§15 МЕТОД КООРДИНАТ

Метод координат – один из важнейших в математике и основной метод, применяемый в аналитической геометрии. С координатами (в широком смысле этого слова) мы часто встречаемся в повседневной жизни. Они используются для определения положения в пространстве и во времени того или иного события. Рассмотрим вначале несколько примеров.

Пассажир поезда, желающий определить, насколько далеко он находится от места отправления, использует километровые столбы (представьте, что вы движетесь по пустынной равнине, где пейзаж однообразен, так что у вас нет другой возможности определить отличие одного места от другого). Аналогичен пример лыжника, лыжня которого проходит вдоль шоссе.

Положение корабля в океане можно определить с помощью географической карты, если найти широту и долготу ее местонахождения.

Играя в шахматы по переписке, для определения поля шахматной фигуры на доске вы указываете, в какой строке и в каком столбце это поле находится.

Для определения величины промежутка времени, прошедшего с начала путешествия или прогулки, человек использует показания часов. При фиксировании того или иного исторического события используются календари.

Зададимся вопросом, что общего у этих примеров? Отметим прежде всего, что, предположив отсутствие у железнодорожного полотна (шоссе) километровых столбов, у моряков карты (и других приборов), а у шахматной доски ее нумерации, мы сталкиваемся каждый раз с трудной задачей различения “похожих” вещей, причем их отличие друг от друга состоит только в разном их положении по отношению к другим заранее заданным. Действительно, в первом примере заданным объектом является пункт отправления поезда, а “похожими” являются точки земной поверхности, расположенные вдоль железнодорожного полотна. Эти точки ”похожи” ввиду нашего предположения о том, что мы двигаемся в пустынной местности, где одно место неотличимо от другого. Различие же улавливается только расстоянием от пункта отправления (т.е. номером километрового столба). Во втором примере все точки океанской поверхности для нас неразличимы и различие их состоит в том, что они расположены по-разному относительно заданных нулевого меридиана и экватора. В третьем примере, хотя поля шахматной доски и бывают двух цветов, в остальном задача их определения при отсутствии нумерации остается сложной (напомним, что существует также игра в стоклеточные шашки с аналогичной задачей определения поля). Оставляя в стороне проблему двухцветности полей, которые таковы лишь для удобства, заметим, что они различаются своим местоположением, которое однозначно определяется столбцом и строкой, в которых находится данное конкретное поле.

Таким образом, общим для всех примеров является задача различения одинаковых по своим свойствам предметов, отличающихся по их положению по отношению к заранее заданным (пункт отправления поезда, нулевой меридиан и экватор, поле на шахматной доске находящееся в левом нижнем углу).

При определении момента времени того или иного события также возникает задача различения похожих друг на друга минут, часов, дней, годов, отличающихся друг от друга по их отношению к некоторым фиксированным моментам времени (начало часа, полночь, новый год, рождение Христа).

Как же решается эта задача различения в приведенных примерах?

Можно считать, что во всех случаях мы как бы “набрасываем” на конкретную ситуацию некоторую сеть, в узлах которой находятся различаемые нами точки. Действительно, если в первом примере рассмотреть кривую, изображающую железнодорожный маршрут от начального до конечного пунктов следования, то можно представить себе “линейную” сеть, расположенную вдоль маршрута с узлами в километровых столбах (рис.1). Заметив, что поезд находится, например, на перегоне между 1000-м и 1001-м километровыми столбами, мы знаем, что удалились от начального пункта на расстояние тысячи километров.

Рис. 1

Во втором случае на земной шар “наброшена” сетка из параллелей и меридианов (рис.2). В узлах этой сетки и содержится информация о местоположении точек на поверхности земли (океана).

Рис. 2

В третьем примере имеем сетку, проходящую через середины полей параллельно краям доски (рис.3). Пересечение этих средних линий и задают узлы сетки в которых сосредоточена информация о полях шахматной доски.

Рис. 3

При определении момента времени мы привязываемся к сетке минут, часов, дней или годов.

Теперь можно дать предварительное, пока еще нестрогое, описание метода координат, как способа определять положение тела (точки) на плоскости (или в пространстве, или на прямой) с помощью чисел или символов (вспомните случай шахматной доски). Развивая аналогию сети, “наброшенной”, например, на плоскость, отметим, что “точные” координаты (т.е. числа или символы, с помощью которых определяется положение точек) имеются только в узлах сети. Чтобы избежать этого недостатка, можно выбирать ячейки сети очень маленькие и тогда "большое” число точек будет иметь координаты.

Обобщение этих примеров приводит к следующим математическим понятиям евклидовой геометрии, изучаемой в школе. Прежде всего, возникает идея *числового луча*, или полупрямой, положение каждой точки которой определяются ее расстоянием от вершины луча O.

В случае прямой фиксируется точка O, которая разбивает прямую на две полупрямые. Каждая точка на одной полупрямой определяется однозначно своей координатой, равной ее расстоянию от точки O. На второй полупрямой координата любой точки определяется как отрицательное число, абсолютная величина которого равна расстоянию этой точки от точки O. Такая прямая называется *числовой осью*.

В случае плоскости не все точки, местоположение которых нам следует определить, принадлежат одной прямой, поэтому одной координаты недостаточно. Конечно, если точка лежит вне выбранной числовой оси, то можно рассмотреть другую прямую, содержащую данную точку, рассмотреть новую числовую ось и вычислить ее координату относительно этой оси. Однако, поскольку исследуемые точки могут образовывать бесконечные множества, возникает необходимость использовать бесконечное число осей. Такой метод оказывается весьма неэкономным. Существует другой подход к обсуждаемой проблеме, идея которого принадлежит П. Ферма и Р. Декарту. Оказывается, для однозначного определения местоположения точки на плоскости достаточно только двух числовых осей. Рассмотрим на плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси, пересекающиеся в точке O. Эти оси обычно обозначаются Ox и Oy (рис. 4).

Рис. 4

Теперь положение произвольной M точки на плоскости определяется упорядоченным набором двух чисел, которые получаются следующим образом. Через точку M проводятся прямые, параллельные соответственно осям Oy и Ox, которые пересекают оси координат в точках M_1 и M_2 (рис. 5). Затем записываются последовательно координаты точек M_1 и M_2 соответственно: (x, y). Координата x называется *абсциссой*, координата y – *ординатой* точки M. В результате получается способ различения вначале безымянных (неразличимых) точек плоскости с помощью упорядоченной пары вещественных чисел – ее координат. Система построенных таким образом двух осей называется традиционно *прямоугольной декартовой системой координат*. Заметим, что можно считать, что мы ”набросили” на плоскость сеть с квадратными ячейками.

Рис. 5

Попробуем применить аналогичные соображения для плоскостей аффинного типа. Обратим прежде всего внимание на то, что при построении прямоугольной декартовой системы координат мы использовали понятия, не определяемые для плоскостей аффинного типа (такие, например, как *прямой угол*, *расстояние*). Поэтому буквально метод координат в таком виде, как он был описан выше, в плоскостях аффинного типа применен быть не может. Однако в них он может быть применен в видоизмененной форме. Действительно, для "школьной" плоскости и требование одинаковости единиц измерения на числовых осях, и их перпендикулярность могут быть сняты без ущерба для возможности построения системы координат. Неформально говоря, можно рассмотреть сеть с ячейками в виде параллелограммов вместо квадратов (рис. 6).

Рис. 6

Все же и в такой форме приходится использовать понятия расстояния, неопределяемое в произвольной плоскости аффинного типа. Для сохранения применяемости метода координат в этом случае нам придется отказаться от понятия числовых осей координат и обратиться к координатным осям, связанным с векторами. Уход от привычных числовых осей не должен казаться таким уж странным. В случае игры в шахматы нумерация полей может быть, например, такой, как на рисунке 7.

Рис. 7

Следовательно, координаты поля могут задаваться парой: буква латинского алфавита, буква греческого алфавита, причем понятия «расстояния» и числа здесь не играют никакой роли.

Покажем, каким образом для всякой плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$ метод координат может быть реализован с помощью векторов этой плоскости.

Пусть O – фиксированная точка плоскости $\mathcal{A}$, π_1 и π_2 – два различных направления плоскости $\mathcal{A}$. Существует отображение

$$\Psi_O : \mathcal{A} \to \mathbf{V}(\mathcal{A}), \tag{1}$$

которое каждой точке M плоскости $\mathcal{A}$ ставит в соответствие ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ (см. § 7). Известно (утверждение 7.2), что группа векторов $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ является прямой суммой подгрупп векторов различных направлений π_1 и π_2:

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}(\pi_1) \oplus \mathbf{V}(\pi_2). \tag{2}$$

Это означает, что вектор $\overrightarrow{OM}$ единственным образом представляется в виде

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}_1(M) + \vec{a}_2(M).$$

Таким образом, возникает *отображение координатизации*

$$coord_{O,\pi_1,\pi_2} : \mathcal{A} \to \mathbf{V}(\pi_1) \times \mathbf{V}(\pi_2), \ M \mapsto (\vec{a}_1(M), \vec{a}_2(M)). \tag{3}$$

Это отображение биективно, поскольку биективно отображение (1) и сумма (2) – прямая. Поскольку отображение (3) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости $\mathcal{A}$ и множеством $\mathbf{V}(\pi_1) \times \mathbf{V}(\pi_2) = \{(\vec{a}_1, \vec{a}_2),\ \vec{a}_1 \in \mathbf{V}(\pi_1), \vec{a}_2 \in \mathbf{V}(\pi_2)\}$, то можно сказать, что тройка (O, π_1, π_2) есть ***система координат*** на плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$. В этой системе координат координатами точки M является пара векторов $(\vec{a}_1(M), \vec{a}_2(M))$.

В случае дезарговости плоскости $\mathcal{A}$ для ее точек можно определить более привычные, числовые координаты, если понимать под числами элементы подходящего тела. Мы знаем, что с дезарговой плоскостью $\mathcal{A}$ можно связать двумерное векторное пространство $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ над телом $D_{\mathcal{A}}$ (см. § 14). Выбрав, как и выше, некоторую точку O на плоскости $\mathcal{A}$, зафиксируем некоторый базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ пространства $\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Отметим, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – это пара ненулевых векторов двух различных направлений π_1 и π_2. В качестве системы координат в дезарговой плоскости $\mathcal{A}$ возьмем упорядоченную тройку $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Если M – произвольная точка плоскости $\mathcal{A}$, то для нее, как и выше, однозначно определяется радиус вектор

$\overrightarrow{OM}$, который, в свою очередь, единственным образом представляется в виде

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \ \ x, y \in D_{\mathcal{A}}. \tag{4}$$

Таким образом, возникает отображение координатизации

$$coord_{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2} : \mathcal{A} \to D_{\mathcal{A}} \times D_{\mathcal{A}} = D_{\mathcal{A}}^2, \ M \mapsto (x, y), \tag{5}$$

которое, как и отображение (3) является биекцией и, следовательно, позволяет определить координаты точек плоскости $\mathcal{A}$. В этом случае точка O называется ***началом координат***, тройка $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – ***аффинным репером*** (***декартовой системой координат***), а координатами точки M в этом репере являются "числа" x, y – элементы тела $D_{\mathcal{A}}$. Если x, y – координаты точки M, то используется запись: $M(x, y)$.

Рассмотрим подробнее отображение (5). Мы знаем, что декартов квадрат $D_{\mathcal{A}}^2$ тела $D_{\mathcal{A}}$ обладает структурой плоскости аффинного типа (пример 13.4), эта плоскость обозначается $\mathrm{A}^2(D_{\mathcal{A}})$. Сейчас мы покажем, что отображение (5) не только является биекцией плоскости $\mathcal{A}$ на плоскость $\mathrm{A}^2(D_{\mathcal{A}})$, но и сохраняет коллинеарность точек, т.е. (5) – изоморфизм плоскостей.

Теорема. 15.1. *Для любой дезарговой плоскости $\mathcal{A}$, отображение $coord_{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2} : \mathcal{A} \to \mathrm{A}^2(D_{\mathcal{A}})$ – изоморфизм плоскостей аффинного типа.*

Доказательство. Поскольку $coord_{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ – биекция, остается показать, что при этом отображении прямая переходит в прямую, т.е. для любой прямой $l \in \mathcal{A}$ найдутся такие $a, b, c \in D_{\mathcal{A}}$, что $coord_{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2}(l) \subset l(a, b, c)$. Пусть l проходит через начало координат и P – некоторая точка на l, отличная от O. Ввиду дезарговости $\mathcal{A}$ для любой точки $Q \in l$ существует единственный $\lambda \in D_{\mathcal{A}}$, такой, что $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OP}$. Следовательно, если записать точки P и Q вместе с их координатами: $P(\alpha, \beta), Q(\delta, \gamma)$, то $\delta = \lambda\alpha$, $\gamma = \lambda\beta$. Далее, если $\beta \neq 0$, то $\lambda = \gamma\beta^{-1}$. Откуда $\delta = \gamma\beta^{-1}\alpha$ и прямая проверка показывает, что $coord_{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2}(l) \subset l(1, -\beta^{-1}\alpha, 0)$. Если $\beta = 0$, то $\alpha \neq 0$, $\gamma = \delta\alpha^{-1}\beta$ и $coord_{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2}(l) \subset l(-\alpha^{-1}\beta, 1, 0)$.

Если же прямая l не проходит через начало координат, то всегда существует вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ такой, что $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \vec{a}$, где M – произвольная точка на прямой l а R – некоторая точка на прямой, параллельной l и проходящей через начало координат. Откуда без труда выводится справедливость теоремы в общем случае. ◄

Доказанная теорема показывают, что проблема изоморфизма двух дезарговых плоскостей сводится к задаче об изоморфизме двух плоскостей аффинного типа $\mathrm{A}^2(\mathbf{D})$ и $\mathrm{A}^2(\mathbf{D}')$. Последняя же решается следующим образом.

Теорема 15.2. *Две плоскости аффинного типа* $\mathrm{A}^2(\mathbf{D})$ и $\mathrm{A}^2(\mathbf{D}')$ *изоморфны тогда и только тогда, когда тела* $\mathbf{D}$ *и* $\mathbf{D}'$ *изоморфны.*

Доказательство. Если $\varphi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ изоморфизм тел, то простая проверка показывает, что отображение $\phi_\varphi : A^2(\mathbf{D}) \to A^2(\mathbf{D}')$, задаваемое формулой $\phi_\varphi(m,n) = (\varphi(m),\varphi(n))$, – изоморфизм плоскостей аффинного типа. Обратно, покажем, что любое тело $\mathbf{D}$ изоморфно естественным образом телу $D_{A^2(\mathbf{D})}$, которое строится по плоскости $\mathrm{A}^2(\mathbf{D})$ (см. § 13). Действительно, для каждого $d \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$, рассмотрим гомотетию

$$h_d :\ \mathrm{A}^2(\mathbf{D}) \to \mathrm{A}^2(\mathbf{D}),\ (m,n) \mapsto (md,nd). \tag{6}$$

Пусть $\overrightarrow{h_d}$ обозначает векторную часть гомотетии h_d. Теперь определим отображение $\varphi : \mathbf{D} \to D_{A^2(\mathbf{D})}$, положив $\varphi(d) = \vec{h}_d$ для $d \neq 0$ и $\varphi(0) = \theta$. Легко проверить, что $\varphi -$ морфизм тел, т.е. $\varphi(h_1 + h_2) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2)$ и $\varphi(h_1 h_2) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$ для любых $h_1, h_1 \in \mathbf{D}$. Пример 13.4 показывает, что любая гомотетия плоскости $\mathrm{A}^2(\mathbf{D})$ с центром в точке $O = (0,0)$ имеет вид (6), следовательно, векторная часть любой гомотетии равна $\overrightarrow{h_d}$ для некоторого $d \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$. Это означает, что отображение φ биективно, т.е. является изоморфизмом тел. ◄