal{A})$ $\vec{h}^{-1} = \overrightarrow{h^{-1}}$. Таким образом, $\overrightarrow{H}(\mathcal{A})$ является группой. Так как для любых $\vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \overrightarrow{H}(\mathcal{A})$ верно равенство $\vec{h}_2\vec{h}_1 = \overrightarrow{h_2h_1}$, то отображение (1) является гомоморфизмом групп. Осталось убедиться, что оно биективно. Мы уже отметили, что отображение (5) сюрьективно. Пусть $h_1, h_2 \in H_O(\mathcal{A})$ и $\vec{h}_1 = \vec{h}_2$. Тогда для любой точки $M \in \mathcal{A}$ $\vec{h}_1(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{Oh_1(M)} = \overrightarrow{Oh_2(M)} = \vec{h}_1(\overrightarrow{OM})$. Это означает, что $h_1(M) = h_2(M)$, т.е. $h_1 = h_2$. Таким образом, отображение (5) инъективно и, следовательно, биективно.◄

Следствие 1. *Пусть* $\mu, \nu \in \overrightarrow{H}(\mathcal{A})$ *и* $\mu(\vec{a}) = \nu(\vec{a})$ *для некоторого ненулевого вектора* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$. *Тогда* $\mu = \nu$. *Другими словами, векторная часть гомотетии полностью определяется образом одного ненулевого вектора.*

Доказательство. По теореме 9.2 существуют гомотетии $h_1, h_2 \in H_O(\mathcal{A})$ такие, что $\mu = \vec{h}_1$, $\nu = \vec{h}_2$. Если $A-$ такая точка плоскости $\mathcal{A}$, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{Oh_1(A)} = \vec{h}_1(\vec{a}) = \vec{h}_2(\vec{a}) = \overrightarrow{Oh_2(A)}$, т.е. $h_1(A) = h_2(A)$. Поскольку каждая гомотетия однозначно определяется образами двух точек, то $h_1 = h_2$, $\vec{h}_1 = \vec{h}_2$, $\mu = \nu$.◄