АФФИННАЯ ПЛАНИМЕТРИЯ

§1. ЧТО ТАКОЕ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Приступая к изучению аналитической геометрии, мы естественно задаемся следующими вопросами. Чем аналитическая геометрия отличается от других разделов математики? Каков предмет ее исследования? Каковы методы и средства, привлекаемые для ее развития?

На первый взгляд может показаться, что ответ на эти вопросы лежит на поверхности: ***аналитическая геометрия*** – *часть геометрии, использующая для исследования своих объектов аналитические методы*.

Несмотря на привлекательную простоту, такое описание аналитической геометрии все же нельзя признать исчерпывающим, поскольку необъясненными остаются и понятие геометрии, и понятие геометрического объекта, и смысл термина «аналитический метод». Чтобы более точно представить содержание аналитической геометрии как математической дисциплины, следует вначале понять, с какими объектами имеет дело геометрия и какие свойства этих объектов она изучает. Проще всего начать с планиметрии.

Из школьного курса математики известно, что в планиметрии изучаются свойства фигур на плоскости. Сама плоскость при этом представляется состоящей из бесконечного множества точек, а под фигурами понимаются треугольники (более общо, многоугольники), ломаные, окружности и др. Среди всего многообразия фигур особое место занимают прямые, с помощью которых даются определения многих фигур.

Таким образом, изначальное представление о плоскости таково: ***плоскость*** – *это непустое множество, элементы которого называются точками, причем в этом множестве выделены некоторые специальные подмножества, называемые прямыми* (естественно, мы предполагаем, что эти подмножества также непусты).

Такое описание плоскости нуждается в уточнении (в противном случае, никакие привычные нам геометрические понятия из него не вытекают). Поэтому естественно к предыдущему добавить следующие свойства точек и прямых.

AP_1. *Для любой пары различных точек A и B существует и только одна прямая, которой они обе принадлежат. Такую прямую будем обозначать $l(A, B)$.*

AP_2. *Никакая прямая не совпадает с плоскостью (т.е. для любой прямой существует точка плоскости, не лежащая на этой прямой).*

Важную роль в геометрии играет понятие параллельности.

Определение 1. *Пусть l, l' – пара прямых. Говорят, что прямая l* ***параллельна*** *прямой l' (обычно пишут $l \parallel l'$), если либо $l = l'$, либо l и l' не имеют общих точек.*

Чтобы еще более приблизить наше описание плоскости к привычному, потребуем выполнения еще одного свойства точек и прямых.

AP_3. *Для любой прямой l и любой точки A существует единственная прямая l_A такая, что $A \in l_A$ и $l_A \parallel l$.*

Отметим основные свойства параллельности.

Утверждение 1. (i) *Каждая прямая параллельна самой себе*;

(ii) *если прямая l параллельна прямой l', то l' параллельна l*;

(iii) *если l параллельна l' и l' параллельна l'', то l параллельна l''.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. ℂ Свойства (i) и (ii) непосредственно вытекают из определения параллельности.

(iii) Допустим, что прямая l не параллельна прямой l''. Тогда l и l'' – различные прямые, имеющие непустое пересечение, являющееся, согласно **AP_1**, одноточечным множеством: $l \cap l'' = \{A\}$. Но тогда l и l'' – две различные прямые, проходящие через точку A и параллельные прямой l'. Последнее противоречит **AP_3**, следовательно, наше допущение неверно, l параллельна l''. ℤ

Утверждение 1 означает, что отношение параллельности есть отношение эквивалентности на множестве всех прямых плоскости. Множество всех прямых разбивается на классы эквивалентности, каждый класс эквивалентности состоит из множества всех параллельных между собой прямых.

Определение 2. ***Направлением*** *на плоскости называется класс всех параллельных между собой прямых.*

Таким образом, мы приходим к следующему определению плоскости, которую принято называть *плоскостью аффинного типа*[1)].

1)

Определение 3*. Плоскостью аффинного типа** *называется непустое множество $\mathcal{A}$ (элементы которого называются* ***точками*) с системой выделенных непустых подмножеств, называемых* ***прямыми****, если выполняются свойства (аксиомы)* **AP$_1$ – AP$_3$**.

Утверждение 2. (i) *Каждая прямая в плоскости аффинного типа содержит не менее двух точек.*

(ii) *Любая плоскость аффинного типа содержит не менее четырех точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть l_1 – произвольная прямая в плоскости аффинного типа. Допустим, что l_1 – одноэлементное множество: $l_1 = \{A\}$. По аксиоме **AP$_2$** существует точка B вне прямой l_1, т.е. $B \neq A$. По аксиоме **AP$_1$** существует прямая $l_2 = l(A,B)$. Очевидно, что $l_2 \neq l_1$. По аксиоме **AP$_2$** существует точка C вне прямой l_2. По построению точки A, B, C – попарно различные. По аксиоме **AP$_3$** существует прямая l_3, проходящая через C и параллельная прямой l_2. Так как точка C вне прямой l_2, то $l_2 \cap l_3 = \varnothing$. Теперь имеем: через точку A проходят две различные прямые (l_1 и l_2), параллельные прямой l_3. Последнее противоречит аксиоме **AP$_3$**, следовательно, допущение о том, что прямая l_1 одноэлементна, неверно, и пункт (i) доказан. Отсюда следует, что на прямой l_3 также не менее двух точек. Поскольку прямые l_2 и l_3 не пересекаются, то на плоскости не менее четырех точек. ◄

В плоскости аффинного типа можно определить понятия отрезка, треугольника и параллелограмма.

***Определение 4*.** *Пусть $\mathcal{A}$ – плоскость аффинного типа.*

Отрезком *в плоскости $\mathcal{A}$ называется пара ее точек $\{A,B\}$.* ***Нулевым отрезком*** *будем называть одноточечное множество $\{A\}$. Каждая из точек A, B называется* ***концом*** *отрезка.*

Треугольником *в плоскости $\mathcal{A}$ называется тройка точек $\{A,B,C\}$, не лежащих на одной прямой (обозначение треугольника – $\vartriangle ABC$).*

Параллелограммом *в плоскости $\mathcal{A}$ называется четверка точек $\{A,B,C,D\}$, не лежащих на одной прямой, такая, что $l(A,B) \parallel l(C,D)$ и $l(A,C) \parallel l(B,D)$ (обозначение параллелограмма – $\square ABCD$).*

Упражнение 1. *Докажите, что в любой плоскости аффинного типа существуют отрезки, треугольники и параллелограммы.*

Замечание 1. Определение отрезка, приведенное выше, отличается от привычного нам. Обычно под отрезком понимается множество, состоящее из пары $\{A,B\}$ точек плоскости и всех точек прямой $l(A,B)$, лежащих между точками A и B. Однако при таком определении нужно условиться о том, что понимается под выражением "точка C лежит *между* точками A и B", а это понятие определяется не для любой плоскости аффинного типа. Но даже в тех случаях, когда оно определено, отрезок однозначно определяется своими концами, поэтому мы можем, не теряя общности, использовать новое определение.

Ниже будет показано, что различных плоскостей аффинного типа бесконечно много. Последнее указывает на то, что плоскость, изучаемая в школе, является лишь одним из представителей бесконечного мира плоскостей аффинного типа. Возникает естественный вопрос: является ли полезным и интересным изучение других его представителей с точки зрения изучения плоскости нам привычной? Оказывается, что ответ в данном случае положителен, ввиду следующих обстоятельств. Всякая наука в той или иной мере использует так называемый ***принцип намеренно неполного знания***. Этот принцип, известный, по крайней мере, еще со времен Аристотеля, основан на том, что различные объекты (или явления) могут быть описаны с помощью заданий списка их свойств. В нашем случае, например, это задание аффинной плоскости как множества с выделенной системой подмножеств и списком свойств $\mathbf{AP_1}$ – $\mathbf{AP_3}$. Иногда исследуемые объекты (или объект) обладают очень большим набором присущих им свойств, что затрудняет их изучение. В таком случае этот набор ограничивается, в результате чего приходят к рассмотрению объектов, которые задаются этим ограниченным списком свойств. Конечно, все это приводит, вообще говоря, к расширению класса изучаемых объектов, но, во-первых, изучая объекты этого второго класса, мы одновременно исследуем и исходные объекты, а во-вторых, мы избавляемся при переходе к этим новым объектам от принятия во внимание части прежних свойств, подчас затрудняющих изучение первоначальных объектов.

При использовании принципа намеренно неполного знания свойства, принимаемые во внимание, называются **аксиомами**, а метод построения научной теории на основе аксиом – ***аксиоматическим методом***.

<u>Определение 5</u>. ***Фигурой*** *в плоскости называется произвольное ее подмножество.*

Теперь можно было бы охарактеризовать планиметрию как науку, изучающую геометрические свойства фигур в плоскости. Однако такое определение не может быть признано удовлетворительным, поскольку не определено понятие геометрического свойства. Это будет сделано ниже в § 4, но вначале хотелось бы лучше представить, что скрывается за определением 3 плоскости аффинного типа. Для этого рассмотрим примеры. Как мы сейчас увидим, существуют плоскости, множество точек которых конечно. С другой стороны, множество точек плоскости, которая рассматривается в школе, бесконечно. Таким образом, определению 3 удовлетворяют, по крайней мере, два различных типа плоскостей: конечные и бесконечные.

☝ **<u>Примеры</u> конечных плоскостей.** Рассмотрим четырехэлементное множество *AFP*(2), изображенное на рис. 1, элементы которого обозначены числами 1, 2, 3, 4.

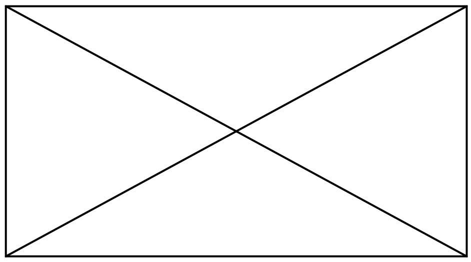

Рис. 1.

Назовем числа 1, 2, 3, 4 *точками*, а подмножества {1, 3}, {4, 2}, {1, 4}, {3, 4}, {2, 3}, {1, 2} – *прямыми*.

Аналогично, рассмотрим множество *AFP*(3) из девяти элементов. Обозначим его элементы 1, 2, 3, …, 9 и назовем их *точками*. В качестве прямых возьмем подмножества {1, 2, 3}, {1, 4, 7}, {1, 5, 9}, {1, 6, 8}, {2, 4, 9}, {2, 5, 8}, {2, 6, 7}, {3, 4, 8}, {3, 5, 7}, {3, 6, 9}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9} (рис. 2).

<u>Упражнение 2</u>. *Проверьте, что для множеств AFP*(2) *и AFP*(3) *выполнены аксиомы* $\mathbf{AP_1}$ – $\mathbf{AP_3}$.

Таким образом, существуют конечные плоскости аффинного типа (т.е. множество точек которых конечно). Далее мы еще встретимся с плоскостями $AFP(2)$ и $AFP(3)$ и сохраним для точек и прямых этих плоскостей введенные выше обозначения.

§ 2. КОНЕЧНЫЕ ПЛОСКОСТИ АФФИННОГО ТИПА. ПЛОСКОСТИ $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$ И $\mathrm{A}^2(\mathbf{C})$

В предыдущем параграфе мы установили существование конечных плоскостей аффинного типа $AFP(2)$ и $AFP(3)$. Естественно спросить: существуют ли другие конечные плоскости, и, если существуют, то как их много? Мы вернемся к обсуждению этого вопроса ниже. Вначале же докажем важное утверждение, устанавливающее количественные характеристики таких плоскостей.

Теорема 1. ***Пусть $\mathcal{A}$ – плоскость аффинного типа, l – прямая, количество точек на которой равно k (k >1). Тогда***

(i) ***количество направлений в плоскости $\mathcal{A}$ равно k +1;***

(ii) ***количество прямых, проходящих через каждую точку плоскости, равно k +1;***

(iii) ***количество точек на любой прямой в $\mathcal{A}$ равно k;***

(iv) ***$\mathcal{A}$ состоит из k^2 точек;***

(v) ***количество прямых в каждом направлении равно k;***

(vi) ***количество прямых в $\mathcal{A}$ равно $k^2 + k$.***

►Пусть P – точка плоскости $\mathcal{A}$, не лежащая на данной прямой l (такая точка существует в силу **AP₂**). Ввиду **AP₃** имеется ровно одна прямая, проходящая через P и не имеющая с l общих точек. Кроме того, через каждую точку M прямой l и точку P проходит единственная прямая $l(P, M)$. Если точки M_1 и M_2 таковы, что $M_1, M_2 \in l$ и $M_1 \neq M_2$, то $l(P,M_1) \neq l(P,M_2)$ – иначе эти две прямые совпадали бы с l и содержали точку P, что невозможно. Очевидно также, что для любой точки $M \in l$ $l(P,M) \neq l$. Таким образом, точка P принадлежит ровно $k+1$ прямым. Но из **AP₃** следует, что через любую точку проходит ровно по одной прямой каждого из направлений, поэтому (i) доказано. Поскольку через каждую точку плоскости проходит только одна прямая из любого направления, то через каждую точку в $\mathcal{A}$ проходит $k + 1$ прямых и (ii) доказано. Предположим теперь, что m – произвольная прямая в плоскости $\mathcal{A}$ и Q – точка, не принадлежащая m (существующая ввиду $\mathbf{AP_2}$). Через Q проходит $k +1$ прямых. Следовательно, не параллельных m прямых, проходящих через Q, имеется ровно k, поэтому m содержит ровно k точек и (iii) доказано. Докажем теперь (iv). Через произвольную точку P проходит $k + 1$ прямых. Всякие две из этих прямых не имеют общих точек, отличных от P, и каждая содержит $k - 1$ не совпадающих с P точек. Таким образом, на всех этих прямых лежат $(k +1)(k - 1)$ точек, отличных от P. Всего же количество точек на $\mathcal{A}$ равно $(k +1)(k - 1) + 1 = k^2$ и (iv) доказано. Ввиду $\mathbf{AP_1}$ и $\mathbf{AP_2}$ существует по крайней мере два различных направления, поэтому если l^* – направление, содержащее прямую l, и m – прямая, не содержащаяся в l^*, то всякая прямая из l^* пересекает m только в одной точке (ввиду $\mathbf{AP_3}$). Теперь (v) доказано, поскольку m содержит k точек. Для доказательства последнего утверждения заметим, что поскольку существует $k +1$ направлений и каждое направление содержит k прямых, то число прямых равно $(k +1)k = k^2 + k$. Теорема доказана. ◄

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – бесконечная плоскость аффинного типа. Тогда*

(i) *на каждой прямой лежит бесконечное множество точек*;

(ii) *множество прямых в $\mathcal{A}$ бесконечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Часть (i) доказывается рассуждением от противного. Действительно, если предположить, что множество точек некоторой прямой конечно, то выполняется посылка теоремы 1 и заключение (iv) приводит к противоречию.

Для доказательства (ii) зафиксируем некоторую прямую l и точку A вне l. Для каждой точки B прямой l существует прямая $l(A, B)$, проходящая через A и B. Очевидно, что, если $B_1, B_2 \in l$ и $B_1 \neq B_2$, то $l(A, B_1) \neq l(A, B_2)$. Поскольку множество точек прямой l бесконечно, то и множество всех прямых вида $l(A, B)$, $B \in l$, бесконечно. ◄

Упражнение 1. *Докажите, что множество направлений бесконечной плоскости бесконечно.*

Из теоремы 1 следует, что количество точек во всякой конечной плоскости равно k^2 для некоторого натурального числа $k > 1$, которое в этом случае называется ***порядком плоскости***. Следующий пример показывает, что существует бесконечно много различных конечных плоскостей.

☝ **<u>Пример</u> конечной плоскости порядка *p* (*p* – простое число)**

Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется ***простым***, если его нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел, больших единицы. Покажем, что для каждого простого числа p существует конечная плоскость аффинного типа порядка p. Для этого рассмотрим множество $AFP(p) = \{(m, n) \mid m, n \in \{0, 1, ..., p-1\}$ всех упорядоченных пар неотрицательных целых чисел, не превосходящих $p - 1$.

Элементы $AFP(p)$ назовем ***точками***, а ***прямыми*** – подмножества

$$l_{a,b,c} = \{(m,n) \in AFP(p) \mid am + bn + c \text{ делится на } p\},$$

где a, b, c – целые числа, причем a и b одновременно не делятся на p. Числа a, b, c назовем ***коэффициентами прямой*** $l_{a,b,c}$. Мы покажем, что $AFP(p)$ – конечная плоскость аффинного типа порядка p, но вначале опишем некоторые свойства этих прямых. Для этого нам потребуются сформулированные ниже сведения из теории делимости целых чисел, доказываемые обычно в курсе алгебры и теории чисел.

<u>Утверждение 1</u>. *Пусть b – натуральное число. Любое целое число a может быть представлено в виде*

$$a = bq + r, \ q, r \in \mathbf{Z}, \ 0 \le r < b. \tag{1}$$

Числа q и r в (1) *определяются однозначно.*

Представление (1) называется ***делением с остатком*** r целого числа a на натуральное число b. Если $r = 0$, то говорят, что a ***делится*** (***без остатка***, ***нацело***) на b или что a ***кратно*** b. Ниже a, b – целые числа, p – некоторое простое число.

<u>Утверждение 2</u>. *Если a делится на p, то для любого целого числа d число da делится на p.*

<u>Утверждение 3</u>. *Если произведение ab кратно p, причем b не делится на p, то a делится на p.*

<u>Утверждение 4</u>. *Если сумма $a + b$ делится на p, причем a делится на p, то b делится на p.*

<u>Утверждение 5.</u> *Если a и b делятся на p, то их сумма* (*разность*) *также делится на p.*

<u>Утверждение 6.</u> *Если $a, b \in \{0, 1, ..., p-1\}$, то делимость $a - b$ на p означает равенство $a = b$.*

<u>Утверждение 7.</u> *Разность a – b делится на p тогда и только тогда, когда a и b имеют одинаковые остатки при делении на p.*

<u>Утверждение 8</u>. *Пусть c – фиксированное целое число. Существует единственное* $n \in \{0, 1, ..., p-1\}$ *такое, что n + c делится на p.*

Обратимся теперь к рассмотрению некоторых свойств прямых в *AFP*(*p*).

Свойства прямых множества AFP(p).

<u>Свойство 1</u>. $l_{a,b,c} = l_{da,db,dc}$ *для любого целого d, не делящегося на p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. ℂ Пусть $(m, n) \in l_{a,b,c}$. Тогда $am + bn + c$ делится на p. Так как

$$d(am + bn + c) = (da)m + (db)n + (dc) \qquad (2),$$

то $(m,n) \in l_{da,db,dc}$.

Обратно, пусть $(m,n) \in l_{da,db,dc}$.Тогда снова ввиду (2) и утверждения 3 (*d* не делится на *p*) $am + bn + c$ кратно *p*, т.е. $(m,n) \in l_{a,b,c}$.ℤ

<u>Свойство 2</u>. *Пусть r – остаток от деления a на p. Тогда* $l_{a,b,c} = l_{r,b,c}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. ℂ Пусть $(m,n) \in l_{a,b,c}$, т. е. $am + bn + c$ делится на p. Но

$$am + bn + c = (pq + r)m + bn + c = (pqm) + (rm + bn + c),$$

следовательно, (утверждение 4), $rm + bn + c$ делится на *p*, а это значит, что $(m,n) \in l_{r,b,c}$. Обратно, если точка $(m,n) \in l_{r,b,c}$, то $rm + bn + c$ делится на *p*. Но $am + bn + c = (pqm) + (rm + bn + c)$, следовательно (утверждение 5), $am + bn + c$ делится на *p*, т.е. $(m,n) \in l_{a,b,c}$.ℤ

Следствие 1. *Если a делится на p, то* $l_{a,b,c} = l_{o,b,c}$.

<u>Упражнение 2</u>. *Докажите, что*

(i) *если* $b = pq + r,\ 0 \le r < p,$ *то* $l_{a,b,c} = l_{a,r,c}$.

(ii) *если* $c = pq + r,\ 0 \le r < p,$ *то* $l_{a,b,c} = l_{a,b,r}$.

!! **<u>Замечание.</u>** Как показывают свойство 2 и предыдущее упражнение, для любой прямой из множества *AFP*(*p*) коэффициенты можно брать только из множества $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$.

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть a не делится на p. Существует единственное* $d \in \{1, 2, ..., p-1\}$ *такое, что ad при делении на p имеет остаток* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbb{C}$ По утверждению 3 имеем, что ни одно из чисел $a \cdot 1,\ a \cdot 2, ...,\ a \cdot (p-1)$ на p не делится. Покажем, что при делении на p этих чисел получающиеся остатки попарно различные. Рассуждаем методом от противного. Пусть для некоторых $i, j \in \{1, 2, ..., p-1\}$ таких, что $i \neq j$, числа $a \cdot i$ и $a \cdot j$ имеют одинаковые остатки при делении на p. Тогда (утверждение 7) $a \cdot i - a \cdot j$ делится на p. Поскольку a не делится на p, то (утверждение 2) разность $i - j$ делится на p. Следовательно (утверждение 6) $i = j$, что противоречит нашему допущению.

Итак, числа $a \cdot 1,\ a \cdot 2, ...,\ a \cdot (p-1)$ имеют при делении на p разные остатки. Этих чисел всего $p-1$. С другой стороны, при делении на число p в качестве ненулевых могут получаться числа $1, 2, ..., p-1$, т.е. таких чисел-остатков тоже $p-1$. Значит, любой из перечисленных ненулевых остатков встречается среди чисел $a \cdot 1,\ a \cdot 2, ...,\ a \cdot (p-1)$ один раз, в том числе и интересующий нас остаток 1. Подчеркнем еще, что число d находится однозначно, т.к. мы показали, что в случае $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ..., p-1\}$ числа $a \cdot i$ и $a \cdot j$ имеют разные остатки при делении на p. $\mathbb{Z}$

Упражнение 1. *Верна ли лемма, если вместо* 1 *взять другой ненулевой остаток? Почему в предыдущей лемме мы выделяем именно остаток* 1?

Свойство 3. *Если a не делится на p, то* $l_{a,b,c} = l_{1,a',b'}$.

Доказательство. По свойству 1 имеем: $l_{a,b,c} = l_{da,db,dc}$, где d не делится на p. Возьмем в качестве d такое число из множества $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$, что $ad = ps + 1,\ s \in \mathbb{Z}$ (согласно лемме такое d существует). Тогда ввиду свойства 2 получаем, что $l_{a,b,c} = l_{1,db,dc}$.

Свойство 4. $l_{0,b,c} = l_{0,1,c'}$.

Упражнение 2. *Докажите это свойство.*

Из доказанного выше получаем:

любая прямая в множестве $AFP(p)$ совпадает либо с прямой вида $l_{1,b,c}$, либо с прямой вида $l_{0,1,c}$.

***Взаимное расположение прямых множества** $AFP(p)$.*

Выясним сначала вопрос о наличии общих точек у прямых множества $AFP(p)$.

Случай 1. Рассмотрим прямые $l_{1,a,b}$ и $l_{0,1,\gamma}$. Задача нахождения их общих точек эквивалентна нахождению пар (m, n), $m,n \in \{0,1,...,p-1\}$ таких, что числа $m+an+b$ и $n+\gamma$ делятся одновременно на p. Из утверждения 8 следует, что существует, притом единственное, $n_0 \in \{0,1,...,p-1\}$ такое, что $n_0+\gamma$ делится на p. Кроме того, вновь ввиду утверждения 8 существует единственное $m_0 \in \{0,1,...,p-1\}$, такое, что m_0+an_0+b делится на p. Таким образом, существует, причем единственная, точка (m_0, n_0), общая для прямых $l_{1,a,b}$ и $l_{0,1,\gamma}$. Итак, верно следующее утверждение.

<u>**Свойство 4.**</u> *Прямые $l_{1,a,b}$ и $l_{0,1,\gamma}$ имеют единственную общую точку.*

Случай 2. Рассмотрим теперь прямые $l_{0,1,\delta}$ и $l_{0,1,\gamma}$. Задача нахождения общих точек этих прямых эквивалентна задаче нахождения пар (m, n), $m,n \in \{0,1,...,p-1\}$ таких, что $n+\delta$ и $n+\gamma$ делятся одновременно на p. Предположим, что точка (m_0, n_0) принадлежит обеим прямым $l_{0,1,\delta}$, $l_{0,1,\gamma}$. Тогда по утверждению 5 разность $(n_0+\delta)-(n_0+\gamma)=\delta-\gamma$ делится на p. Итак, если $\delta-\gamma$ не делится на p (в силу выбора δ и γ это эквивалентно неравенству $\delta \neq \gamma$), то эти прямые не имеют общих точек. Если же число $\delta-\gamma$ делится на p, т.е. если $\delta=\gamma$, то прямые совпадают. Таким образом, доказано следующее утверждение.

<u>**Свойство 5.**</u> *Прямые $l_{0,1,\delta}$ и $l_{0,1,\gamma}$ совпадают, если $\delta=\gamma$, и не имеют общих точек (т.е. параллельны и различны)*, если $\delta \neq \gamma$.

***Следствие 2.** Прямые $l_{0,1,\delta}$ и $l_{0,1,\gamma}$ не могут иметь только одну общую точку.*

Случай 3. Рассмотрим прямые $l_{1,a,b}$ и $l_{1,c,d}$. Здесь имеются две возможности: $a = c$, либо $a \neq c$.

Пусть $a = c$.

Если $b = d$, то прямые совпадают. Если же $b \neq d$, то прямые не пересекаются. Докажем это методом от противного. Предположим, что

$b \neq d$ и существует точка $(m,n) \in l_{1,a,b} \bigcap l_{1,c,d}$.Тогда $m+an+b$ и $m+cn+d$ делятся на p. Из утверждения 5 имеем, что их разность ($m + an + b$) – ($m + an + d$) = $b – d$ тоже делится на p, что влечет (по утверждению 6) равенство $b = d$. Получили противоречие. Итак, при $b \neq d$ прямые не имеют общих точек.

Пусть $a \neq c$.

По лемме 1 существует $d_0 \in \{1, 2, ..., p-1\}$ такое, что $(a-c)d_0 - 1$ делится на p. По утверждению 8 существует $n_0 \in \{0, 1, ..., p-1\}$ такое, что $n_0 - d_0(d-b)$ делится на p. Из утверждения 8 также следует существование $m_0 \in \{0, 1, ..., p-1\}$ такого, что $m_0 + an_0 + b$ делится на p. Покажем, что точка $(m_0, n_0) \in l_{1,a,b} \bigcap l_{1,c,d}$. Так как $m_0 + an_0 + b$ делится на p, то $(m_0, n_0) \in l_{1,a,b}$.

Кроме того, $(a – c)d_0 – 1$ делится на p. Поэтому $(d – b)(a – c)d_0 – (d – \mathrm{b})$ делится на p, значит, $n_0(a-c)-(d-b) = an_0 + b - (n_0c + d)$ делится на p, поэтому $-(an_0 + b) + n_0c + d$ и $m_0 + n_0c + d$ делятся на p. Значит, $(m_0, n_0) \in l_{1,c,d}$, т. е. точка $(m_0, n_0) \in l_{1,a,b} \bigcap l_{1,c,d}$.

Покажем, что это единственная общая точка этих прямых. Предположим, что существует другая точка (m_1, n_1) принадлежащая обеим прямым. Тогда числа $m_1 + an_1 + b$ и $m_1 + cn_1 + d$ делятся на p. Ввиду утверждения 5 число $(a-c)n_1 + (b-d)$ также делится на p. Но тогда на p делится и число $(n_0 - n_1)(a-c)$. Так как $a-c$ не кратно p, то по утверждению 3 $n_0 - n_1$ делится на p, что равносильно равенству $n_0 = n_1$. Следовательно, $m_1 + an_0 + b$ кратно p. Так как на p делится $m_0 + an_0 + b$, то согласно утверждению 5 тоже верно и для $m_1 - m_0$. Но тогда $m_1 = m_0$, т. е. точки (m_0, n_0) и (m_1, n_1) совпадают, что противоречит предположению. Итак, доказано следующее утверждение.

Свойство 6. *Прямые* $l_{1,a,b}$ *и* $l_{1,c,d}$

(i) *совпадают тогда и только тогда, когда* $a = c$ и $b = d$;

(ii) *параллельны и различны тогда и только тогда, когда* $a = c$ *и* $b \neq d$;

(iii) *имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда* $a \neq c$.

Теорема 2. $AFP(p)$ ***– конечная плоскость аффинного типа порядка p.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. ℂПокажем, что $AFP(p)$ удовлетворяют условию **AP₁**. Действительно, пусть (m, n) и (t, r) различные точки $AFP(p)$. Тогда прямая $l_{r-n,m-t,(n-r)m+(t-m)n}$, очевидно, содержит обе эти точки (проверьте, что $r-n$ и $m-t$ не могут одновременно делиться на p). Покажем теперь, что это единственная прямая, проходящая через данные точки. Предположим противное: пусть l и l' различные прямые, содержащие эти точки. В силу свойства 4 имеются следующие возможности:

(i) $l = l_{0,1,\delta}$ и $l' = l_{0,1,\gamma}$;

(ii) $l = l_{1,a,b}$ и $l' = l_{0,1,\delta}$;

(iii) $l = l_{1,a,b}$ и $l' = l_{1,c,d}$.

Покажем, что любая из них приводит к противоречию.

В случае (i) в силу свойства 5 эти прямые не могут быть различными.

В случае (ii) по свойству 4 прямые l и l' не могут иметь двух различных общих точек.

В случае (iii) для этих прямых неравенство $a \neq c$ невозможно (тогда бы по свойству 6 прямые l и l' имели бы только одну общую точку). Если же $a = c$ для различных прямых, то по свойству 6 эти прямые не имеют общих точек, что противоречит выбору прямых l и l'. Таким образом, существует единственная прямая, проходящая через две различные точки. Справедливость **AP₁** установлена.

Докажем теперь, что для $AFP(p)$ выполняется условие **AP₂**. Заметим, что если $(m, n) \in l_{1,a,b}$ и r_1 – остаток при делении $m+1$ на p, то $(r_1, n) \notin l_{1,a,b}$. Если же $(m, n) \in l_{0,1,\delta}$, то $(m, r_2) \notin l_{0,1,\delta}$, где r_2 – остаток от деления $n+1$ на p. ℤ

<u>Упражнение 3.</u> *Проверьте, можно ли для доказательства выполнения условия* **AP₂** *вместо* $m+1$, $n+1$ *брать другие числа, например,* $m+2$, $n+2$ *соответственно*?

Наконец, проверим справедливость для $AFP(p)$ условия **AP₃**. Пусть $(m, n) \notin l_{0,1,\delta}$. Ввиду свойств 4 и 5 любая прямая, параллельная прямой $l_{0,1,\delta}$, имеет вид $l_{0,1,\gamma}$. Если прямая $l_{0,1,\gamma}$ содержит точку (m, n), то $n+\gamma$ делится на p. По утверждению 8 число γ, удовлетворяющее этому условию, существует, причем оно единственно. Итак, для прямой вида $l_{0,1,\delta}$ условие $\mathbf{AP_3}$ выполняется. Рассмотрим теперь прямую вида $l_{1,a,b}$. Пусть $(m,n) \notin l_{1,a,b}$. Известно (свойства 4 и 6), что любая прямая, параллельная прямой $l_{1,a,b}$, имеет вид $l_{1,a,c}$. Для прямой $l_{1,a,c}$, содержащей точку (m,n), число $m+an+c$ делится на p, причем из утверждения 8 вытекает единственность числа c. Значит, для прямой вида $l_{1,a,b}$ условие $\mathbf{AP_3}$ также выполнено.

Таким образом, $AFP(p)$ – конечная плоскость аффинного типа. Ее порядок равен p, поскольку по построению множество $AFP(p)$ содержит p^2 точек.

Упражнение 4. *Пусть задана плоскость* $AFP(3)$.

(i) *Укажите прямые*, *проходящие через точку* (2, 1);

(ii) *выпишите все направления этой плоскости*;

(iii) *укажите все прямые направления*, *задаваемого прямой*, *проходящей через точки* (2, 1) *и* (0, 1);

(iv) *укажите вершины какого-либо параллелограмма в плоскости* $AFP(3)$.

Итак, установлено, что для любого простого числа p существует плоскость аффинного типа порядка p. Ответ на естественно возникающий вопрос: для каких натуральных чисел n существует плоскость порядка n, до сих пор не известен. К настоящему времени имеются два важных результата, проливающих свет на эту проблему – это теоремы Брука – Райзера и Веблена.

Теорема 3 ***(Брук – Райзер, 1949 г.). Не существует плоскости порядка*** n, $n>1$, ***если натуральное число*** n ***при делении на 4 дает в остатке 1 или 2 и в разложении числа*** n ***на простые множители хотя бы один простой множитель вида*** $4k-1$ ***входит в нечетной степени.***

Поскольку полное изложение конечных геометрий не является нашей целью, мы не будем приводить доказательство этой теоремы, весьма полезной в приложениях.

Еще раньше О. Веблен (1906 г.) установил, что плоскость порядка n существует для любых n, являющихся степенями простых чисел (позже мы приведем доказательство этого результата). Имеется до сих пор недоказанная гипотеза о том, что только такие числа и могут встречаться в качестве порядков конечных плоскостей аффинного типа. Если мы рассмотрим ряд чисел

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$$

то по теореме Веблена существуют плоскости порядков 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11. По теореме Брука – Райзера не существует плоскости порядка 6 и лишь в 1989 году с помощью сложных компьютерных вычислений было показано, что плоскости порядка 10 также не существует. Существует ли плоскость порядка 12, не известно.

По аналогии с построением плоскостей $AFP(p)$ можно установить существование аффинных бесконечных плоскостей аффинного типа.

Плоскости $A^2(\mathbf{R})$ *и* $A^2(\mathbf{C})$

Обозначим символом $A^2(\mathbf{R})$ множество всех упорядоченных пар вещественных чисел. Элементы (m, n) множества $A^2(\mathbf{R})$ будем называть ***точками***. Пусть

$$l_{a,b,c} = \left\{(m, n) \in A^2(\mathbf{R}) \middle|\, am + bn + c = 0\right\},$$

где a и b одновременно не равные нулю вещественные числа. Множества $l_{a,b,c}$ будем называть ***прямыми***.

<u>**Утверждение 1**</u>. *Множество* $A^2(\mathbf{R})$ *является плоскостью аффинного типа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. ℂ Достаточно повторить рассуждения из доказательств утверждений предыдущего параграфа, заменив выражения «делится на p» на «равно нулю». ℤ

☝ <u>**Пример 2**</u>. Пусть **C** – множество комплексных чисел и $A^2(\mathbf{C})$ – множество всех упорядоченных пар комплексных чисел. Определим точки (m, n) и прямые $l_{a,b,c}$ в $A^2(\mathbf{C})$ также, как и в примере 1, заменив вещественные числа a, b, c, m, n на комплексные. По аналогии с предыдущем примером можно доказать, что $A^2(\mathbf{C})$ – плоскость аффинного типа.

Рассмотренные выше примеры плоскостей $AFP(p)$, $A^2(\mathbf{R})$ и $A^2(\mathbf{C})$ могут быть изложены с единой точки зрения, если использовать математическое понятие поля. Это понятие, а также понятие группы будут часто встречаться ниже, поэтому напомним их определения (см. [ ], § 2.7).

<u>***Определение 1.***</u> *Непустое множество G называется **группой**, если в G задана алгебраическая операция $\circ$, т.е. отображение*

$$G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \circ g_2 \in G$$

удовлетворяющее аксиомам:

$\mathbf{G_I}$ *для любых* $g_1, g_2, g_3 \in G$ *верно равенство*

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) \quad (\text{операция} \circ \text{ассоциативна});$$

$\mathbf{G_{II}}$ *существует такой элемент* $e \in G$, *что для любого* $g \in G$ *верно равенство*

$$e \circ g = g \circ e = g$$

(*элемент* e *называется* ***нейтральным*** *элементом относительно операции* $\circ$);

$\mathbf{G_{III}}$ *для каждого элемента* $g \in G$ *существует элемент* $g' \in G$ *такой*, *что верно равенство*

$$g \circ g' = g' \circ g = e$$

(*элемент* g' *называется* ***симметричным*** *элементом для* g);

Группа называется ***коммутативной*** (*или* ***абелевой***) *группой, если операция* $\circ$ *коммутативна, т.е. для любых* $g_1, g_2 \in G$ *верно равенство* $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

Часто групповая операция называется ***умножением***; композиция $g_1 \circ g_2$ обозначается просто $g_1 g_2$; нейтральный элемент e называется ***единицей*** и обозначается 1; элемент g', симметричный g, называется ***обратным*** для g и обозначается g^{-1}. В случае абелевой группы используют следующую терминологию и обозначения: групповая операция – ***сложение***, композиция $g_1 \circ g_2$ обозначается $g_1 + g_2$; нейтральный элемент называется ***нулем*** и обозначается 0; элемент g', симметричный g, называется ***противоположным*** для g и обозначается $-g$.

<u>Определение 2.</u> ***Полем*** *называется непустое множество* $\mathbf{F}$, *в котором заданы операции* ***сложения*** *и* ***умножения*** *элементов*, *т.е. отображения*

$$+ : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta \quad \text{и} \quad \cdot : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta,$$

удовлетворяющие следующим аксиомам:

(i) *относительно сложения множество* $\mathbf{F}$ *является абелевой группой с нейтральным элементом* 0;

(ii) *относительно умножения множество* $\mathbf{F} \setminus \{0\}$ *является абелевой группой с нейтральным элементом* 1.

Примерами полей являются множество вещественных чисел $\mathbf{R}$, множество комплексных чисел $\mathbf{C}$, а также множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ с обычными операциями сложения и умножения чисел. Произвольное поле **F** похоже на эти числовые поля тем, что в **F** выполнимы "арифметические" операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на 0), которые производятся по таким же правилам, как в числовых полях.

В математике наряду с бесконечными полями $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ рассматриваются и конечные поля. Наиболее важным примером конечного поля является ***поле классов вычетов*** $\mathbf{Z}/(p)$ по модулю простого числа p. Множество $\mathbf{Z}/(p)$ является фактормножеством множества целых чисел $\mathbf{Z}$ по следующему отношению эквивалентности:

$$\forall a,b \in \mathbf{Z} \quad a \sim_p b \iff a-b \text{ } \textit{делится на } p.$$

Очевидно, что целые числа a и b находятся в отношении $\sim_p$ тогда и только тогда, когда остатки при делении чисел a и b на число p равны. Из этого замечания легко следует, что бинарное отношение[1] $\sim_p$ на множестве $\mathbf{Z}$ действительно является отношением эквивалентности и что множество $\mathbf{Z}/(p)$ всех классов эквивалентности состоит из p элементов и совпадает с множеством $\{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{p-1}\}$. Здесь символом $\overline{a}$ обозначен класс эквивалентности целого числа a. Далее на множестве $\mathbf{Z}/(p)$ определяются операции *сложения* и *умножения* по формулам:

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{Z}/(p) \quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Можно показать, что эти определения корректны и что множество $\mathbf{Z}/(p)$ относительно введенных операций является полем (читатель, встречающий эту конструкцию впервые, может ознакомиться с деталями в любом учебном пособии по курсу алгебры и теории чисел либо восстановить их самостоятельно).

Пусть теперь **F** – произвольное поле (в частности, **R**, **C** или $\mathbf{Z}_p$), 0 и 1 – нуль и единица поля **F**. Рассмотрим так называемую ***арифметическую модель*** плоскости аффинного типа над полем **F**. Пусть

$$\mathbf{Б}^2(\mathbf{F}) = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{F}\} -$$

[1] О понятии бинарного отношения см. [ ], § 1.8.

множество всех упорядоченных пар элементов из поля $\mathbf{F}$. Множество $\mathbf{Б}^2(\mathbf{F})$ конечно либо бесконечно в зависимости от конечности либо бесконечности поля $\mathbf{F}$. В случае $\mathbf{F} = \mathbf{Z}/(p)$ – поля из из p элементов, множество $\mathbf{A^2}(\mathbf{Z}/(p))$ состоит из p^2 элементов. Элементы множества $\mathrm{A}^2(\mathbf{F})$, т.е. пары (x, y) будем называть *точками*. Пусть (a,b,c) – упорядоченная тройка элементов поля $\mathbf{F}$ такая, что a и b не равны одновременно нулю. *Прямой* будем называть подмножество $l(a,b,c)$ множества $\mathrm{A}^2(\mathbf{F})$, определяемое следующим образом:

$$l(a,b,c) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in A^2(\mathbf{F}) \mid a\alpha_1 + b\alpha_2 + c = 0\}.$$

Элементы (числа) a,b,c будем называть *коэффициентами прямой* $l(a,b,c)$. Другими словами можно сказать, что прямая $l(a,b,c)$ – это множество решений уравнения $ax + by + c = 0$.

<u>Утверждение 1.</u> *Прямые $l(a_1, b_1, c_1)$ и $l(a_2, b_2, c_2)$ совпадают тогда и только тогда, когда их коэффициенты пропорциональны, т.е. существует такое $\lambda \in \mathbf{F}, \lambda \neq 0,$ что*

$$a_2 = \lambda a_1, b_2 = \lambda b_1, c_2 = \lambda c_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbb{C}$ Достаточность доказывается легко, поскольку очевидно, что множества решений уравнений

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda a_1x + \lambda b_1y + \lambda c_1 = 0$$

совпадают, если $\lambda \neq 0$.

Обратно, пусть прямые с коэффициентами a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 совпадают, т.е. уравнения $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ имеют одно и то же множество решений. Поскольку один из двух первых коэффициентов прямой $l(a_1, b_1, c_1)$ отличен от нуля, то, не умаляя общности, можно считать, что $a_1 \neq 0$. Тогда все точки прямой $l(a_1, b_1, c_1)$, т.е. все решения уравнения $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, очевидно, имеют вид

$$(-\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}\alpha, \alpha), \ \alpha \in \mathbf{F}. \tag{1}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $a_2 \neq 0$. Действительно, если допустить, что $a_2 = 0$, то тогда $b_2 \neq 0$ и все точки прямой $l(a_2, b_2, c_2)$, т.е. все решения уравнения $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, имеют вид

$(\beta, -\frac{c_2}{b_2})$, $\beta \in \mathbf{F}$. Поскольку две прямые совпадают, то полагая в (1) $\alpha = 0$, для некоторого $\beta \in \mathbf{F}$ имеем

$$(-\frac{c_1}{a_1}, 0) = (\beta, -\frac{c_2}{b_2}).$$

Из последнего равенства следует, что $c_2 = 0$, т.е. все точки данных прямых имеют вид $(\beta, 0)$, $\beta \in \mathbf{F}$. Это приводит к противоречию, поскольку из (1) вытекает, что на прямой $l(a_1, b_1, c_1)$ лежит точка $(-\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}, 1)$ с ненулевой второй компонентой. Итак, $a_2 \neq 0$. Обозначим $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$ и покажем, что это искомое число. Имеем: $\lambda \neq 0$ и $a_2 = \lambda a_1$.

Положим в (1) $\alpha = 0$, тогда точка $(-\frac{c_1}{a_1}, 0)$ прямой $l(a_1, b_1, c_1)$ лежит и на прямой $l(a_2, b_2, c_2)$, следовательно, $-a_2 \frac{c_1}{a_1} + c_2 = 0$, т.е. $c_2 = \lambda c_1$. Из уже доказанного следует, что уравнения двух прямых имеют вид:

$$l(a_1, b_1, c_1): \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0;$$
$$l(a_2, b_2, c_2): \quad \lambda a_1 + b_2 y + \lambda c_1 = 0.$$

Умножив первое из них на $-\lambda$ и сложив со вторым, получим

$$(b_2 - \lambda b_1) y = 0.$$

Вновь используя то, что на обеих прямых есть точка с ненулевой второй компонентой, получаем, что $b_2 = \lambda b_1$, что и завершает доказательство необходимости. $\mathbb{Z}$

Теорема 4. ***Множество* $\mathbf{Б}^2(\mathbf{F})$ *с прямыми вида* $l(a,b,c)$*, определенными выше, является плоскостью аффинного типа.***

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** $\mathbb{C}$ Проверим истинность для $\mathbf{Б}^2(\mathbf{F})$ аксиом $\mathbf{AP_1} - \mathbf{AP_3}$.

$\mathbf{AP_1}$. Пусть $A = (\alpha_1, \alpha_2)$, $B = (\beta_1, \beta_2)$ – две различные точки. Прямая проверка показывает, что прямая $l(\beta_2 - \alpha_2, \alpha_1 - \beta_1, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$ проходит через точки A и B (отметим, что $\beta_2 - \alpha_2$ и $\alpha_1 - \beta_1$ не равны нулю одновременно, так как $A \neq B$).

Пусть теперь прямая $l(a,b,c)$ проходит через точки A и B. Тогда для коэффициентов этой прямой выполняются равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_2 b + c = 0 \\ \beta_1 a + \beta_2 b + c = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Вычитая из первого второе, получаем $(\alpha_1 - \beta_1)a + (\alpha_2 - \beta_2)b = 0$.

Если $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$, то из последнего равенства имеем $a = \dfrac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} b$ и далее из равенств (2) $c = \dfrac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} b$. В рассматриваемом случае $b \neq 0$ (иначе $a = b = 0$) и, полагая $\lambda = \dfrac{b}{\alpha_1 - \beta_1}$, имеем:

$\lambda \neq 0$ и $a = \lambda(\beta_2 - \alpha_2),\ b = \lambda(\alpha_1 - \beta_1),\ c = \lambda(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$.

Таким образом, прямая $l(a,b,c)$, проходящая через точки A и B, совпадает с прямой $l(\beta_2 - \alpha_2, \alpha_1 - \beta_1, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$ (утверждение 1).

Если $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, то $\alpha_2 - \beta_2 \neq 0$ и рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что $l(a,b,c) = l(\beta_2 - \alpha_2, \alpha_1 - \beta_1, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$. Итак, **AP₁** истинно для $\mathbf{Б}^2(\mathbf{F})$.

AP₂. Допустим, что некоторая прямая $l(a,b,c)$ совпадает со всем множеством $\mathbf{Б}^2(\mathbf{F})$. Тогда, выбрав точки $A = (0,0),\ B = (1,0),\ C = (0,1)$, получим равенства:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c = 0, \end{cases}$$

откуда, очевидно, вытекает, что $a = b = c = 0$. Получили противоречие с определением прямой $l(a,b,c)$. Следовательно, никакая прямая не совпадает со всем множеством $\mathbf{Б}^2(\mathbf{F})$.

AP₃. Пусть $l(a,b,c)$ – прямая и $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ – точка. Тогда несложные вычисления показывают, что прямая $l(a, b, -\alpha_1 a - \alpha_2 b)$, во-первых, проходит через точку A и, во-вторых, параллельна прямой $l(a,b,c)$, т.е. либо совпадает с $l(a,b,c)$ (если $A \in l(a,b,c)$), либо не пересекается с $l(a,b,c)$ (если $A \notin l(a,b,c)$).

Допустим, что $l(a_1,b_1,c_1)$ – какая-то прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой $l(a,b,c)$.

Тогда, если $A \in l(a,b,c)$, то $l(a_1,b_1,c_1) = l(a,b,c)$ по определению параллельных прямых, и в этом случае единственность прямой, проходящей через A и параллельной $l(a,b,c)$, доказана.

Пусть $A \notin l(a,b,c)$. Тогда прямые $l(a,b,c)$ и $l(a_1,b_1,c_1)$ не пересекаются. Убедимся, что в этом случае первые два коэффициента прямых $l(a,b,c)$ и $l(a_1,b_1,c_1)$ пропорциональны, т.е. существует $\lambda \in \mathbf{F}, \lambda \neq 0$, такое, что $a_1 = \lambda a, b_1 = \lambda b$. Действительно, если предположить, что такого λ не существует, то $\Delta = ab_1 - ba_1 \neq 0$. Но тогда, как показывает простая проверка, точка $(\frac{bc_1 - b_1c}{\Delta}, \frac{a_1c - ac_1}{\Delta})$ лежит на обеих прямых $l(a,b,c)$ и $l(a_1,b_1,c_1)$, что приводит к противоречию, поскольку прямые не пересекаются. Так как $A \in l(a_1,b_1,c_1)$, то

$$\lambda a\alpha_1 + \lambda b\alpha_2 + c_1 = 0,$$

следовательно, $c_1 = -\lambda a\alpha_1 - \lambda b\alpha_2$. Добавляя к последнему равенству установленные выше равенства $a_1 = \lambda a, b_1 = \lambda b$, получаем, в силу предложения 1, что $l(a_1,b_1,c_1) = l(a, b, -\alpha_1 a - \alpha_2 b)$. Единственность параллельной прямой, проходящей через точку A, установлена. Утверждение **AP₃** истинно для $\mathbf{Б}^2(\mathbf{F})$. Теорема доказана. $\mathbb{Z}$