§ 5. ГОМОТЕТИИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНОСЫ

В дальнейшем мы обсудим основной метод аналитической геометрии – метод координат. Для этого нам понадобятся некоторые дополнительные сведения о дилатациях.

Упражнение 5.1. *Рассмотрим отображения плоскости* $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$ *в себя следующих двух видов*:

$$\varphi : \mathrm{A}^2(\mathbf{R}) \to \mathrm{A}^2(\mathbf{R}), (m, n) \mapsto (m + a, n + b),$$
$$\psi : \mathrm{A}^2(\mathbf{R}) \to \mathrm{A}^2(\mathbf{R}), (m, n) \mapsto (fm, fn).$$

Здесь a, b – фиксированные, не равные одновременно нулю действительные числа, f *– фиксированное ненулевое число. Докажите, что* φ *– дилатация, не имеющая неподвижных точек, а* ψ *– дилатация, имеющая одну неподвижную точку.*

Учитывая это упражнение и содержание предыдущего параграфа, можно констатировать, что нетождественная дилатация либо не имеет неподвижных точек, либо имеет одну неподвижную точку.

Разобьем множество всех дилатаций на два класса в зависимости от количества неподвижных точек.

Определение 5.1. Гомотетией *называется дилатация, имеющая неподвижные точки.*

Как отмечено выше, нетождественная гомотетия имеет лишь одну неподвижную точку, которая называется в этом случае ***центром гомотетии***. Множества всех гомотетий плоскости аффинного типа $\mathcal{A}$ обозначим $H(\mathcal{A})$.

Определение 5.2. Параллельным переносом *называется дилатация, не имеющая неподвижных точек.*

Замечание 5.1. По соображениям удобства часто тождественное отображение относят и к параллельным переносам. Мы также будем следовать этой традиции. Таким образом, множества гомотетий и параллельных переносов плоскости $\mathcal{A}$ будут иметь у нас один общий элемент – тождественное отображение.

Свойства гомотетий

Свойство 5.1. *Пусть O – центр гомотетии* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, P *– произвольная точка плоскости* $\mathcal{A}$. *Тогда точки O, P,* $\varphi(P)$ *лежат на одной прямой.*

Доказательство. Из определения дилатации следует, что $l(O,P)\parallel l((\varphi)O,\varphi(P))=l(O,\varphi(P))$. Следовательно, $l(O,P)=l(O,\varphi(P))$ (т.к. эти прямые параллельны и у них есть общая точка O).◄

Следствие 5.1. *Каждая прямая l, проходящая через центр гомотетии φ, инвариантна относительно этой гомотетии, т.е. $\varphi(l)=l$.*

Упражнение 5.2. *Докажите, что у нетождественной гомотетии других инвариантных прямых, кроме прямых, проходящих через центр гомотетии, нет.*

Замечание 5.2. Пусть $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ – нетождественная гомотетия с центром O. Поскольку всякая дилатация полностью определяется образами двух точек, то для рассматриваемой гомотетии, зная образ еще одной точки, отличной от O, можно определить образ любой точки плоскости.

Например, пусть для треугольника ABC известен образ одной вершины: $A'=\varphi(A)$ и точки O и A различны. Найдем образы двух оставшихся вершин. Обозначим $B'=\varphi(B), C'=\varphi(C)$. Допустим вначале, что центр гомотетии O не лежит на прямых, содержащих стороны треугольника ABC (рис. 1).

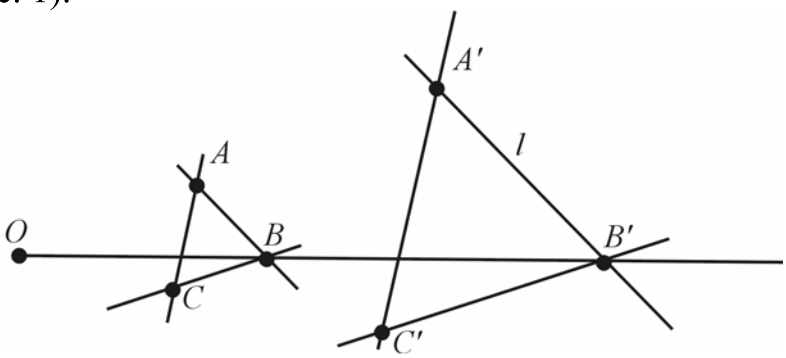

Рис. 1

Тогда $l(O,B)$ и $l(A,B)-$ пара непараллельных прямых, пересекающихся в точке B. Поскольку $\varphi-$ дилатация, то точка B' лежит на прямой l, параллельной прямой $l(A,B)$ и проходящей через точку A'. С другой стороны, по свойству 1 гомотетии $B'\in l(O,B)$. Поскольку в рассматриваемом случае прямые $l(O,B)$ и l не параллельны, то $B'=l(O,B)\cap l$. Аналогично находится образ C' вершины C. В качестве упражнения предлагается провести рассуждение в случае, когда центр гомотетии O лежит на одной из прямых, содержащих стороны треугольника.

Упражнение 5.3. *Пусть $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ – нетождественная гомотетия и $\varphi\{A,B\}=\{C,D\}$. Найдите центр этой гомотетии.*

Упражнение 5.4. *Справедливо ли следующее утверждение: множество всех гомотетий плоскости является группой относительно композиции отображений?*

Упражнение 5.5. *Докажите, что композиция двух гомотетий есть либо гомотетия, либо параллельный перенос.*

Свойство 5.2. *Для любой точки $O \in \mathcal{A}$ множество $H_O(\mathcal{A})$ всех гомотетий плоскости $\mathcal{A}$, оставляющих неподвижной точку O, является группой относительно композиции отображений.*

Упражнение 5.6. *Докажите свойство 2.*

Определение 5.3. *Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры на плоскости аффинного типа $\mathcal{A}$. Фигура Φ_1 называется **гомотетичной** фигуре Φ_2, если существует гомотетия $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такая, что $\varphi(\Phi_1) = \Phi_2$.*

Очевидно, что если Φ_1 гомотетична Φ_2, то и Φ_2 гомотетична Φ_1, поэтому можно просто говорить, что эти фигуры гомотетичны.

Упражнение 5.7. *Выясните, могут ли быть гомотетичными:*

(i) *две пересекающиеся прямые;*

(ii) *два треугольника;*

(iii) *треугольник и параллелограмм;*

Упражнение 5.8. *Докажите, что у плоскости $AFP(2)$ нет других гомотетий, кроме тождественного отображения.*

Свойства параллельных переносов

Свойство 5.3. *Пусть τ – нетождественный параллельный перенос плоскости аффинного типа $\mathcal{A}$. Тогда $\forall P,Q \in \mathcal{A}\quad l(P,\tau(P)) \parallel l(Q,\tau(Q))$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $Q \in l(P,\tau(P))$. Поскольку параллельный перенос является дилатацией, а при дилатации прямая $l(P,\tau(P))$ инвариантна (упражнение 4.6), то $\tau(Q) \in l(P,\tau(P))$, т.е. $l(P,\tau(P)) = l(Q,\tau(Q))$, что означает, в частности, что $l(P,\tau(P)) \parallel l(Q,\tau(Q))$.

2) Пусть $Q \notin l(P,\tau(P))$. Если бы прямые $l(P,\tau(P))$ и $l(Q,\tau(Q))$ пересекались, то для их общей точки R можно было бы применить рассуждение пункта 1), т.е. мы бы имели $\tau(R) \in l(P,\tau(P))$ и $\tau(R) \in l(Q,\tau(Q))$. Последние два условия означают, что $\tau(R) = R$. Это приводит к противоречию с тем, что τ – нетождественный параллельный перенос – отображение, которое по определению не имеет неподвижных точек. Итак, предположение о том, что прямые $l(P,\tau(P))$ и $l(Q,\tau(Q))$ пересекаются неверно, т.е. они параллельны.◄

Доказанное свойство объясняет название «параллельный перенос» – при отображении τ все точки «переносятся» по параллельным прямым.

Следствие 5.2. *Нетождественный параллельный перенос* τ *порождает направление на плоскости* $\mathcal{A}$*, состоящее из прямых вида* $l(P,\tau(P))$, $P\in\mathcal{A}$. *Это направление называется* ***направлением параллельного переноса.***

Другое важное свойство параллельных переносов состоит в следующем.

Свойство 5.4. *Всякий параллельный перенос определяется однозначно заданием образа одной точки.*

Доказательство. Пусть $\tau-$ параллельный перенос плоскости $\mathcal{A}$ и для данной точки P известен ее образ $\tau(P)$. Если точка P неподвижна относительно параллельного переноса τ, то из определения немедленно следует, что он тождественен. Пусть теперь $\tau(P)\neq P$. Возьмем произвольную точку и построим ее образ. Выделим два случая.

1) Пусть $Q\notin l(P,\tau(P))$. С одной стороны, из определения дилатации (напомним, что параллельный перенос есть дилатация) следует, что $l(P,Q)\parallel l(\tau(P),\tau(Q))$, с другой стороны, по свойству 3 параллельного переноса $l(P,\tau(P))\parallel l(Q,\tau(Q))$. Значит, $\tau(Q)$ однозначно определяется как точка пересечения следующих двух непараллельных прямых: прямой, проходящей через точку $\tau(P)$ параллельно $l(P,Q)$ и прямой, проходящей через точку Q параллельно $l(P,\tau(P))$ (рис. 2).

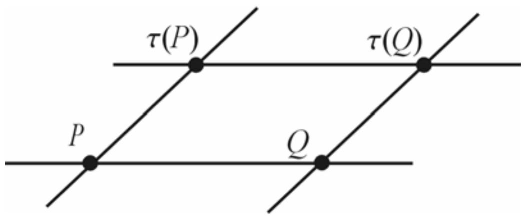

Рис. 2

2) Пусть $R\in l(P,\tau(P))$, $R\neq P$. Выберем точку $Q\in\mathcal{A}$ такую, что $Q\notin l(P,\tau(P))$. В силу вышесказанного, образ $\tau(Q)$ точки Q определен однозначно точками P и $\tau(P)$. Но теперь точка R не принадлежит прямой $l(Q,\tau(Q))$ и потому точка $\tau(R)$ определяется однозначно точками Q и $\tau(Q)$ (рис. 3).

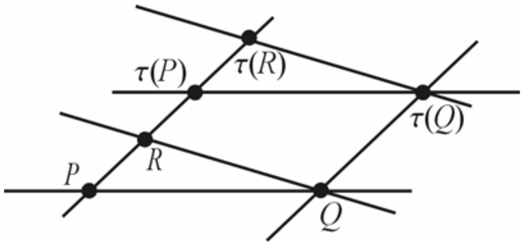

Рис. 3

Упражнение 5.9. *Пусть ABCD – параллелограмм,* τ_1 *и* τ_2 *– параллельные переносы. Известно, что* $\tau_1(A)=B$, $\tau_2(D)=C$. *Докажите, что* $\tau_1=\tau_2$.

Упражнение 5.10. *Пусть ABCD – параллелограмм. Параллельный перенос* τ *точку A переводит в точку B. Найдите:*

(i) *образ отрезка* $\{B,D\}$;

(ii) *образ треугольника ABD;*

(iii) *образ параллелограмма ABCD.*

Полезными являются также следующие свойства параллельных переносов.

Свойство 5.5. *Множество* $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ *параллельных переносов плоскости аффинного типа* $\mathcal{A}$ *является подгруппой группы всех дилатаций плоскости* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Покажем, что для $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ выполняется критерий подгруппы, т.е., что для любого параллельного переноса обратное отображение есть параллельный перенос и что композиция любых двух параллельных переносов есть параллельный перенос.

Пусть τ – параллельный перенос. Тогда τ^{-1} – дилатация плоскости $\mathcal{A}$. Предположим, что τ^{-1} имеет неподвижную точку *P*, т. е. $\tau^{-1}(P)=P$. Тогда $\tau(\tau^{-1}(P))=\tau(P)$, т.е. $P=\tau(P)$. Следовательно, τ – тождественное преобразование, а значит, τ^{-1} = $\mathbf{Id}^{-1}=\mathbf{Id}$. Итак, дилатация τ^{-1} либо не имеет неподвижных точек, либо является тождественным преобразованием, т.е. τ^{-1} – параллельный перенос.

Пусть τ_1,τ_2 – параллельные переносы. Тогда $\tau_1\tau_2$ – дилатация плоскости $\mathcal{A}$. Предположим, что композиция $\tau_1\tau_2$ имеет неподвижную точку *P*, т. е. $\tau_1(\tau_2(P))=P$. Тогда $\tau_2(P)=\tau_1^{-1}(P)$. Отображения τ_1^{-1} и τ_2 – параллельные переносы, одинаково действующие на точку *P*, следовательно, по свойству 4 параллельных переносов $\tau_1=\tau_2^{-1}$. Получаем, что

$\tau_1\tau_2 = \mathbf{Id}$. Итак, дилатация $\tau_1\tau_2$ либо не имеет неподвижных точек, либо является тождественным преобразованием, т.е. $\tau_1\tau_2$ – параллельный перенос.◀

Рассмотрим еще некоторые свойства параллельных переносов, связанные с направлениями.

Свойство 5.6. *Направления параллельных переносов* τ *и* τ^{-1} *совпадают.*

Упражнение 5.11. *Докажите свойство 6.*

Упражнение 5.12. *Докажите, что множество всех параллельных переносов плоскости* $\mathcal{A}$*, имеющих одинаковое направление, вместе с тождественным параллельным переносом образуют подгруппу группы* $\mathbf{T}(\mathcal{A})$.

Свойство 5.7. *Пусть* δ *– дилатация,* τ *– параллельный перенос. Тогда* $\delta\tau\delta^{-1}$ *– параллельный перенос, причем если* τ *и* $\delta\tau\delta^{-1}$ *– нетождественные, то их направления одинаковы.*

Доказательство. Если τ – тождественный параллельный перенос, тогда $\delta\tau\delta^{-1}$ является тождественным отображением, а значит, параллельным переносом.

Пусть теперь τ – нетождественен. Предположим, что у дилатации $\delta\tau\delta^{-1}$ имеется неподвижная точка P, т. е. $(\delta\tau\delta^{-1})(P) = P$. Тогда $\tau(\delta^{-1}(P)) = \delta^{-1}(P)$, т.е. τ имеет неподвижную точку $\delta^{-1}(P)$, что невозможно. Следовательно, $\delta\tau\delta^{-1}$ – нетождественный параллельный перенос. Сравним далее направления τ и $\delta\tau\delta^{-1}$. По свойству 1 параллельных переносов $l(P,\tau(P)) \parallel l(\delta^{-1}(P),\tau(\delta^{-1}(P))$. По определению дилатации $l(\delta^{-1}(P),\tau(\delta^{-1}(P)) \parallel l(P,(\delta\tau\delta^{-1})(P))$, что влечет за собой совпадение прямых $l(P,\tau(P))$ и $l(P,(\delta\tau\delta^{-1})(P))$, а это и доказывает наше утверждение.◀

Для дальнейшего важным является следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Если* τ_1,τ_2 *– параллельные переносы разных направлений, то* $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$. С одной стороны, $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1} = (\tau_1\tau_2\tau_1^{-1})\tau_2^{-1}$. По свойству 7 направления $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}$ и τ_2 совпадают, по свойству 6 направление τ_2^{-1} также совпадает с направлением τ_2. Кроме того, композиция одинаково направленных параллельных переносов – параллельный перенос с тем же направлением (упражнение 13). Поэтому $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$ имеет то же направление, что и τ_2. С другой стороны, $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1} = \tau_1(\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1})$ и аналогично можно показать, что направление $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$ совпадает с направлением τ_1. Но направления τ_1 и τ_2 различны, значит, у параллельного переноса $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$ направление не определено, т.е. $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1} = \mathbf{Id}$ и поэтому $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$. ◀

Свойство 5.8. *Если существуют параллельные переносы с различными направлениями, то группа* $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ *абелева* (*т. е.* $\forall\tau_1,\tau_2 \in$ $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$).

Доказательство. В силу последней леммы это свойство достаточно доказать для случая, когда τ_1 и τ_2 одинаково направлены. Итак, пусть τ_1 и τ_2 имеют одинаковые направления. По условию существует параллельный перенос τ_3, направление которого отлично от направления τ_1 и τ_2. Заметим, что $\tau_2\tau_3$ также разнонаправлен с τ_1 и τ_2 (в противном случае $\tau_2\tau_3$ и τ_2^{-1} одинаково направлены и поэтому $\tau_2^{-1}(\tau_2\tau_3) = \tau_3$ и τ_2 одинаково направлены (см. упражнение 13), что невозможно по допущению). Тогда $\tau_1(\tau_2\tau_3) = (\tau_2\tau_3)\tau_1 = \tau_2(\tau_3\tau_1) = \tau_2(\tau_1\tau_3)$. Следовательно, $\tau_1\tau_2\tau_3 = \tau_2\tau_1\tau_3$, откуда $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$. ◀