§ 3. МОРФИЗМЫ ПЛОСКОСТЕЙ АФФИННОГО ТИПА

Возвращаясь к началу наших рассмотрений, напомним, что при попытке определить аналитическую геометрию мы сформулировали определение плоскости аффинного типа, причем оказалось, что различных плоскостей аффинного типа бесконечно много. Принцип намеренно неполного знания позволяет перейти к изучению общих плоскостей аффинного типа, оставив в стороне, например, задачу перечисления всех точек и прямых конечной плоскости. В этом состоит неполнота нашего знания. Зато результаты, полученные в рамках изучения плоскостей аффинного типа, будут годиться одновременно и для конечных плоскостей, и $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$, и $\mathrm{A}^2(\mathbf{C})$, и плоскости, изучающейся в школе!

Теперь обратимся к другому важному принципу, используемому в научных исследованиях – *принципу замещения*.

Принцип замещения в общей ситуации состоит в переходе от данного объекта к другому "похожему" (часто более простому) с последующим его изучением и использованием полученной информации для изучения исходного объекта.

Например, намечая маршрут путешествия, мы замещаем большие пространства картой соответствующей местности и, пользуясь полученной информацией, проходим намеченный маршрут. Другой пример: изучение лица человека по его фотографии позволяет получить информацию о человеке, которого мы не видели наяву.

Применяя принцип замещения, мы используем одну из замечательных черт нашего сознания: способность выделять у различных объектов "похожие" свойства. Так, во втором примере мы способны выделить свойства, общие оригиналу и фотокопии. При применении этого принципа важно каждый раз фиксировать, что мы понимаем под "похожестью", и только в рамках этой фиксированной "похожести" мы имеем право использовать информацию, полученную при исследовании нового объекта, для изучения исходного.

Обсудим более подробно этот принцип применительно к случаю плоскостей аффинного типа. Заметим, что если имеются две плоскости аффинного типа (одну мы считаем исходной, "замещаемой", а вторую "замещающей"), то под "похожестью" естественно понимать сохранение в замещающей плоскости (пусть бы и в несколько искаженном виде) информации о замещаемой плоскости. Поскольку оба объекта являются множествами и состоят из элементов, то естественно, хотелось бы, чтобы элементы (точки) из замещаемой плоскости сохранялись (не исчезали) и соответствовали элементам замещающей плоскости. При этом появление для какой-либо точки первой плоскости более чем одного образа (соответствующего элемента) второй плоскости нежелательно, поскольку это усложняло бы картину первой плоскости, вместо того, чтобы ее упрощать. Поэтому наиболее естественным является требование, чтобы в понятие "похожести" входило требование *существования отображения множества точек первой плоскости в множество точек второй*. Если ограничиться таким определением "похожести", то наше изучение сведется к изучению множеств точек, которые сами по себе еще не могут быть названы плоскостями аффинного типа, поскольку не учитывается то обстоятельство, что точки плоскости отличаются по принадлежности их прямым. Поэтому, если мы хотим говорить об отображении плоскостей, сохраняющем их "похожесть", то естественно потребовать, чтобы при отображении сохранялась информация о принадлежности точек любой прямой, т. е. сохранялась их коллинеарность при переходе к замещаемой плоскости. Таким образом, мы приходим к следующему определению "похожести" аффинных плоскостей.

Определение 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – плоскости аффинного типа. Говорят, что отображение $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ есть* ***морфизм аффинного типа*** *плоскости $\mathcal{A}$ в плоскость $\mathcal{B}$ (или, что плоскость $\mathcal{A}$ аффинно "похожа" на плоскость $\mathcal{B}$), если образы точек любой прямой из $\mathcal{A}$ коллинеарны в $\mathcal{B}$.*

Другими словами, отображение $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ есть морфизм аффинного типа, если для любой прямой l плоскости $\mathcal{A}$ существует прямая l' плоскости $\mathcal{B}$ такая, что верно включение $\varphi(l) \subset l'$. Очевидно, что это определение накладывает минимальное условие на отображение φ для того, чтобы его можно было считать отображением "похожести". Далее в этом параграфе для краткости морфизмы аффинного типа будем называть просто морфизмами.

Часто бывает полезным не только замещение изучаемой плоскости, но и последующее замещение замещающей плоскости. В этом случае хотелось бы, чтобы композиция замещающих отображений не искажала информацию об исходной плоскости. Для определенных нами морфизмов это выполняется, как показывает следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть* $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *и* $\psi: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *– морфизмы аффинного типа. Тогда композиция* $\psi \circ \varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *есть морфизм аффинного типа плоскости* $\mathcal{A}$ *в плоскость* $\mathcal{C}$.

Упражнение 3.1. *Докажите сформулированное утверждение*.

Приведем несколько простых примеров морфизмов аффинного типа.

Пример 3.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – плоскости аффинного типа, B_0 – фиксированная точка плоскости $\mathcal{B}$. Постоянное отображение

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}\ ,\ A \mapsto B_0$$

есть морфизм плоскости $\mathcal{A}$ в плоскость $\mathcal{B}$.

Пример 3.2. Для плоскости аффинного типа $\mathcal{A}$ тождественное отображение есть морфизм плоскости на себя.

Пример 3.3. Рассмотрим так называемое *естественное вложение* i плоскости $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$ в $\mathrm{A}^2(\mathbf{C})$, сопоставляющее точке $(m, n) \in \mathrm{A}^2(\mathbf{R})$ точку $(m, n) \in \mathrm{A}^2(\mathbf{C})$ (заметим, что $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$). Отображение i – морфизм аффинного типа, как показывает прямая проверка выполнения условия сохранения коллинеарности.

Пример 3.4. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – плоскости аффинного типа, l_0' – фиксированная прямая плоскости $\mathcal{B}$. Любое отображение

$$\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{B} \text{ такое, что } \varphi\ (\mathcal{A}) \subset l_0',$$

есть морфизм плоскости $\mathcal{A}$ в плоскость $\mathcal{B}$. Очевидно, что постоянное отображение есть частный случай приведенного примера.

Более интересными по сравнению с последним примером являются морфизмы, при которых образ всей плоскости не сводится к подмножеству прямой, а содержит неколлинеарные точки. В частности, морфизмы такого типа, стягивающие (отображающие) хотя бы одну прямую в точку, имеют следующее описание.

<u>**Теорема 3.1.**</u> *Пусть* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *– плоскости аффинного типа и*

$$\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

– морфизм, стягивающий прямую l *плоскости* $\mathcal{A}$ *в точку. Тогда образ отображения* φ *есть подмножество некоторой прямой, возможно, объединенное с некоторой точкой вне ее.*

Доказательство. Заметим, что если образ отображения φ (множество $\mathrm{Im}\varphi$) сводится к одной точке, то теорема верна. Предположим, что

$\mathrm{Im}\,\varphi$ содержит более одной точки. Тогда существует точка $P' \in \mathrm{Im}\,\varphi \setminus \varphi(l)$. Пусть P – прообраз точки P'. Любая прямая l_1, проходящая через P и непараллельная l, отображается в прямую $l(P', \varphi(l))$.

Если в эту же прямую отображаются все точки прямой l_p, проходящей через P и параллельной l, то вся плоскость отображаются в прямую $l(P',\varphi(l))$, т.е. в этом случае утверждение теоремы истинно (рис. 1).

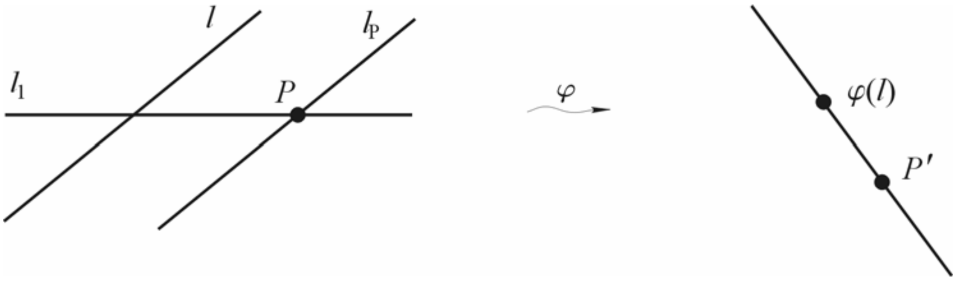

Рис. 1

Пусть Q – точка прямой l_P такая, что $\varphi(Q) = Q' \notin l(P',\varphi(l))$. Тогда любая прямая l_1, проходящая через Q и непараллельная l, отображается в прямую $l(Q',\varphi(l))$. Следовательно, все точки множества $\mathcal{A} \setminus l_P$ отображаются в множество $l(P',\varphi(l)) \bigcap l(Q',\varphi(l))$, сводящееся, очевидно, к точке $\varphi(l)$. Итак, в рассматриваемом случае образ отображения φ есть объединение множества $\varphi(l_P) = \varphi(l(P,Q))$, являющегося подмножеством прямой $l(P',Q')$, и точки $\varphi(l)$, т.е. утверждение теоремы справедливо (рис. 2).◄

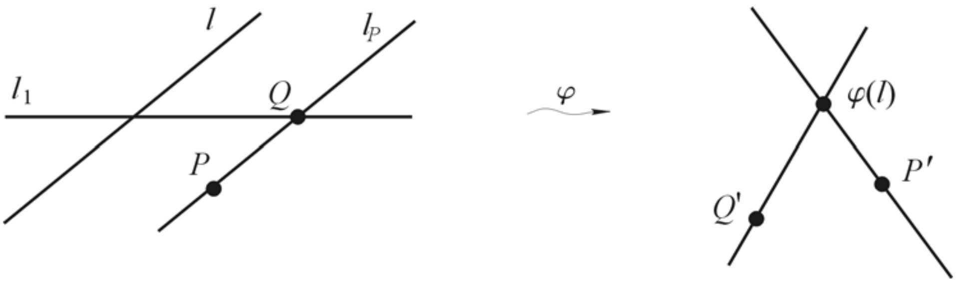

Рис. 2

Ввиду предыдущего, общая задача описания морфизмов редуцируется (сводится) к случаю, когда морфизм не стягивает ни одну прямую в точку и в его образе имеются три неколлинеарные точки. Приведем одно естественное достаточное условие, гарантирующее нестягиваемость прямых в точки.

Утверждение 3.2. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– морфизм, сохраняющий параллельность прямых и содержащий в образе три неколлинеарные точки. Тогда образ любой прямой при отображении* φ *содержит, по крайней мере, две точки.*

Сохранение параллельности при отображении φ означает: если l, l' – произвольные прямые в $\mathcal{A}$ такие, что $l \parallel l'$, то их образы $\varphi(l)$ и $\varphi(l')$ лежат на параллельных прямых.

***Доказательство утверждения* 3.2**. Предположим, напротив, что l – прямая в $\mathcal{A}$ такая, что $\varphi(l)$ – точка. По условию, существуют точки $A', B' \in \mathcal{B}$ такие, что $(A', B', \varphi(l))$ – тройка неколлинеарных точек, лежащих в образе отображения φ. Пусть A и B – прообразы точек A' и B' соответственно. Очевидно, что точки A и B различны и $A, B \notin l$. Рассмотрим точку $P \in l$ и параллель l_A к $l(P, B)$, проходящую через A. Тогда

$$\varphi(l(P,B)) \subset l(\varphi(l), B'), \quad \varphi(l_A) \subset l(\varphi(l), A') \ \text{ и } \ l(\varphi(l), B') \parallel l(\varphi(l), A').$$

Поскольку прямые $l(\varphi(l), B')$ и $l(\varphi(l), A')$ параллельны и проходят через одну точку $\varphi(l)$, то $l(\varphi(l), B') = l(\varphi(l), A')$, но это противоречит неколлинеарности тройки $(A', B', \varphi(l))$. Следовательно, предположение о том, что $\varphi(l)$ – точка, неверно, т.е. никакая прямая при отображении φ не стягивается в точку (рис. 3).◄

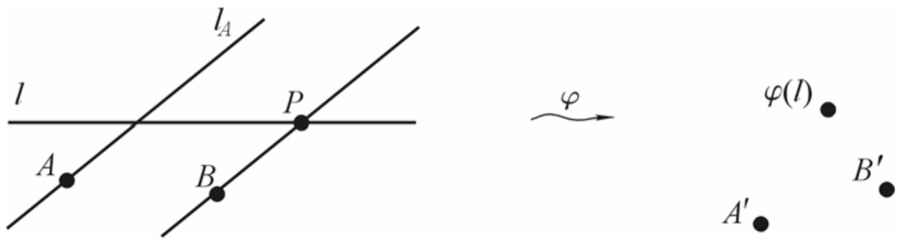

Рис. 3

Морфизмы, которые не стягивают ни одну прямую в точку, индуцируют (порождают) отображения на множествах прямых плоскостей аффинного типа.

Определение 3.2. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– морфизм, не стягивающий ни одну прямую в точку,* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ *и* $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ *– множества прямых плоскостей* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *соответственно. Тогда на множествах прямых* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ *и* $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ *определено отображение*

$$\varphi^*:\ \mathcal{L}(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{B}),\ l \mapsto \varphi^*(l),$$

где $\varphi^*(l)$ *– прямая, содержащая множество* $\varphi(l)$*. Будем называть отображение* φ^* ***линейной частью*** *морфизма* φ.

В случае инъективного морфизма φ из определения линейной части вытекает коммутативность следующей диаграммы[1]

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}\times\mathcal{A})\setminus D(\mathcal{A}\times\mathcal{A}) & \xrightarrow{l_1} & \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ \downarrow \varphi\times\varphi & & \downarrow \varphi^* \\ (\mathcal{B}\times\mathcal{B})\setminus D(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) & \xrightarrow{l_2} & \mathcal{L}(\mathcal{B}). \end{array} \qquad (1)$$

Здесь $D(\mathcal{A}\times\mathcal{A})$ и $D(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ – диагонали множеств $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ соответственно; каждое из отображений l_1 и l_2 ставит в соответствие паре несовпадающих точек прямую, проходящую через них, т.е. $l_1(A,B)=l(A,B)$, $l_2(C,D)=l(C,D)$; $(\varphi\times\varphi)(A,B)=(\varphi(A),\varphi(B))$.

Обратимся теперь к следующему вопросу: как связаны между собой образы прямых плоскости $\mathcal{A}$ при морфизме φ? Оставляя в стороне морфизмы, стягивающие некоторые прямые в точки (они нами уже описаны и содержат мало информации о плоскости $\mathcal{A}$, поэтому малоинтересны), считаем, что для морфизма $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ корректно определено отображение $\varphi^*:\ \mathcal{L}(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$. При этом предположении предыдущий вопрос может быть сформулирован в терминах отображения φ^*: какую информацию об отображении φ содержит отображение φ^*? Мы не будем рассматривать эту проблему в полной общности, а остановимся только на трех важных свойствах отображения φ^*.

<u>Теорема 3.2.</u> *Пусть* $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– морфизм, не стягивающий никакую прямую в точку и содержащий в образе три неколлинеарные точки. Тогда*:

(i) *морфизм* φ *инъективен* $\Leftrightarrow$ *отображение* φ^* *инъективно* (*если* $\mathcal{A}\neq AFP(2)$);

(ii) *морфизм* φ *сюръективен* $\Leftrightarrow$ *отображение* φ^* *сюръективно*;

(iii) *морфизм* φ *биективен* $\Leftrightarrow$ *отображение* φ^* *биективно.*

Доказательство этой теоремы длинно, поэтому мы разделим ее на три части.

---

[1] О понятии коммутативной диаграммы см. [ ], § 2.2.

Утверждение 3.3. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– морфизм, который не стягивает никакую прямую в точку, содержит в образе три неколлинеарные точки и* $\mathcal{A} \neq AFP(2)$. *Тогда инъективность* φ *эквивалентна инъективности* φ^*.

Доказательству утверждения 3 предпошлем некоторые полезные предварительные рассуждения.

Определение 3.3. Крестом *в плоскости аффинного типа называются две различные прямые, имеющие общую точку.*

Понятно, что всякий крест определяется любой тройкой своих неколлинеарных точек, среди которых есть общая точка двух прямых.

Определение 3.4. *Говорят, что морфизм* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ***сохраняет кресты***, *если образ любого креста при отображении* φ^* *является крестом.*

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{A} \neq AFP(2)$. *Морфизм* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *сохраняет кресты тогда и только тогда, когда он инъективен и содержит в образе три неколлинеарные точки.*

Доказательство. Пусть морфизм φ сохраняет кресты. Допустим, что φ не является инъективным отображением. Для различных точек A, $B \in \mathcal{A}$, имеющих одинаковые образы, существует точка $C \notin l(A,B)$, образ которой отличен от $\varphi(A)$. Рассмотрим крест $\{l(C,A), l(C,B)\}$. При отображении φ^* он не сохраняется, поскольку его образ лежит на прямой $l(\varphi(C),\varphi(A))$. Следовательно, допущение неверно, т.е. морфизм φ инъективен. Кроме того, поскольку φ сохраняет кресты, то в образе φ есть три неколлинеарные точки.

Обратно, пусть морфизм φ инъективен и в образе φ есть три неколлинеарные точки. Допустим, что существует крест, состоящий из прямых $l_1, l_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, такой, что $\varphi^*(l_1) = \varphi^*(l_2) = l'$. Поскольку в образе φ имеются три неколлинеарные точки, то в $\mathcal{A}$ найдется точка A, образ которой не принадлежит l'. Поскольку $\varphi(A) \notin l'$, то $A \notin l_1 \cup l_2$.

Выберем точку $D \in l_2 \setminus l_1$ и предположим, что прямая $l(A,D)$ не параллельна прямой l_1. Для точки $C \in l_1 \cap l(A,D)$ тогда получим $\varphi(C) \in l(\varphi(D),\varphi(A)) \cap l'$. (рис. 4).

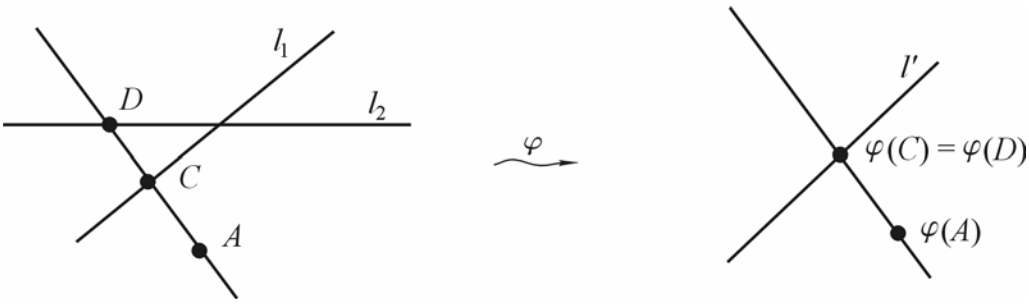

Рис. 4

Ясно, что $l(\varphi(D),\varphi(A))$ и l' различны, поэтому $\varphi(C)$ – единственная их общая точка. С другой стороны, $\varphi(D)\in\varphi^*(l_2)$ и поэтому $\varphi(D)\in l'$. С учетом того, что $\varphi(D)\in l(\varphi(D),\varphi(A))$ получаем $\varphi(C)=\varphi(D)$, что противоречит инъективности φ.

Предположим теперь, что $l(A,D)\,||\,l_1$. В этом случае, ввиду того, что по условию $\mathcal{A}\neq AFP(2)$, на прямой l_2 имеется третья точка E, отличная от D и общей точки прямых l_1 и l_2. Теперь прямая $l(A,E)$ не параллельна прямой l_1 и можно повторить предыдущее рассуждение, приводящее к противоречию с инъективностью отображения φ. (рис. 5).◄

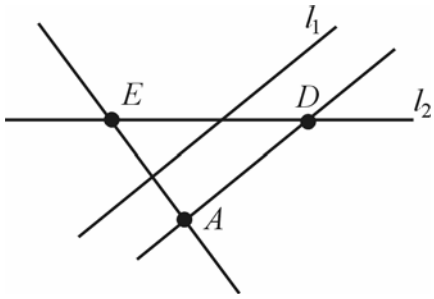

Рис. 5

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\mathcal{A}$ – плоскость, состоящая из четырех точек, т.е. $\mathcal{A}=AFP(2)$.

Упражнение 3.2. *Опишите все инъективные морфизмы плоскости* $AFP(2)$, *не сохраняющие кресты.*

Доказательство утверждения 3.3. Предположим, что φ инъективен, а φ^* не является инъективным. В силу предыдущей леммы не существует креста, переходящего при отображении φ^* в одну прямую. Таким образом, неинъективность φ^* может происходить лишь из-за "слипания" при отображении φ двух различных параллельных прямых l_1 и l_2 в одну: $\varphi^*(l_1) = \varphi^*(l_2) = l'$ (рис. 6).

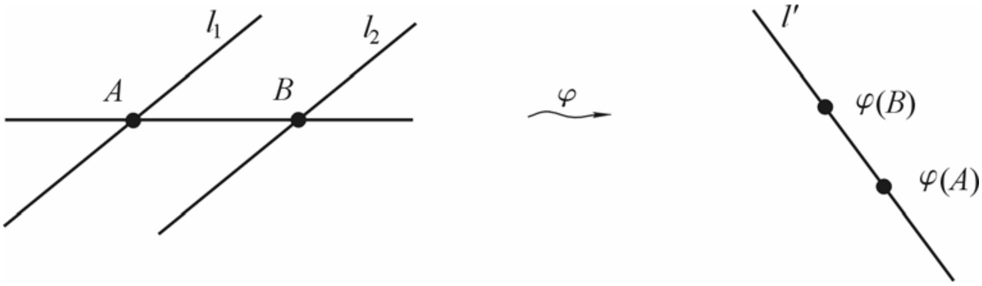

Рис. 6

Рассмотрим точки $A \in l_1$, $B \in l_2$ и крест $\{l(A,B), l_1\}$. Его образ при отображении φ^* есть прямая $l(\varphi(A), \varphi(B))$, что противоречит условию сохранимости крестов при отображении φ^*.

Обратно, пусть отображение φ^* инъективно, а φ – нет. Если $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$ и $\varphi(A) = \varphi(B)$, то существование трех неколлинеарных точек в образе отображения φ влечет существование точки C со свойствами $C \notin l(A,B)$, $\varphi(C) \neq \varphi(A)$. Тогда крест $\{l(A,C), l(B,C)\}$ переходит при отображении φ^* в прямую $l(\varphi(A), \varphi(C))$, что противоречит инъективности φ^*.◄

Заметим, что сохранение крестов при морфизме тесно связано с "судьбой" параллельных прямых.

Упражнение 3.3. *Докажите, что если в образе морфизма* φ *есть три неколлинеарные точки и* φ *не сохраняет кресты, то при морфизме* φ *не сохраняется параллельность прямых.*

Обратимся теперь к сюръективным морфизмам.

Утверждение 3.4. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– морфизм, имеющий в образе три неколлинеарные точки и не стягивающий ни одну прямую в точку. Тогда сюръективность* φ *эквивалентна сюръективности* φ^*.

Доказательство. В предположении сюръективности φ установим сюръективность φ^*, т. е. покажем, что для любой прямой $l' \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ существует прямая $l \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ такая, что $\varphi^*(l) = l'$. Пусть $l' = l(A', B')$, $A' \neq B'$, и $A \in \varphi^{-1}(A')$, $B \in \varphi^{-1}(B')$ (прообразы $\varphi^{-1}(A)$, $\varphi^{-1}(B)$ не пусты ввиду сюръективности φ). Тогда в качестве l можно взять прямую $l(A,B)$. Необходимость в утверждении 4 доказана.

Обратно, предположим, что отображение φ^* сюръективно, а φ – нет, т.е. предположим, что найдется точка $O' \in \mathcal{B}$ с пустым прообразом $\varphi^{-1}(O')$. Рассмотрим пучок прямых, проходящих через O' (т. е. совокупность всех прямых в $\mathcal{B}$, имеющих O' общей точкой). Поскольку φ^* – сюръективное отображение, прообраз любой прямой из пучка непуст. Все эти прообразы состоят из параллельных прямых, так как иначе точка O' лежала бы в образе φ. Более того, множество всех прямых, входящих в прообразы прямых пучка, исчерпывают соответствующее направление. В самом деле, для произвольной точки $A \in \mathcal{A}$ в прообразе прямой $l(\varphi(A), O')$ имеется прямая, проходящая через A (рис. 7).

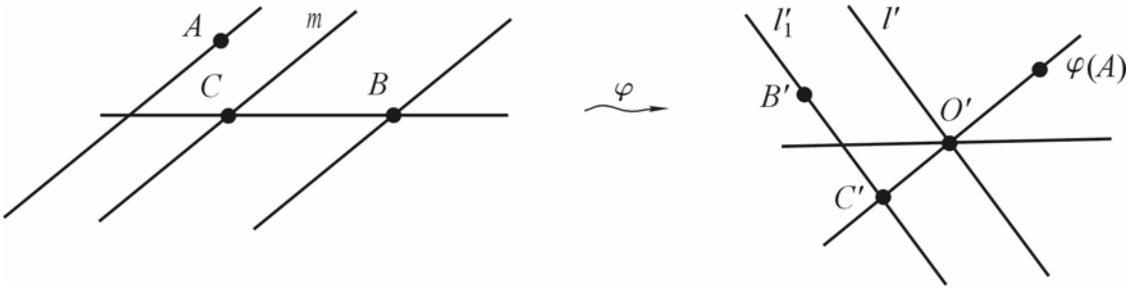

Рис. 7

Зафиксируем прямую $l' \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, содержащую точку O' и точку $B' \in \mathcal{B}$ вне этой прямой, имеющую прообраз B. На параллели l'_1 к прямой l', проходящей через B', рассмотрим другую точку C' с прообразом C. Прямая $l(B,C)$ не принадлежит направлению прообразов прямых пучка, поэтому $l(B,C)$ пересекает каждую прямую m, входящую в прообраз l', т.е. $l(B,C) \bigcap m \neq \varnothing$. Следовательно, $\varphi(l(B,C) \bigcap m) \subset \varphi(l(B,C) \bigcap \varphi(m) \neq \varnothing$, что не так, поскольку множества $\varphi(l(B,C))$ и $\varphi(m)$ лежат на параллельных прямых. Достаточность в утверждении 4 доказана.◄

Перейдем, наконец, к биективным морфизмам.

Утверждение 3.5. *Пусть* φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– морфизм. Тогда биективность* φ *эквивалентна биективности* φ^*.

Доказательство. Биективное отображение φ не стягивает никакую прямую в точку и в образе φ всегда есть три неколлинеарные точки в случае $\mathcal{A} \neq AFP(2)$. Утверждения 3 и 4 влекут биективность φ^*. Если же $\mathcal{A} = AFP(2)$, то $\mathcal{B} = AFP(2)$ и утверждение об инъективности φ^* получается простой проверкой, а сюръективность φ^* следует из утверждения 4.

Обратно, пусть φ^* – биективное отображение. Тогда при $\mathcal{A} \neq AFP(2)$ φ биективно в силу утверждений 3 и 4. В случае $\mathcal{A} = AFP(2)$ сюръективность φ^* влечет то, что $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ состоит из шести прямых. Стало быть, $\mathcal{B} = AFP(2)$. Но тогда из инъективности φ^* вытекает инъективность φ. Сюръективность φ вытекает из утверждения 5. ◄

Напомним что в случае инъективных морфизмов (в частности, биективных) отображения φ и φ^* таковы, что коммутативна диаграмма (1). Используя ее, докажем следующий полезный факт.

Утверждение 3.6. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – плоскости аффинного типа и $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\psi: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ – морфизмы. Тогда*

(i) *если ψ, φ – инъективные морфизмы, то $\psi\varphi$ – инъективный морфизм и $(\psi\varphi)^* = \psi^*\varphi^*$;*

(ii) *если ψ, φ – биективные морфизмы,* то *$\psi\varphi$ биективен и $(\psi\varphi)^* = \psi^*\varphi^*$.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из рассмотрения коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{A}\times\mathcal{A})\setminus D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{l_1} & \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\
\downarrow \varphi\times\varphi & & \downarrow \varphi^* \\
(\mathcal{B}\times\mathcal{B})\setminus D(\mathcal{B}) & \xrightarrow{l_2} & \mathcal{L}(\mathcal{B}) \\
\downarrow \psi\times\psi & & \downarrow \psi^* \\
(\mathcal{C}\times\mathcal{C})\setminus D(\mathcal{C}) & \xrightarrow{l_3} & \mathcal{L}(\mathcal{C}).
\end{array}$$

Отметим еще несколько полезных свойств морфизмов.

Утверждение 3.7. *Пусть $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – инъективный морфизм, содержащий в образе три неколлинеарные точки. Тогда, если $\mathcal{A} \neq AFP(2)$, то для любой прямой $l' \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ ее прообраз $\varphi^{-1}(l')$ – прямая в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Из определения морфизма следует, что прообраз $\varphi^{-1}(l')$ является объединением прямых, поэтому нужно доказать, что в $\varphi^{-1}(l')$ нет трех неколлинеарных точек. Предположим, что это не так, т. е. существует три неколлинеарные точки $A, B, C \in \varphi^{-1}(l')$ (рис. 8).

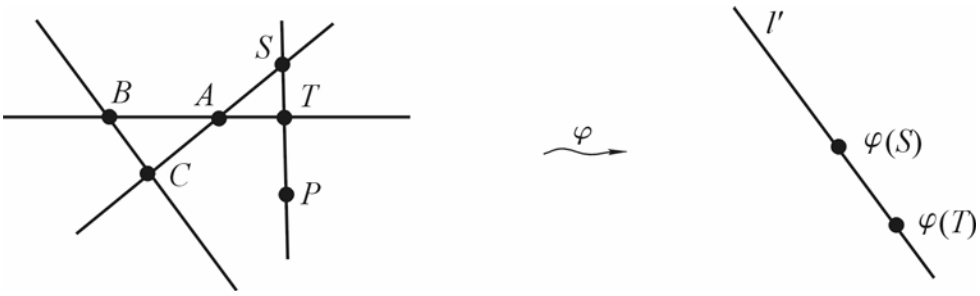

Рис. 8

Заметим, что любая точка прямых $l(A,B)$, $l(B,C)$, $l(A,C)$ переходит в точку прямой l'. Рассмотрим произвольную точку P, не принадлежащую этим прямым. Пусть $\mathcal{A} \neq AFP(2)$, l_P – прямая, проходящая через точку P и пересекающая две из трех вышеуказанных прямых в различных точках T и S (докажите, что такая прямая всегда существует!). Тогда $\varphi(T)$, $\varphi(S) \in l'$. Поскольку $\varphi(T) \neq \varphi(S)$, то $l' = l(\varphi(T), \varphi(S))$ и потому $\varphi(P) \in l'$. Откуда следует, что $\varphi(\mathcal{A}) \subset l'$, что противоречит существованию трех неколлинеарных точек в образе φ. ◄

Упражнение 3.4. *Исследуйте (в контексте предыдущего утверждения) случай* $\mathcal{A} = AFP(2)$.

Утверждение 3.8. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– биективный морфизм. Тогда для любой прямой* $l \subset \mathcal{A}$ *ее образ* $\varphi(l)$ *– прямая в* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Поскольку φ – морфизм, то для любой прямой l плоскости $\mathcal{A}$ существует прямая l' плоскости $\mathcal{B}$ такая, что $\varphi(l) \subset l'$. В случае $\mathcal{A} \neq AFP(2)$ ввиду предыдущего утверждения $\varphi^{-1}(l') = l$, т.е. $\varphi(l) = l'$. В случае $\mathcal{A} = AFP(2)$ биективность φ^* влечет то, что $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ состоит из 6 прямых, т. е. $\mathcal{B} = AFP(2)$. В силу инъективности φ образ прямой – прямая в $AFP(2)$. ◄

Рассмотрим отображение φ плоскости $\mathcal{A}(9)$ в плоскость $\mathcal{A}(4)$, задаваемое так, как показано на рис. 9.

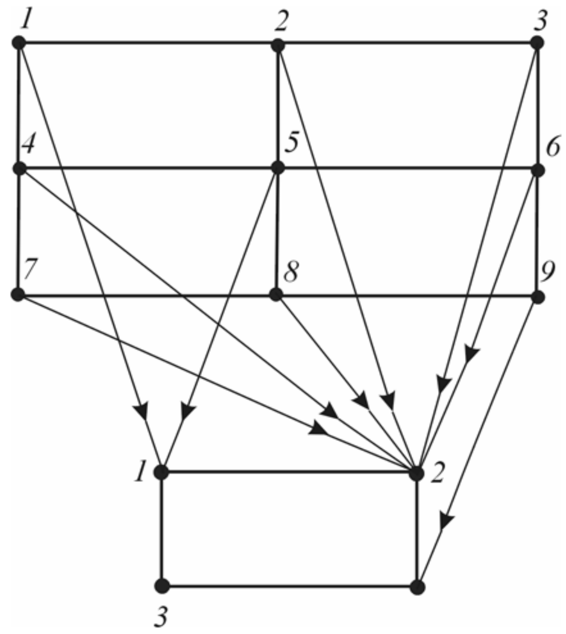

Рис. 9

Упражнение 3.5. *Докажите, что отображение* φ *на рис.* 9 *является морфизмом аффинного типа.*

Заметим, что в рассматриваемом примере совокупность образов точек из $\mathcal{A}(9)$ не совпадает со всей плоскостью $\mathcal{A}(4)$, т.е. отображение φ не сюръективно. Это сужает возможности получения информации об $\mathcal{A}(9)$ с помощью такого морфизма, поскольку мы можем пользоваться информацией, заключенной только в части $\{1,2,4\}$ плоскости $\mathcal{A}(4)$. Понятно, что чем "больше" образ морфизма, тем больше замещающая плоскость "похожа" на исходную. Не всегда вся плоскость может быть использована в качестве образа замещаемой.

Утверждение 3.9. *Не существует сюръективного морфизма аффинного типа плоскости* $\mathcal{A}(9)$ *на* $\mathcal{A}(4)$.

Доказательство. Будем использовать обозначения точек и прямых плоскостей $\mathcal{A}(4)$ и $\mathcal{A}(9)$, введенные в § 2. Рассуждаем методом от противного. Допустим, что $\varphi\colon \mathcal{A}(9) \to \mathcal{A}(4)$ – сюръективный морфизм. Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi(1)=1$. Плоскость $\mathcal{A}(9)$ является объединением пучка прямых с центром в точке 1:

$$\mathcal{A}(9) = \{1,2,3\} \cup \{1,4,7\} \cup \{1,6,8\} \cup \{1,5,9\}. \qquad (2)$$

Точно так же, плоскость $AFP(2)$ является объединением пучка прямых с центром в точке 1:

$$\mathcal{A}(4) = \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{1,4\}. \qquad (3)$$

Поскольку отображение φ сюръективно и переводит прямые в прямые, то существуют три прямых из объединения (2), образы которых дают три прямых из объединения (3). Вновь, не умаляя общности, можно считать, что

$$\varphi\{1,2,3\} = \{1,2\}, \varphi\{1,4,7\} = \{1,3\}, \varphi\{1,6,8\} = \{1,4\}. \qquad (4)$$

Далее несложный перебор показывает, что существует прямая l в плоскости $\mathcal{A}(9)$ такая, что $\varphi(l) = \{2,3,4\}$, т.е. образом прямой l не является прямая. Например, если, в соответствие с (4) и с ранее принятым условием $\varphi(1) = 1$, дополнительно выполняются условия:

$$\varphi(2) = 2, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 3, \varphi(7) = 3, \varphi(6) = 1, \varphi(8) = 4,$$

то $l = \{3,4,8\}$. Это противоречит тому, что φ – морфизм аффинного типа, следовательно, предположение о сюръективности φ неверно, утверждение доказано. ◄