§ 7. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНОСЫ И ВЕКТОРЫ

Напомним (определение 1.4), что отрезком в плоскости аффинного типа называется пара ее точек $\{A, B\}$. Понятно, что $\{B, A\}$ – отрезок, совпадающий с отрезком $\{A, B\}$, т.е. концы отрезка – точки A и B – в этом определении совершенно равноправны. Иногда, однако, приходится различать концевые точки. Тогда одна из них (например, точка A) называется *началом*, а другая (точка B) – *концом*, а сам отрезок - *направленным отрезком*. Такое различие концов отрезка связано, например, с описанием траектории прямолинейного движения тела, начало которого находится в начальной точке отрезка, а конец – в его конце. Много других примеров такого взгляда на отрезок, когда различаются начало и конец, можно найти в физике. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 7.1. Направленным отрезком *плоскости аффинного типа $\mathcal{A}$ называется упорядоченная пара (A, B) точек плоскости. Первая точка пары (точка A) называется* ***началом*** *отрезка, а вторая (точка B) – его* ***концом***.

Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B будем обозначать *AB*. Заметим, что по определению не исключается ситуация, когда $A = B$. Направленный отрезок *AA* называется ***нулевым*** (ниже мы объясним выбор такого названия). Ненулевой направленный отрезок *AB* определяет прямую $l(A, B)$. Хотя направленный отрезок не является фигурой (направленный отрезок – элемент множества $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, но не $P(\mathcal{A})$[1]), все же иногда, допуская вольность речи, будем говорить, что *направленный отрезок AB лежит на прямой l*, имея ввиду, что его начало и конец принадлежат этой прямой. На рисунках направленные отрезки обычно изображаются в виде прямолинейной стрелки, направленной от начала к концу (рис. 1).

Рис. 1

[1] Символом $P(\mathcal{A})$ обозначается множество всех подмножеств (т.е. фигур) плоскости $\mathcal{A}$.

Множество всех направленных отрезков плоскости $\mathcal{A}$ обозначим $\mathbf{OS}(\mathcal{A})$.

Упражнение 7.1. *Покажите, что множество* $\mathbf{OS}(\mathcal{A})$ *бесконечно для бесконечной плоскости* $\mathcal{A}$. *Вычислите число элементов множества* $\mathbf{OS}(\mathcal{A})$ *для конечной плоскости порядка n.*

Далее в этом параграфе, используя направленные отрезки, мы определим важное понятие *вектора.*

Определение 7.2. *Плоскость аффинного типа* $\mathcal{A}$ *называется* ***плоскостью параллельных переносов****, если для любых точек* P, $Q \in \mathcal{A}$ *существует параллельный перенос* $\tau_{P,Q}$ *со свойством* $\tau_{P,Q}(P) = Q$.

Не любая плоскость аффинного типа является плоскостью параллельных переносов (см. пример 8.1). Тем не менее, плоскости параллельных переносов составляют важный класс, поскольку, как мы увидим ниже, именно среди таких плоскостей находятся плоскости, в которых может быть эффективно использован метод координат. Отметим также, что все плоскости, которые встречались ранее, являются плоскостями параллельных переносов.

Упражнение 7.2. *Покажите, используя теорему 6.1, что для любого поля* $\mathbf{F}$ *плоскость* $\mathrm{A}^2(\mathbf{F})$ *является плоскостью параллельных переносов.*

Ниже мы будем использовать следующее свойство плоскостей параллельных переносов.

Утверждение 7.1. *Группа параллельных переносов* $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ *плоскости параллельных переносов* $\mathcal{A}$ *является абелевой группой.*

Доказательство. В силу свойства 5.8 достаточно показать, что в плоскости $\mathcal{A}$ есть параллельные переносы различных направлений. Пусть $A, B, C -$ три точки плоскости $\mathcal{A}$, не лежащие на одной прямой. Тогда направления параллельных переносов $\tau_{A,B}$ и $\tau_{A,C}$ различны, поскольку они определяются пересекающимися прямыми $l(A,B)$ и $l(A,C)$. ◄

Далее до конца параграфа $\mathcal{A}$ обозначает плоскость параллельных переносов, если иное не оговаривается. В этом случае любой направленный отрезок AB плоскости $\mathcal{A}$ определяет параллельный перенос $\tau_{A,B}$, переводящий точку A в точку B, т.е. начало отрезка в его конец. В силу свойства 5.4. всякий такой параллельный перенос определен однозначно направленным отрезком. Поэтому возникает отображение множества $\mathbf{OS}(\mathcal{A})$ направленных отрезков плоскости $\mathcal{A}$ в множество параллельных переносов $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ этой же плоскости:

$$\mathbf{OS}(\mathcal{A}) \to \mathbf{T}(\mathcal{A}), \quad AB \mapsto \tau_{A,B}. \tag{1}$$

Отображение (1) сюръективно, т.е. для каждого параллельного переноса $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A})$ существует направленный отрезок, определяющий τ. В качестве начальной точки такого отрезка можно взять произвольную точку $A \in \mathcal{A}$, а в качестве конечной – точку $B = \tau(A)$.

Отображение (1) не инъективно, поскольку разные направленные отрезки могут определять один и тот же параллельный перенос. Действительно, в любой плоскости имеются не менее четырех нулевых отрезков и каждый из них, например, AA, очевидно, определяет параллельный перенос, являющийся тождественным отображением: $\tau_{A,A} = \mathbf{Id}$. Неинъективность отображения (1) в случае плоскости, изучаемой в школе, иллюстрируется рисунком 2. Здесь различные направленные отрезки AB и CD определяют один и тот же параллельный перенос.

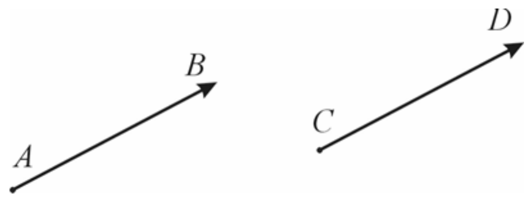

Рис. 2

Инъективности отображения (1) можно добиться, рассматривая вместо одного направленного отрезка совокупность отрезков, являющихся прообразом параллельного переноса при отображении (1). Для этого вводится следующее естественное понятие *эквиполлентных* (иногда говорят об эквивалентных) направленных отрезков.

Определение 7.3. *Направленный отрезок AB называются* ***эквиполлентным*** *направленному отрезку CD (обозначение $AB \sim CD$), если AB и CD определяют один и тот же параллельный перенос:*

$$AB \sim CD \iff \tau_{A,B} = \tau_{C,D}.$$

Утверждение 7.2. *Пусть AB, CD, EF – направленные отрезки плоскости $\mathcal{A}$. Тогда*

(i) $AB \sim AB$;

(ii) $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$;

(iii) $AB \sim CD$ *и* $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$.

Упражнение 7.3. *Докажите утверждение* 2.

Свойства (i) – (iii) означают, что эквиполлентность направленных отрезков есть отношение эквивалентности на множестве $\mathbf{OS}(\mathcal{A})$, следовательно, множество $\mathbf{OS}(\mathcal{A})$ разбивается на классы эквиполлентных отрезков.

Определение 7.4. *Класс эквиполлентных направленных отрезков плоскости* $\mathcal{A}$ *называется* ***вектором*** *этой плоскости*[2].

Всякий вектор есть совокупность пар $(A, \tau(A))$ где A – любая точка плоскости $\mathcal{A}$, а τ – фиксированный параллельный перенос. Используя аналогию с графиками функций, можно вектор назвать графиком параллельного переноса τ (рис. 3).

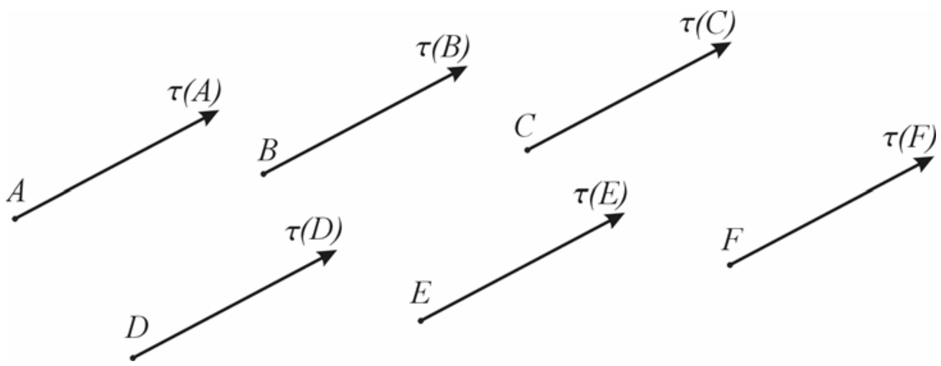

Рис. 3

Для обозначения векторов обычно используют малые латинские буквы со стрелкой наверху: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Каждый направленный отрезок, составляющий данный вектор, называется ***представителем*** этого вектора. Если AB – представитель вектора $\vec{a}$, то для вектора $\vec{a}$ используют также обозначение $\overrightarrow{AB}$. По определению, все нулевые отрезки AA образуют один класс эквивалентности, соответствующий тождественному отображению плоскости $\mathcal{A}$. Этот вектор называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$ ($\forall A \in \mathcal{A}$ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$). Множество всех векторов плоскости $\mathcal{A}$ обозначим

---

[2] Другими словами, вектор есть не что иное, как элемент фактор-множества $\mathbf{OS}(\mathcal{A}) \times \mathbf{OS}(\mathcal{A})$ по отношению эквиполлентности (см. [ ], §).

$\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Параллельный перенос, соответствующий вектору $\vec{a}$, будем обозначать $\tau_{\vec{a}}$.

Как следует из определения 3, отображение (1) определяет (*индуцирует*) биекцию

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbf{T}(\mathcal{A}), \quad \overrightarrow{AB} \mapsto \tau_{A,B} \tag{2}$$

множества $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ векторов плоскости $\mathcal{A}$ на множество $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ параллельных переносов этой плоскости. Другими словами, отображение (2) осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством векторов и множеством параллельных переносов плоскости $\mathcal{A}$.

Замечание 7.1. Определенное выше понятие вектора применимо для любой плоскости аффинного типа, однако поскольку в случае общей плоскости аффинного типа для некоторых пар точек (A, B) может не существовать параллельного переноса, переводящего A в B, для определения векторов следует вместо множества $\mathbf{OS}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ всех направленных отрезков рассмотреть его подмножество $\mathbf{OST}(\mathcal{A})$, состоящее из тех направленных отрезков, для которых существует параллельный перенос, переводящий начало в конец.

Упражнение 7.4. *Покажите, что для любой плоскости аффинного типа $\mathcal{A}$ множество $\mathbf{OST}(\mathcal{A})$, а, следовательно и $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, не пусты.*

Геометрическая интерпретация понятия эквиполлентности направленных отрезков содержится в следующей теореме.

<u>Теорема 7.1.</u> *Пусть A, B, C, D – точки плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$. Тогда верны следующие утверждения:*

(i) $AB \sim AD \Leftrightarrow B = D$ (*два направленных отрезка с равными начальными точками эквиполлентны тогда и только тогда, когда равны и конечные точки этих отрезков*);

(ii) *если A, B, C не лежат на одной прямой, то $AB \sim CD \Leftrightarrow$ четверка точек $\{A, B, C, D\}$ образует параллелограмм $ABDC$* (*рис.* 4);

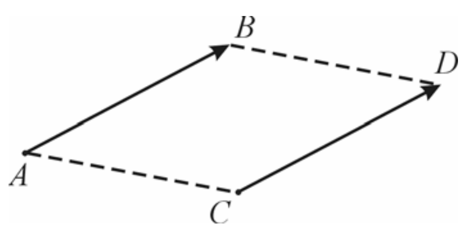

Рис. 4

(iii) *если* A, B, C *– попарно различные точки одной прямой, то* $AB \sim CD \Leftrightarrow$ *существуют такие точки* E, F, *что* $ABFE$ *и* $CDFE$ *– параллелограммы* (*рис.* 5).

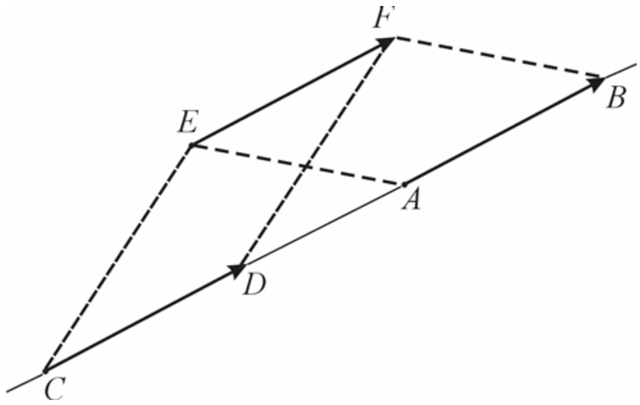

Рис. 5

Доказательство. (i) Условие $AB \sim AD$ означает, что точка A переводится в точки B и D одним и тем же параллельным переносом. Теперь необходимость (i) следует из того, что образ элемента при любом отображении определен однозначно, а достаточность – из того что параллельный перенос определяется образом одной точки (свойство 5.4).

(ii) Необходимость. Если $AB \sim CD$, то $B = \tau(A)$, $D = \tau(C)$ для одного и того же параллельного переноса τ. Поскольку по условию (ii) точки A, B, C не лежат на одной прямой, а параллельный перенос каждую прямую переводит в параллельную, то $l(A,C) \parallel l(B,D)$. Пусть теперь τ_1 – параллельный перенос, определяемый направленным отрезком AC. По свойству 5.8 $\tau\tau_1 = \tau_1\tau$, следовательно,

$$\tau_1(B) = \tau_1(\tau(A)) = \tau(\tau_1(A)) = \tau(C) = D.$$

Итак, $\tau_1(A) = C, \tau_1(B) = D$, откуда следует, что $l(A,B) \parallel l(C,D)$. Доказано, что $ABDC$ – параллелограмм.

Достаточность. Пусть четверка точек $\{A, B, C, D\}$ образует параллелограмм $ABDC$ и пусть $\tau = \tau_{A,B}, \tau_1 = \tau_{A,C}$. Тогда $\tau\tau_1 = \tau_1\tau$, следовательно, $\tau(C) = \tau(\tau_1(A)) = \tau_1(\tau(A)) = \tau_1(B)$. Точка $\tau(C)$ лежит на прямой, параллельной прямой $l(A,C)$ и проходящей через $B = \tau(A)$, т.е. на прямой $l(B,D)$. Аналогично точка $\tau_1(B)$ лежит прямой на прямой $l(C,D)$. Значит, $\tau(C) = \tau_1(B) = D$, т.е. $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$, $\tau_{A,C} = \tau_{B,D}$. Первое из последних двух равенств означают, что $AB \sim CD$.

(iii) Необходимость. Пусть $E-$ некоторая точка, лежащая вне прямой $l(A,B)$, и пусть $\tau=\tau_{A,E}$. Обозначим $F=\tau(B)$. Тогда по (ii) четверка точек $\{A,B,F,E\}$ образует параллелограмм $ABFE$. Но тогда в силу транзитивности отношения эквиполлентности $CD\sim AB\sim EF$, что вновь ввиду (ii) позволяет утверждать, что $CDFE-$ параллелограмм.

Достаточность. Пусть $ABFE$ и $CDFE-$ параллелограммы. Используя дважды (ii), получим соответственно $AB\sim EF$ и $CD\sim EF$. Следовательно, $AB\sim CD$. ◀

Следствие 7.1. *Пусть $A,B,C,D-$точки плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$. Тогда верны следующие эквивалентности:*

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}.$$

Доказательство. Поскольку векторы равны тогда и только тогда, когда представляющие их отрезки эквиполлентны, то в силу теоремы 1 каждое из четырех равенств в формулировке следствия эквивалентно (в зависимости от условий на точки A,B,C) либо совпадению $A=C,\ B=D$; либо тому, что $ABDC-$ параллелограмм; либо тому, что существуют такие точки E,F, что $ABFE$ и $CDFE$ – параллелограммы. ◀

Пусть $A-$ произвольная точка, $\vec{a}-$произвольный вектор плоскости $\mathcal{A}$. Тогда существует точка $B\in\mathcal{A}$ такая, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Действительно, достаточно в качестве B взять $\tau_{\vec{a}}(A)$. В силу пункта (i) теоремы 1 такая точка B определяется единственным образом по точке A и вектору $\vec{a}$. Возникающее отображение

$$\mathcal{A}\times\mathbf{V}(\mathcal{A})\to\mathcal{A},\ (A,\vec{a})\mapsto B,\ \text{где}\ \overrightarrow{AB}=\vec{a},\tag{3}$$

называется ***откладыванием вектора*** $\vec{a}$ *от точки A.* Таким образом, результат откладывания вектора $\vec{a}$ от точки A есть конец направленного отрезка с началом в A, представляющего данный вектор. Если откладывать от фиксированной точки O всевозможные векторы, то возникает отображение

$$\Phi_O:\mathbf{V}(\mathcal{A})\to\mathcal{A},\ \vec{a}\mapsto M,\ \text{где}\ \overrightarrow{OM}=\vec{a}.\tag{4}$$

Отметим следующее важное свойство отображения (4).

Утверждение 7.3. *Если $\mathcal{A}-$ плоскость параллельных переносов, то для любой точки $O\in\mathcal{A}$ отображение* (4) *является биекцией.*

Доказательство. Пусть $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ и $M_1 \neq M_2$. Тогда в силу утверждения (i) теоремы 1 направленные отрезки OM_1 и OM_2 не эквиполлентны, следовательно, $\overrightarrow{OM_1} \neq \overrightarrow{OM_2}$, что доказывает инъективность отображения Φ_O. Если $M-$ произвольная точка плоскости $\mathcal{A}$, то вектор $\overrightarrow{OM}$ является ее прообразом при отображении (4). Это доказывает сюръективность отображения Φ_O. ◀

Так как отображение (4) биективно, то для него существует обратное отображение $\Phi_O^{-1} = \Psi_O : \mathcal{A} \to \mathbf{V}(\mathcal{A})$, которое каждой точке M плоскости $\mathcal{A}$ ставит в соответствие вектор $\overrightarrow{OM}$, называемый ***радиус-вектором*** точки M.

Для ненулевых векторов корректно определяется понятие направления.

Определение 7.5. *Пусть $\vec{a} -$ ненулевой вектор плоскости $\mathcal{A}$.* ***Направлением*** *вектора $\vec{a}$ называется направление плоскости $\mathcal{A}$, определяемое прямой $l(A,B)$ такой, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Векторы (ненулевые) называются* ***коллинеарными****, если их направления совпадают. Направление нулевого вектора не определяется, будем считать, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.*

Упражнение 7.5. *Докажите корректность определения, т. е. независимость направления вектора от выбора направленного отрезка в классе эквивалентности, определяющего данный вектор.*

Поскольку отображение (2) устанавливает биекцию между множеством $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ векторов плоскости $\mathcal{A}$ и множеством $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ параллельных переносов этой плоскости и поскольку $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ является группой, то с помощью этой биекции естественным образом определяется операция сложения векторов, превращающая множество $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ в группу.

Определение 7.6. *Для произвольной пары векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$* ***суммой*** *вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется вектор, который обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ и который соответствует при отображении (2) параллельному переносу $\tau_{\vec{b}}\tau_{\vec{a}}$.*

Другими словами, вектор $\vec{a} + \vec{b}$ определяется равенством:

$$\tau_{\vec{a}+\vec{b}} = \tau_{\vec{b}}\tau_{\vec{a}}. \tag{5}$$

Упражнение 7.6. *Докажите, что множество* $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ *всех векторов плоскости* $\mathcal{A}$ *с операцией сложения* (3) *является абелевой группой.*

Замечание 7.2. Традиционно нейтральный элемент относительно операции сложения (т.е. некоторой коммутативной операции) называется ***нулем***. Легко видеть, что нулем в группе $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ является нулевой вектор $\vec{0}$. Этим объясняется название "нулевой направленный отрезок" для любого отрезка AA, $A\in\mathcal{A}$, представляющего вектор $\vec{0}$.

Используя операцию откладывания вектора от точки, сумму векторов можно найти следующим образом. Пусть $O-$ произвольная точка плоскости $\mathcal{A}$, $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Отложив от точки O вектор $\vec{a}$, получим точку A такую, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. Далее, отложив от точки A вектор $\vec{b}$, получим точку B такую, что $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Тогда, поскольку $\tau_{\vec{a}}(O)=A, \tau_{\vec{b}}(A)=B$, то $\tau_{\vec{a}+\vec{b}}(O)=(\tau_{\vec{b}}\tau_{\vec{a}})(O)=\tau_{\vec{b}}(\tau_{\vec{a}}(O))=\tau_{\vec{b}}(A)=B$. Сравнивая первый и последний член последней цепочки равенств, получаем, что $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Меняя точку O и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в качестве точек A и B мы получим произвольные точки плоскости. Итак, для любых трех точек $O,A,B\in\mathcal{A}$ верно равенство:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}, \tag{6}$$

которое называется ***соотношением Шаля***. Правило нахождения суммы векторов по соотношению Шаля называется ***правилом замыкающей*** (рис. 6).

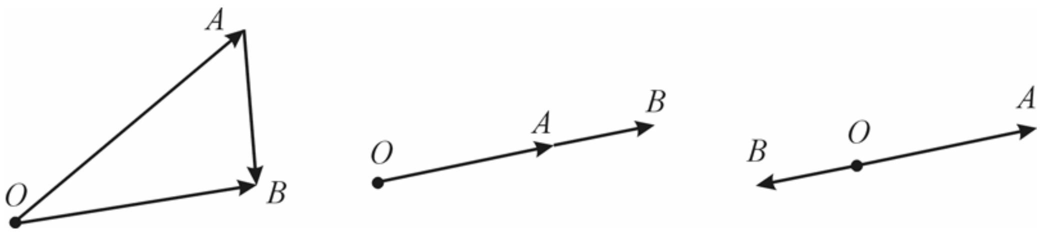

Рис. 6

Для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует также другой способ нахождения суммы векторов, который называется ***правилом параллелограмма.*** Пусть $O-$ произвольная точка плоскости $\mathcal{A}$. Отложим от точки O векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим точки A и B такие, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Пусть l_1- прямая, проходящая через точку A параллельно $l(O,B)$, а l_2- прямая, проходящая через точку B параллельно $l(O,A)$ (рис. 7).

Упражнение 7.7*. Докажите, что*

(i) *прямые* l_1 *и* l_2 *– различные пересекающиеся прямые;*

(ii) *если* $C-$ *точка пересечения* l_1 *и* l_2, *то* $OACB-$ *параллелограмм и* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ *(сумма "векторов-сторон" равна "вектору-диагонали".*

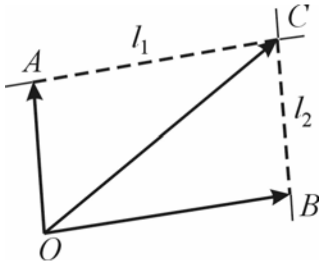

Рис. 7

Упражнение 7.8. *Докажите, что множество* $\mathbf{V}(\alpha)$ *всех векторов плоскости* $\mathcal{A}$, *имеющих данное направление* α, *является подгруппой группы* $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ *всех векторов плоскости* $\mathcal{A}$.

Утверждение 7.4. *Пусть* α *и* $\beta-$*различные направления плоскости* $\mathcal{A}$. *Тогда*

(i) $\mathbf{V}(\alpha)\bigcap\mathbf{V}(\beta)=\vec{0}$;

(ii) *любой вектор* $\vec{a}\in\mathbf{V}(\mathcal{A})$ *единственным образом представляется в виде*

$$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}, \quad где\ \vec{b}\in\mathbf{V}(\alpha),\ \vec{c}\in\mathbf{V}(\beta). \tag{7}$$

Доказательство. Утверждение (i) очевидно, поскольку только нулевой вектор является, согласно определению 5, вектором различных направлений.

(ii) Для вектора $\vec{a}$, имеющего направление α либо β, представление (7) имеет вид $\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}$ либо $\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$ соответственно. Пусть направление вектора $\vec{a}$ отлично от α и β. Существуют две точки $O,C\in\mathcal{A}$ такие, что $\overrightarrow{OC}=\vec{a}$. Проведем через точки O и C по две прямые направлений α и β. Кроме точек O и C эти пары прямых пересекаются в точках A и B. Тогда, очевидно, что $OACB-$ параллелограмм и по правилу параллелограмма получаем равенство $\vec{a}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ вида (7) (рис. 8).

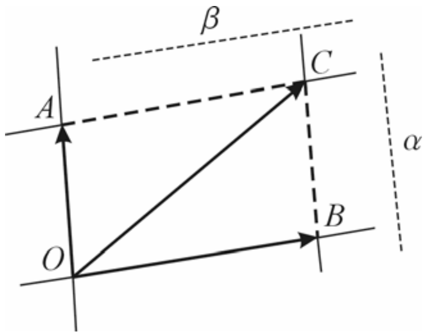

Рис. 8

Теперь докажем единственность представления (7). Пусть наряду с (7) верно равенство $\vec{a} = \vec{b}' + \vec{c}'$, $\vec{b}' \in \mathbf{V}(\alpha)$, $\vec{c}' \in \mathbf{V}(\beta)$. Тогда $\vec{b} + \vec{c} = \vec{b}' + \vec{c}'$ или $\vec{b} - \vec{b}' = \vec{c} - \vec{c}'$. Поскольку $\vec{b} - \vec{b}'$ и $\vec{c} - \vec{c}'$ – векторы различных направлений, то из последнего равенства следует, что $\vec{b} - \vec{b}' = \vec{c} - \vec{c}' = \vec{0}$, т.е. $\vec{b} = \vec{b}'$ и $\vec{c} = \vec{c}'$. ◀

Определение 7.7. *Пусть G – абелева группа и H, N – ее нетривиальные подгруппы, такие, что $H \cap N = \{0\}$ и $G = \{h + n \mid h \in H,\ n \in N\}$. Говорят, что G есть **прямая сумма** подгрупп H и N и пишут $G = H \oplus N$.*

Таким образом, группа векторов $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ является прямой суммой любых двух подгрупп векторов различных направлений.

Упражнение 7.8. (i) *Докажите, что определение операции сложения векторов по формуле* (5) *годится для любой плоскости аффинного типа $\mathcal{A}$ и что множество $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ с этой операцией сложения является группой.*

(ii) *Проанализируйте, какие еще определения и утверждения этого параграфа о векторах плоскостей параллельных переносов можно перенести на векторы плоскостей аффинного типа.*