§ 14. ПОДПРОСТРАНСТВА И ФАКТОРПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ, БАЗИСЫ, СУЖЕНИЕ СКАЛЯРОВ, ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, МОРФИЗМЫ

В дальнейшем нам потребуется знание некоторых свойств векторных пространств и отображений между ними.

Как и в случаях групп, тел, полей, где определяются понятия подгрупп, подтел, подполей, можно естественным образом определить понятие подпространства векторного пространства.

Определение 14.1. *Пусть* $\mathbf{D}$ – *тело,* $\mathbf{V}$ – *векторное пространство над* $\mathbf{D}$. *Непустое подмножество* $\mathbf{W}$ *векторного пространства* $\mathbf{V}$ *называется* ***подпространством*** $\mathbf{V}$, *если* $\mathbf{W}$ *само является векторным пространством над* $\mathbf{D}$ *при ограничении на* $\mathbf{W}$ *операций в* $\mathbf{V}$. *Другими словами,* $\mathbf{W}$ *– подпространство в* $\mathbf{V}$, *если выполняются условия:*

(i) $\forall\ \vec{a},\vec{b} \in \mathbf{W}$, $\forall\ \lambda \in \mathbf{D}$ $\quad \vec{a}+\vec{b} \in \mathbf{W}$ *и* $\lambda\vec{a} \in \mathbf{W}$;

(ii) *для множества* $\mathbf{W}$ *с операциями из* (i) *выполняются аксиомы* $\mathbf{V}_1$ – $\mathbf{V}_4$ *векторного пространства* (*определение* 13.5).

Упражнение 14.1. *Докажите, что при выполнении условия* (i) *второе условие* (ii) *выполняется.*

Таким образом, условие (i) является критерием того, что $\mathbf{W}$ является подпространством.

Упражнение 14.2. *Докажите, что условие* (i) *определения* 14.1. *эквивалентно следующему условию*: $\forall\ \vec{a},\vec{b} \in \mathbf{W}\ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{D}\ \ \alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \in \mathbf{W}$.

В любом векторном пространстве $\mathbf{V}$ имеются *тривиальные* подпространства: само $\mathbf{V}$ и нулевое подпространство $\{\vec{0}\}$.

Пример 14.1. Рассмотрим вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}$ и положим $\mathbf{D}\vec{a} = \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbf{D}\}$. Легко видеть, что $\mathbf{D}\vec{a}$ – подпространство $\mathbf{V}$.

Пример 14.2. Этот пример является обобщением предыдущего и, как будет показано ниже, исчерпывает примеры подпространств. Пусть

$$\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k \tag{1}$$

– конечное семейство (система) векторов пространства $\mathbf{V}$,

$$\lambda_1,...,\lambda_k \tag{2}$$

– семейство элементов тела $\mathbf{D}$. Вектор

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_k\vec{a}_k \tag{3}$$

называется ***линейной комбинацией*** системы векторов (1) с коэффициентами (2). Говорят также, что $\vec{a}$ ***линейно выражается*** через систему векторов (1). Линейная комбинация (3) называется ***тривиальной***, если все коэффициенты равны нулю: $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. Ясно, что тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.

Пусть S – непустое подмножество векторного пространства $\mathbf{V}$. Обозначим $L(S)$ множество всевозможных линейных комбинаций конечных систем векторов из S:

$$L(S) = \left\{ \lambda_1 \vec{a}_1 + ... + \lambda_k \vec{a}_k \mid k \in \mathbf{N},\ \lambda_i \in \mathbf{D},\ \vec{a}_i \in S \right\}.$$

Утверждение 14.1. (i) *Множество $L(S)$ является подпространством векторного пространства* $\mathbf{V}$;

(ii) *Любое подпространство $\mathbf{W}$ пространства $\mathbf{V}$ может быть задано в виде $\mathbf{W} = L(S)$ для некоторого $S \subset \mathbf{V}$.*

Доказательство. Проверим для $L(S)$ критерий подпространства. Если $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + ... + \lambda_k \vec{a}_k$, $\vec{b} = \mu_1 \vec{b}_1 + ... + \mu_m \vec{b}_m \in L(S)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + ... + \lambda_k \vec{a}_k + \mu_1 \vec{b}_1 + ... + \mu_m \vec{b}_m \in L(S),$$
$$\lambda \vec{a} = (\lambda\lambda_1)\vec{a}_1 + ... + (\lambda\lambda_k)\vec{a}_k \in L(S).$$

Второе утверждение предложения очевидно, поскольку в качестве S можно взять $\mathbf{W}$. ◄

Определение 14.2. *Подпространство $L(S)$ называется* ***линейной оболочкой*** *множества S или* ***подпространством****, порожденным S. Система векторов S называется* ***системой образующих*** *подпространства $L(S)$.*

В частности, системой образующих всего пространства $\mathbf{V}$ является любое подмножество $S \subset \mathbf{V}$ такое, что каждый вектор из $\mathbf{V}$ есть линейная комбинация некоторого конечного набора векторов из S.

Определение 14.3. *Пространство (подпространство) называется* ***конечномерным****, если оно обладает конечной системой образующих и* ***бесконечномерным*** *в противном случае (т.е. если любая система образующих пространства (подпространства) бесконечна).*

Простейшим примером конечномерного векторного пространства является, очевидно, нулевое пространство $\{\vec{0}\}$. Если S – конечная система векторов пространства $\mathbf{V}$, то линейная оболочка $L(S)$ является конечномерным подпространством пространства $\mathbf{V}$.

Пример 14.3. Пусть $\mathbf{D}$ – произвольное тело. Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим декартову степень $\mathbf{D^n}$ множества $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D^n} = \{(d_1, ..., d_n) \mid d_i \in \mathbf{D}, i \in \{1, ..., n\}\}.$$

В множестве $\mathbf{D^n}$ зададим операции сложения и умножения на скаляры:

$$(c_1, ..., c_n) + (d_1, ..., d_n) = (c_1 + d_1, ..., c_n + d_n),$$
$$d(c_1, ..., c_n) = (dc_1, ..., dc_n).$$

Легко видеть, что $\mathbf{D^n}$ – левое векторное пространство над $\mathbf{D}$ и что $\mathbf{D^n}$ конечномерно, поскольку обладает следующей конечной системой образующих:

$$\varepsilon_1 = (1,0,...,0),\ \varepsilon_2 = (0,1,0,...,0),\ \ldots,\ \varepsilon_n = (0,...,0,1).$$

Примером бесконечномерного векторного пространства может служить множество $\mathbf{D}_f^\infty$ всех бесконечных последовательностей элементов тела $\mathbf{D}$, для каждой из которых все члены последовательности, кроме конечного числа, равны нулю:

$$\mathbf{D}_f^\infty = \{(d_1, d_2, ...) \mid \exists\, n \in \mathbf{N}\ \ d_n = d_{n+1} = ... = 0\}.$$

Сложение и умножение на скаляры в множестве $\mathbf{D}_f^\infty$ зададим аналогично тому, как это сделано выше:

$$(c_1, c_2, ...) + (d_1, d_2, ...) = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, ...),$$
$$d(c_1, c_2, ...) = (dc_1, dc_2, ...).$$

Упражнение 14.3. *Докажите, что* $\mathbf{D}_f^\infty$ *– бесконечномерное левое векторное пространство над телом* $\mathbf{D}$.

Пусть $\mathbf{V}$ – ненулевое конечномерное векторное пространство. Рассмотрим подмножество натуральных чисел K, состоящее из тех $k \in \mathbf{N}$, для которых существует k-элементная система образующих пространства $\mathbf{V}$:

$$K = \{k \in \mathbf{N} \mid \vec{a}_1, ..., \vec{a}_k - \text{ система образующих пространства } \mathbf{V}\}.$$

По определению конечномерного пространства множество K не пусто и, следовательно, в K существует наименьшее число (см., например, [ ], теорема 4.5.3). Это число обозначим $\dim \mathbf{V}$ и назовем ***размерностью*** пространства $\mathbf{V}$. Итак, если $\mathbf{V}$ – конечномерно и $\mathbf{V} \neq \{\vec{0}\}$, то

$$\dim \mathbf{V} = \min\{k \in \mathbf{N} \mid \vec{a}_1, ..., \vec{a}_k - \text{система образующих пространства } \mathbf{V}\}.$$

Для нулевого векторного пространства $\{\vec{0}\}$ полагаем $\dim\{\vec{0}\} = 0$. Если $\dim \mathbf{V} = n,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, то говорят, что пространство $\mathbf{V}$ n***-мерно***.

Определение 14.4. *Упорядоченная* n*-элементная система образующих* $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ *ненулевого* n*-мерного пространства* $\mathbf{V}$ *называется* ***базисом*** *пространства* $\mathbf{V}$.

Замечание 1. Для нулевого векторного пространства $\{\vec{0}\}$ понятие базиса не определяется.

Следующая теорема выражает основное свойство размерности.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{V}$ – *конечномерное векторное пространство над телом* $\mathbf{D}$, $\dim \mathbf{V} = n$; $\mathbf{W}$ – *подпространство пространства* $\mathbf{V}$. *Тогда верны следующие утверждения:*

(i) $\mathbf{W}$ – *конечномерно и* $\dim \mathbf{W} \le \dim \mathbf{V}$;

(ii) $\dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{W} = \mathbf{V}$;

(iii) *для любого* $k \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, $0 \le k \le n$, *в пространстве* $\mathbf{V}$ *существует* k*-мерное подпространство.*

Доказательство. (i) Если $\mathbf{W} = \{\vec{0}\}$, то утверждение, очевидно, справедливо. Далее подпространство $\mathbf{W}$ ненулевое. Пусть $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – базис пространства $\mathbf{V}$, $(\vec{a}_i)_{i \in I}$ – система образующих подпространства $\mathbf{W}$. Можно считать, что среди векторов $\vec{a}_i, i \in I$, нет нулевых, поскольку, удалив их, мы снова получим систему образующих. По той же причине можно считать, что среди векторов $\vec{a}_i, i \in I$, нет повторяющихся. Зафиксируем индекс $i_1 \in I$ и рассмотрим вектор $\vec{a}_{i_1}$. По определению базиса существует представление этого вектора в виде $\vec{a}_{i_1} = \alpha_1 \vec{e}_1 + ... + \alpha_n \vec{e}_n$. Так как $\vec{a}_{i_1} \ne \vec{0}$, то хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i, i \in \{1, ..., n\}$, отличен от нуля. Пусть, для определенности, $\alpha_1 \ne 0$. Тогда, заменив в исходном базисе вектор $\vec{e}_1$ на вектор $\vec{a}_{i_1}$, т.е. рассмотрев набор $(\vec{a}_{i_1}, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, мы снова получим базис. Действительно, если представление произвольного вектора $\vec{a} \in \mathbf{V}$ в исходном базисе имеет вид $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + ... + \lambda_n \vec{e}_n$, то, как нетрудно проверить, верно также представление вида

$$\vec{a} = (\lambda_1 \alpha_1^{-1}) \vec{a}_{i_1} + (\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1^{-1} \alpha_2) \vec{e}_2 + ... + (\lambda_n - \lambda_1 \alpha_1^{-1} \alpha_n) \vec{e}_n.$$

Последнее означает, что $(\vec{a}_{i_1}, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ – система образующих пространства $\mathbf{V}$, т.е. базис $\mathbf{V}$. Далее попытаемся подобным образом заменить в новом базисе один из векторов $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ на вектор из семейства $(\vec{a}_i)_{i \in I \setminus \{i_1\}}$. Это возможно сделать, если в разложении какого-либо вектора $\vec{a}_i, i \in I \setminus \{i_1\}$, по базису $(\vec{a}_{i_1}, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ отличен от нуля один из коэффициентов при $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Получим еще один базис пространства $\mathbf{V}$, в котором уже два вектора исходного базиса будут заменены векторами из семейства образующих $(\vec{a}_i)_{i \in I}$ подпространства $\mathbf{W}$ и т. д. Этот процесс замены векторов исходного базиса пространства $\mathbf{V}$ на векторы системы образующих подпространства $\mathbf{W}$ либо приведет к тому, что мы получим базис пространства $\mathbf{V}$, составленный из векторов подпространства $\mathbf{W}$, либо на некотором k-том шаге, $1 < k < n$, нам не удастся провести замену. В первом случае, очевидно, что $\mathbf{W} = \mathbf{V}$, и утверждение (i) справедливо. Во втором случае все векторы системы образующих $(\vec{a}_i)_{i\in I}$ подпространства $\mathbf{W}$ линейно выражаются через k векторов $\vec{a}_{i_1}, ..., \vec{a}_{i_k}$ этой системы. Это означает, что $\vec{a}_{i_1}, ..., \vec{a}_{i_k}$ – система образующих подпространства $\mathbf{W}$, т.е. утверждение (i) справедливо и этом случае.

(ii) Необходимость. Пусть $\dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{V} = n$, $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – базис $\mathbf{V}$, $(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ – базис $\mathbf{W}$. Как и при доказательстве утверждения (i), будем изменять первый из этих базисов, заменяя последовательно векторы $\vec{e}_i$ на векторы $\vec{a}_i$. Заметим, что в рассматриваемом случае этот процесс замены можно провести до конца и получить в результате, что $(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ – базис $\mathbf{V}$. Действительно, если бы для некоторого $k \in \mathbf{N}$, $0 < k < n$, вектор $\vec{e}_{k+1}$ нельзя было бы заменить на вектор $\vec{a}_{k+1}$, то $\vec{a}_{k+1}$ представлялся бы в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k$. Это означало бы возможность уменьшить количество векторов в базисе пространства $\mathbf{W}$, что невозможно по определению базиса. Итак, базис $(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ подпространства $\mathbf{W}$ является базисом пространства $\mathbf{V}$, следовательно, $\mathbf{W} = \mathbf{V}$. Достаточность утверждения (ii) очевидна.

(iii) Пусть $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – базис $\mathbf{V}$. Для каждого $k \in \mathbf{N}$, $0 < k \le n$, рассмотрим подпространство $\mathbf{W}_k = L(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k)$. Система векторов $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k)$ является системой образующих подпространства $\mathbf{W}_k$, более того, базисом этого подпространства. Действительно, если бы существовала система образующих $(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m)$ подпространства $\mathbf{W}_k$, состоящая менее чем из k векторов $(m < k)$, то каждый из векторов $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$ линейно выражался бы через систему векторов $(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m)$. В таком случае, замена в базисе $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ векторов $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$ на векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$ дала бы систему образующих пространства $\mathbf{V}$, содержащую менее чем n векторов, что невозможно по определению базиса. Итак, $\dim \mathbf{W}_k = k$, пространство $\mathbf{V}$ содержит k- мерные подпространства. Нульмерное пространство $\{\vec{0}\}$ также, очевидно, является подпространством пространства $\mathbf{V}$. ◄

Замечание 14.2. Метод доказательства пункта (i) теоремы 1, использующий последовательную замену векторов базиса пространства $\mathbf{V}$ на векторы системы образующих подпространства $\mathbf{W}$, позволяет сделать важный вывод: *из любой системы образующих конечномерного ненулево-*

го векторного пространства $\mathbf{V}$ *можно выбрать базис этого пространства.*

Утверждение 14.2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– дезаргова плоскость,* $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ *– множество векторов плоскости* $\mathcal{A}$*, рассматриваемое как векторное пространство над телом* $D_{\mathcal{A}}$ *(см.* § 13). *Тогда*

(i) $\dim \mathbf{V}(\mathcal{A}) = 2$;

(ii) *пара* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *– базис пространства* $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ *– ненулевые векторы двух различных направления плоскости* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть π_1 и π_2 – два различных направления плоскости $\mathcal{A}$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ненулевые векторы направлений π_1 и π_2 соответственно. Тогда $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – система образующих векторного пространства $\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Действительно, если $\vec{a}$ – произвольный вектор пространства $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, то, согласно утверждению 7.2, он единственным образом представляется в виде

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad \vec{a}_1 \in \mathbf{V}(\pi_1), \ \vec{a}_1 \in \mathbf{V}(\pi_2).$$

Далее, используя утверждение 10.2, можно утверждать, что для каждого из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ существует единственный элемент $x_i \in D_{\mathcal{A}}, i \in \{1,2\}$ такой, что $\vec{a}_i = x_i\vec{e}_i$. Итак, вектор $\vec{a}$ представляется в виде:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2,$$

т.е. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – действительно система образующих векторного пространства $\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Эту систему образующих нельзя уменьшить, поскольку множество $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ не сводится к векторам какого-либо одного направления. Следовательно, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – базис пространства $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, поэтому $\dim \mathbf{V}(\mathcal{A}) = 2$. Если теперь $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – какой-либо базис пространства $\mathbf{V}(\mathcal{A})$, то векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, очевидно, являются ненулевыми векторами двух различных направлений в плоскости $\mathcal{A}$. ◄

Упражнение 14.7. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– дезаргова плоскость,* π *– направление в плоскости* $\mathcal{A}$*. Докажите, что векторное пространство* $\mathbf{V}(\pi)$ *одномерно.*

Помимо рассмотренного, существует другой способ определения базиса векторного пространства, применимый не только для конечномерных пространств, но и в бесконечномерном случае. Он основан на понятиях линейной зависимости и независимости векторов.

Определение 14.5. *Конечная система векторов*

$$\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k \tag{4}$$

векторного пространства $\mathbf{V}$ *над телом* $\mathbf{D}$ *называется* ***линейно зависимой***, *если существует нетривиальная линейная комбинация системы* (4), *равная нулевому вектору. Система векторов* (4), *не являющаяся линейно зависимой, называется* ***линейно независимой***.

Более подробно, определение 14.5 означает следующее.

Система векторов (4) *линейно зависима*, если существуют скаляры $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{D}$, среди которых есть ненулевые, такие, что $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}$.

Система векторов (4) *линейно независима*, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, т.е. из равенства $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}$ следует, что $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.

Упражнение 14.8. *Докажите, что система образующих* $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ *векторного пространства* $\mathbf{D^n}$ (*пример* 14.3) *линейно независима.*

Утверждение 14.3. (i) *Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой;*

(ii) *конечная система векторов, состоящая более чем из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы линейно выражается через другие.*

Доказательство. (i) Равенство $1\vec{0} = \vec{0}$ показывает, что система, состоящая из нулевого вектора, линейно зависима. Обратно, если $\vec{a}$ – некоторый вектор, $\lambda\vec{a}$ – нетривиальная линейная комбинация (т.е. $\lambda \neq 0$) и $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, то, умножая обе части последнего равенства на λ^{-1}, получаем, что $(\lambda^{-1}\lambda)\vec{a} = \lambda^{-1}\vec{0}$ или $\vec{a} = \vec{0}$.

(ii) Пусть (4) – линейно зависимая система и $k \geq 2$. Тогда существуют скаляры $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{D}$, среди которых есть ненулевые, такие, что $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}$. Если, например, $\lambda_k \neq 0$, то вектор $\vec{a}_k$ линейно выражается через другие: $\vec{a}_k = (-\lambda_k^{-1}\lambda_1)\vec{a}_1 + ... + (-\lambda_k^{-1}\lambda_{k-1})\vec{a}_{k-1}$. Обратно, пусть один из векторов системы (4) линейно выражается через другие, например, $\vec{a}_k = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_{k-1}\vec{a}_{k-1}$. Тогда $(-\lambda_1)\vec{a}_1 + ... + (-\lambda_{k-1})\vec{a}_{k-1} + 1\vec{a}_k$ – нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. Следовательно, система (4) линейно зависима.◄

Утверждение 14.4. *Пусть* $\mathbf{V}$ – *конечномерное векторное пространство. Система векторов* $S=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ – *базис пространства* $\mathbf{V}$ *тогда и только тогда, когда* S *линейно независимая система образующих пространства* $\mathbf{V}$.

Доказательство. Пусть $S=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ – базис пространства $\mathbf{V}$. Тогда, по определению, S – система образующих пространства $\mathbf{V}$. Докажем, что S – линейно независимая система. Пусть для $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbf{D}$ верно равенство: $\lambda_1\vec{e}_1+...+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}$. Допустим, что какой-то из коэффициентов λ_i отличен от нуля, например, $\lambda_n\neq 0$. Тогда вектор $\vec{e}_n$ линейно выражается через остальные векторы базиса: $\vec{e}_n=(-\lambda_n^{-1}\lambda_1)\vec{e}_1+...+(-\lambda_n^{-1}\lambda_{n-1})\vec{e}_{n-1}$, что позволяет удалить его и получить систему образующих пространства $\mathbf{V}$, состоящую из $n-1$ векторов. Это противоречит определению базиса, следовательно, наше допущение неверно, $\lambda_1=...=\lambda_n=0$, т.е. S – линейно независимая система.

Обратно, пусть $S=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ – линейно независимая система образующих пространства $\mathbf{V}$. Тогда из системы S можно выбрать базис пространства $\mathbf{V}$ (замечание 14.2). Допустим, что этот базис не содержит какой-либо вектор из системы S, например, вектор $\vec{e}_n$. Тогда $\vec{e}_n$ линейно выражается через другие векторы системы S, следовательно (утверждение 14.2), S – линейно зависимая система. Получили противоречие со сделанным допущением, значит, S – базис пространства $\mathbf{V}$. ◄

Пусть $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ – базис пространства $\mathbf{V}$ над телом $\mathbf{D}$, $\vec{a}\in\mathbf{V}$. Тогда, поскольку базис является системой образующих, то существуют скаляры $x_1,...,x_n\in\mathbf{D}$ такие, что

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+...+x_n\vec{e}_n. \tag{5}$$

Элементы $x_1,...,x_n$ из равенства (5) называются ***координатами*** вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$. Из свойства линейной независимости базиса вытекает, что система координат $(x_1,...,x_n)$ вектора $\vec{a}$ в данном базисе определяется однозначно. Действительно, если наряду с (5) верно равенство $\vec{a}=x_1'\vec{e}_1+...+x_n'\vec{e}_n$, то, приравнивая правые части этих равенств, получаем, что $x_1\vec{e}_1+...+x_n\vec{e}_n$ = $x_1'\vec{e}_1+...+x_n'\vec{e}_n$ или $(x_1-x_1')\vec{e}_1+...+(x_n-x_n')\vec{e}_n=\vec{0}$. Так как векторы базиса линейно независимы, то из последнего равенства следует, что (x_1-x_1') = … = (x_n-x_n') = 0 или $x_1=x_1',...,x_n=x_n'$.

Определение 14.6. *Бесконечная система векторов называется* ***линейно независимой****, если всякая ее конечная подсистема линейно независима и* ***линейно зависимой*** *в противном случае, т.е., если какая-либо ее конечная подсистема линейно зависима.*

Упражнение 14.9. *Докажите следующие утверждения:*

(i) *система, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима;*

(ii) *любая подсистема линейно независимой подсистемы линейно независима.*

Пусть $\mathbf{V}-$ ненулевое векторное пространство. Если $S-$произвольная линейно независимая система векторов пространства $\mathbf{V}$, то в S, очевидно, нет повторяющихся векторов, т.е. $S-$ подмножество $\mathbf{V}$. Рассмотрим множество $\Sigma(\mathbf{V})$ всех линейно независимых систем векторов пространства $\mathbf{V}$. В множестве $\Sigma(\mathbf{V})$ можно рассмотреть отношение включения, являющееся отношением (частичного) порядка.

Утверждение 14.5. *Если* $\mathbf{V}-$ *конечномерное векторное пространство размерности* $n>0$, *то множество максимальных по включению элементов множества* $\Sigma(\mathbf{V})$ *совпадает с множеством базисов пространства* $\mathbf{V}$.

Доказательство. Каждый базис $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ пространства $\mathbf{V}$ является максимальным элементом множества $\Sigma(\mathbf{V})$. Действительно, поскольку любой вектор $\vec{a}\in\mathbf{V}$ линейно выражается через векторы базиса, то добавление хотя бы одного вектора к системе $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ превращает ее в линейно зависимую систему. Обратно, пусть $S-$максимальная по включению линейно независимая система векторов пространства $\mathbf{V}$. Тогда, поскольку добавление любого вектора к системе S превращает ее в линейно зависимую систему, то $S-$ система образующих пространства $\mathbf{V}$. С другой стороны, при удалении любого вектора из системы S она перестает быть системой образующих пространства $\mathbf{V}$, так как удаленный вектор не выражается линейно через оставшиеся. Итак, $S-$ система образующих пространства $\mathbf{V}$, которую нельзя уменьшить, значит, с учетом замечания 14.2, $S-$ базис пространства $\mathbf{V}$. ◄

Предыдущее утверждение является основанием следующего определения.

Определение 14.6. ***Базисом*** *векторного пространства* $\mathbf{V}$ *называется максимальная по включению линейно независимая система векторов пространства* $\mathbf{V}$.

Для конечномерного векторного пространства это определение, с учетом утверждения 14.4, эквивалентно данному ранее определению базиса (определение 14.4). Для бесконечномерного векторного пространства возникает проблема существования базиса, которая решается положительно.

Теорема 2. *Всякое векторное пространство* $\mathbf{V}$ *над телом* $\mathbf{D}$ *обладает базисом. Любые два базиса векторного пространства равномощны.*

Мы не будем доказывать это утверждение. Доказательство основано на формулируемой в теории множеств аксиоме выбора, его можно найти, например, в книгах [ ] и [ ].

Часто бывает полезной конструкция *факторпространства* векторного пространства. Пусть $\mathbf{V}$ – векторное пространство над телом $\mathbf{D}$, $\mathbf{W}$ – подпространство пространства $\mathbf{V}$. Рассмотрим бинарное отношение $\sim_{\mathbf{W}}$ на множестве $\mathbf{V}$:

$$\forall \vec{a},\vec{b} \in \mathbf{V} \quad \vec{a} \sim_{\mathbf{W}} \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}-\vec{b} \in \mathbf{W}.$$

Упражнение 14.4. *Докажите, что* $\sim_{\mathbf{W}}$ *– отношение эквивалентности на множестве* $\mathbf{V}$ (*т.е. что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно*).

Пусть $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ – фактормножество $\mathbf{V}$ по отношению эквивалентности $\sim_{\mathbf{W}}$. Для всякого $\vec{a} \in \mathbf{V}$ символом $\overline{a}$ обозначим его класс эквивалентности. Определим два отображения:

$$\varphi:\ \mathbf{V}/\mathbf{W} \times \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{V}/\mathbf{W}, (\overline{a},\overline{b}) \mapsto \overline{a+b},$$

$$\psi:\ \mathbf{D} \times \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{V}/\mathbf{W}, (\lambda,\overline{a}) \mapsto \overline{\lambda a}.$$

Упражнение 14.5. (i) *Убедитесь в корректности задания отображений* φ *и* ψ;

(ii) *докажите, что если отображение* φ *считать суммой, а* ψ *– умножением на скаляры, то относительно этих операций множество* $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ *является векторным пространством над телом* $\mathbf{D}$.

Определенное таким образом векторное пространство называется ***факторпространством*** векторного пространства $\mathbf{V}$ по подпространству $\mathbf{W}$, а его размерность – ***коразмерностью*** подпространства $\mathbf{W}$ в $\mathbf{V}$ (обозначение коразмерности – $\operatorname{codim}\mathbf{W}$.

Упражнение 14.6. *Пусть* $\mathbf{V}$ *–* n *-мерное векторное пространство,* $\mathbf{W}$ *–* k *-мерное подпространство в* $\mathbf{V}$. *Тогда* $\operatorname{codim}\mathbf{W} = n-k$.

Для формулировки и доказательства основной теоремы аффинной планиметрии (§) нам потребуется понятие *сужение скаляров.*

Если $\mathbf{V}$ – векторное пространство над телом $\mathbf{D}$ и $\mathbf{T}$ – подтело тела $\mathbf{D}$, то $\mathbf{V}$ можно также рассматривать как векторное пространством над $\mathbf{T}$. Действительно, пусть

$$s:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V},(\vec{a},\vec{b})\mapsto\vec{a}+\vec{b} \quad \text{и} \quad m:\mathbf{D}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V},(\lambda,\vec{a})\mapsto\lambda\vec{a} -$$

операции сложения векторов и умножения векторов на элементы тела $\mathbf{D}$, задающие структуру векторного пространства в $\mathbf{V}$. Сохраним операцию сложения s и зададим умножение m' векторов на элементы тела $\mathbf{T}$ как ограничение отображения m на $\mathbf{T}\times\mathbf{V}$:

$$m':\mathbf{T}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V},(\alpha,\vec{a})\mapsto\alpha\vec{a}.$$

Легко видеть, что множество $\mathbf{V}$ с операциями s и m' является векторным пространством над телом $\mathbf{T}$. Это векторное пространство обозначим $\mathbf{V}_\mathbf{T}$; переход от пространства $\mathbf{V}$ к $\mathbf{V}_\mathbf{T}$ называется ***сужением скаляров*** с $\mathbf{D}$ до $\mathbf{T}$.

✓ **<u>Пример 14.1</u>**. Любое тело $\mathbf{D}$ является одномерным векторным пространством над $\mathbf{D}$ (пример 14.3), При этом сложение и умножение в теле $\mathbf{D}$ играет роль операций соответственно сложения векторов и умножения векторов на скаляры. Если $\mathbf{T}$ – подтело тела $\mathbf{D}$, то сужение скаляров с $\mathbf{D}$ до $\mathbf{T}$ превращает $\mathbf{D}$ в векторное пространство $\mathbf{D}_\mathbf{T}$ над $\mathbf{T}$.

✓**<u>Пример 14.2</u>**. (*овеществление комплексных векторных пространств*). ***Комплексным векторным пространством*** называется произвольное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Сужение скаляров с $\mathbf{C}$ до $\mathbf{R}$ называется ***овеществлением*** комплексного пространства. Овеществление позволяет любое векторное пространство над $\mathbf{C}$ считать одновременно вещественным (т.е. над $\mathbf{R}$) пространством. В следующей лемме устанавливается соотношение между размерностями комплексного пространства и его овеществлением.

<u>Лемма 14.1.</u> *Пусть* $\mathbf{V}-$ n*-мерное комплексное векторное пространство. Тогда размерность овеществления* $\mathbf{V}_\mathbf{R}$ *пространства* $\mathbf{V}$ *равна* $2n$.

Доказательство. Пусть $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)-$ базис пространства $\mathbf{V}$ и $i\in\mathbf{C}-$ мнимая единица, т.е. $i^2=-1$. Тогда $B=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n,i\vec{e}_1,...,i\vec{e}_n)-$ базис пространства $\mathbf{V}_\mathbf{R}$. В самом деле, ясно, что B – система образующих пространства $\mathbf{V}_\mathbf{R}$. Покажем, что система B линейно независима. Пусть $\alpha_1\vec{e}_1+...\alpha_n\vec{e}_n+\beta_1(i\vec{e}_1)+...\beta_n(i\vec{e}_n)=\vec{0}$ для некоторых $\alpha_1,...\alpha_n,\beta_1,...\beta_n\in\mathbf{C}$. Тогда $(\alpha_1+i\beta_1)\vec{e}_1+...+(\alpha_n+i\beta_n)\vec{e}_n=\vec{0}$. Так как $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)-$ линейно независимая система векторов комплексного векторного пространства $\mathbf{V}$, то $\alpha_1+i\beta_1=...=\alpha_n+i\beta_n=0$, т.е. $\alpha_1=...=\alpha_n=\beta_1=...=\beta_n=0$. ◄

В качестве обобщения этой леммы читателю предлагается доказать следующее утверждение.

Упражнениение 14.1. *Пусть* $\mathbf{V}-n$*-мерное векторное пространство над телом* $\mathbf{D}$ *и* $\mathbf{T}-$ *подтело тела* $\mathbf{D}$ *такое, что* $\dim \mathbf{D}_\mathbf{T}=k$. *Тогда* $\mathbf{V}_\mathbf{T}-$*конечномерное векторное пространство над телом* $\mathbf{T}$ *и* $\dim \mathbf{V}_\mathbf{T}=kn$. (*Указание: если* $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)-$ *базис пространства* $\mathbf{V}$ *и* $(\alpha_1,...,\alpha_k)-$ *базис пространства* $\mathbf{D}_\mathbf{T}$, *то* $(\alpha_i\vec{e}_j)_{1\le i\le n;\,1\le j\le k}-$ *базис пространства* $\mathbf{V}_\mathbf{T}$).

Как и в случае плоскостей, для изучения векторных пространств привлекаются их морфизмы. Если мы рассматриваем два векторных пространства: $\mathbf{V}_1$ над телом $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{V}_2$ над телом $\mathbf{D}_2$, то по определению векторного пространства, мы имеем следующую четверку отображений:

$\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_1\xrightarrow{s_1}\mathbf{V}_1,\ (\vec{a},\vec{b})\mapsto\vec{a}+\vec{b}$ – отображение сложения в $\mathbf{V}_1$;

$\mathbf{D}_1\times\mathbf{V}_1\xrightarrow{m_1}\mathbf{V}_1,\ (\lambda,\vec{a})\mapsto\lambda\vec{a}$ – отображение умножения векторов на скаляры в $\mathbf{V}_1$;

$\mathbf{V}_2\times\mathbf{V}_2\xrightarrow{s_2}\mathbf{V}_2,\ (\vec{a}',\vec{b}')\mapsto\vec{a}'+\vec{b}'$ – отображение сложения в $\mathbf{V}_2$;

$\mathbf{D}_2\times\mathbf{V}_2\xrightarrow{m_2}\mathbf{V}_2,\ (\lambda',\vec{a}')\mapsto\lambda'\vec{a}'$ – отображение умножения векторов на скаляры в $\mathbf{V}_2$.

В определении морфизма векторных пространств, как и в предыдущих аналогичных ситуациях, естественным условием является сохранение (после его применения) информации, заложенной в определении векторного пространства. Поэтому, прежде всего, должно существовать отображение $f:\mathbf{V}_1\to\mathbf{V}_2$, сохраняющее информацию о $\mathbf{V}_1$ как о группе. Иными словами, f должно быть морфизмом групп. Кроме того, поскольку при переходе от $\mathbf{V}_1$ к $\mathbf{V}_2$ изменяется область скаляров, то должно существовать отображение $\sigma:\mathbf{D}_1\to\mathbf{D}_2$, сохраняющее информацию о $\mathbf{D}_1$ как о теле. Иными словами, σ должно быть морфизмом тел. И, наконец, четверка отображений s_1,s_1,m_1,m_2, упомянутых выше, должна быть включена в следующие две коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_1 & \xrightarrow{s_1} & \mathbf{V}_1 \\ \downarrow f\times f & & \downarrow f \\ \mathbf{V}_2\times\mathbf{V}_2 & \xrightarrow{s_2} & \mathbf{V}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{D}_1\times\mathbf{V}_1 & \xrightarrow{m_1} & \mathbf{V}_1 \\ \downarrow \sigma\times f & & \downarrow f \\ \mathbf{D}_2\times\mathbf{V}_2 & \xrightarrow{m_2} & \mathbf{V}_2. \end{array} \qquad (*)$$

Коммутативность первой из них означает то, что $f:\mathbf{V}_1\to\mathbf{V}_2$ является морфизмом групп. Коммутативность второй – то, что при отображении f сохраняется информации об умножении векторов на скаляры.

Таким образом, определение морфизма векторных пространств может быть дано следующим образом.

Определение 14.8. Морфизмом *векторного пространства* $\mathbf{V}_1$ *над телом* $\mathbf{D}_1$ *в векторное пространство* $\mathbf{V}_2$ *над телом* $\mathbf{D}_2$ *называется упорядоченная пара* (f,σ) *отображений* $f:\mathbf{V}_1\to\mathbf{V}_2$, $\sigma:\mathbf{D}_1\to\mathbf{D}_2$, *где* $f-$ *морфизм групп,* $\sigma-$ *морфизм тел, такая, что диаграммы* $(*)$ *коммутативны.*

Морфизм (f,σ) *пространства* $\mathbf{V}_1$ *в пространство* $\mathbf{V}_2$ *называется* ***полулинейным морфизмом****, если* $\sigma:\mathbf{D}_1\to\mathbf{D}_2$ *– изоморфизм тел.*

Если $\mathbf{V}_1$ *и* $\mathbf{V}_2$ *– векторные пространства над одним и тем же телом* $\mathbf{D}$ *и* $\sigma=\mathbf{Id}_\mathbf{D}$, то *морфизм* $(f,\mathbf{Id}_\mathbf{D})$ *называется* ***линейным морфизмом*** (***линейным отображением****, а также* ***линейным оператором***).

Пример 14.4. Пусть $\mathbf{V}_1=\mathbf{R}^2-$ векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}_2=\mathbf{C}^2-$ векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ (см. пример 14.3). Очевидно, что естественное вложение $i:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$, $\lambda\mapsto\lambda$ является морфизмом полей. Рассмотрим отображение

$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}^2,\ (x,y)\mapsto(i(x),i(y)).$$

Легко видеть, что пара $(f,i)-$ морфизм векторных пространств.

Для любого векторного пространства $\mathbf{V}$ над телом $\mathbf{D}$ тривиальным примером морфизма является, очевидно, пара $(\mathbf{Id}_\mathbf{V},\mathbf{Id}_\mathbf{D})$.

Еще один простой пример морфизма дает пара $(0,\sigma)$. Здесь 0 – постоянное отображение, переводящее пространство $\mathbf{V}_1$ в нулевой вектор пространства $\mathbf{V}_2$, а $\sigma:\mathbf{D}_1\to\mathbf{D}_2-$ любой морфизм тел. Следующее утверждение показывает, что ситуация иная в случае непостоянного отображения f, а именно, морфизм σ не может быть произвольным, он однозначно определяется отображением f.

Утверждение 14.6. *Если* (f,σ_1) *и* (f,σ_2) *– морфизмы векторного пространства* $\mathbf{V}_1$ *над телом* $\mathbf{D}_1$ *в векторное пространство* $\mathbf{V}_2$ *над телом* $\mathbf{D}_2$ *и отображение* f *не постоянно, то* $\sigma_1=\sigma_2$.

Доказательство. Поскольку отображение f не постоянно, то существует вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}_1$ такой, что $f(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbf{D}_1$ имеем:

$$f(\lambda\vec{a}) = \sigma_1(\lambda) f(\vec{a}) \text{ и } f(\lambda\vec{a}) = \sigma_2(\lambda) f(\vec{a}).$$

Поскольку $f(\vec{a}) \neq \vec{0}$, то $\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda)$, т.е. $\sigma_1 = \sigma_2$. ◄

Обратимся еще раз к диаграммам $(*)$. Условия того, что первая и вторая диаграммы из $(*)$ коммутативны, можно записать соответственно в виде:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}_1 \quad f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \text{ и} \tag{6}$$

$$\forall \vec{a} \in \mathbf{V}_1 \ \forall \lambda \in \mathbf{D}_1 \quad f(\lambda\vec{a}) = \sigma(\lambda) f(\vec{a}). \tag{7}$$

Учитывая также утверждение 14. 5, определение морфизма векторных пространств можно сформулировать немного иначе.

Определение 14.8'. *Пусть* $\mathbf{V}_1$ *и* $\mathbf{V}_2$ *– векторные пространства соответственно над телами* $\mathbf{D}_1$ *и* $\mathbf{D}_2$. *Отображение* $f : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ *называется* ***морфизмом*** *векторного пространства* $\mathbf{V}_1$ *в векторное пространство* $\mathbf{V}_2$, *если существует морфизм тел* $\sigma : \mathbf{D}_1 \to \mathbf{D}_2$ *такой, что выполняются условия* (6) *и* (7).

В частности, если $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ – векторные пространства над одним и тем же телом $\mathbf{D}$, то отображение $f : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ является *линейным*, если для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}_1$ и $\lambda \in \mathbf{D}$ верны равенства:

$$f\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = f\left(\vec{a}\right) + f\left(\vec{b}\right), \quad f\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda f\left(\vec{a}\right).$$

Пусть $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ – векторные пространства соответственно над телами $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ и (f, σ) – морфизм $\mathbf{V}_1$ в $\mathbf{V}_2$, (g, μ) – морфизм $\mathbf{V}_2$ в $\mathbf{V}_3$. Тогда $gf : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_3$ – морфизм групп и для любых $\vec{a} \in \mathbf{V}_1, \lambda \in \mathbf{D}_1$ верно равенство

$$(gf)(\lambda\vec{a}) = g(\sigma(\lambda) f(\vec{a})) = (\mu\sigma)((gf)(\vec{a}).$$

Таким образом, $(gf, \mu\sigma)$ является морфизмом $\mathbf{V}_1$ в $\mathbf{V}_3$. Коротко можно сказать, что композиция морфизмов векторных пространств есть морфизм.

Определение 14.9. Изоморфизмом (***коллинеацией***) *векторного пространства* $\mathbf{V}_1$ *над телом* $\mathbf{D}_1$ *на векторное пространство* $\mathbf{V}_2$ *над телом* $\mathbf{D}_2$ *называется морфизм* (f, σ) $\mathbf{V}_1$ *в* $\mathbf{V}_2$ *такой, что отображения* $f : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ *и* $\sigma : \mathbf{D}_1 \to \mathbf{D}_2$ *биективны.*

Векторное пространство $\mathbf{V}_1$ *называется* ***изоморфным*** *векторному пространству* $\mathbf{V}_2$, *если существует изоморфизм* $\mathbf{V}_1$ *на* $\mathbf{V}_2$.

Изоморфизм векторного пространства $\mathbf{V}$ *на себя называется* ***автоморфизмом*** *пространства* $\mathbf{V}$.

Пример 14.4. Пусть $\mathbf{D}$ – тело, $\mathbf{V}$ – векторное пространство над телом $\mathbf{D}$. Зафиксируем элемент $d \in \mathbf{D}$ и рассмотрим отображение

$$h_d : \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ \vec{a} \mapsto d\vec{a}, \tag{8}$$

называемое ***гомотетией*** векторного пространства $\mathbf{V}$ с коэффициентом d. Если $d = 0$, то h_d – нулевой морфизм пространства $\mathbf{V}$.

Если $d \neq 0$, то, как нетрудно проверить, гомотетия h_d является полулинейным морфизмом пространства $\mathbf{V}$ относительно внутреннего автоморфизма $i_d : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, $x \mapsto dxd^{-1}$ тела $\mathbf{D}$. Поскольку $(h_d)^{-1} = h_{d^{-1}}$, т.е. h_d – биективное отображение, то в этом случае гомотетия является автоморфизмом (коллинеацией) пространства $\mathbf{V}$.

В случае, когда $\mathbf{D}$ – поле, любой внутренний автоморфизм i_d является тождественным отображением поля $\mathbf{D}$ и, следовательно, гомотетия (8) – линейное отображение.

Утверждение 14.7. *Пусть* $\mathbf{V}_1$ *и* $\mathbf{V}_2$ *– векторные пространства над телами* $\mathbf{D}_1$ *и* $\mathbf{D}_2$ *соответственно,* (f, σ) *– изоморфизм* $\mathbf{V}_1$ *на* $\mathbf{V}_2$. *Тогда* (f^{-1}, σ^{-1}) *– изоморфизм векторного пространства* $\mathbf{V}_2$ *на векторное пространство* $\mathbf{V}_1$.

Доказательство. Отображения f^{-1} и σ^{-1}, очевидно, биективны. Покажем, что для них выполняются условия (6) и (7). Пусть $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ – произвольные векторы пространства $\mathbf{V}_2$ и $\vec{a} = f^{-1}(\vec{a}')$, $\vec{b} = f^{-1}(\vec{b}')$. В силу линейности отображения f имеем:

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = f(f^{-1}(\vec{a}')) + f(f^{-1}(\vec{b}')) = \vec{a}' + \vec{b}',$$

т.е. $f^{-1}(\vec{a}' + \vec{b}') = f^{-1}(\vec{a}') + f^{-1}(\vec{b}')$. Аналогично для любого $\lambda' \in \mathbf{D}_2$ имеем:

$$f((\sigma^{-1}(\lambda'))\vec{a}) = \sigma(\sigma^{-1}(\lambda'))f(\vec{a}) = \lambda'\vec{a}',$$

т.е. $f^{-1}(\lambda'\vec{a}') = \sigma^{-1}(\lambda')f^{-1}(\vec{a}')$. ◄

Упражнение 14.10. *Докажите, что для любого морфизма* $f : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ *множества*

$$\mathrm{Ker} f = \left\{\vec{a} \in \mathbf{V}_1 \,\middle|\, f(\vec{a}) = \vec{0}\right\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Im} f = \left\{f(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{a} \in V_1\right\}$$

являются подпространствами соответственно пространств $\mathbf{V}_1$ *и* $\mathbf{V}_2$. $\mathrm{Ker} f$ *и* $\mathrm{Im} f$ *называется* ***ядром*** *и* ***образом*** *отображения f.*

Пусть $\mathbf{V}$ – векторное пространство над телом $\mathbf{D}$. Рассмотрим два множества отображений пространства $\mathbf{V}$ на себя:

$GL(\mathbf{V})-$ множество линейных автоморфизмов $\mathbf{V}$, $GSL(\mathbf{V})-$ множество полулинейных автоморфизмов (коллинеаций) $\mathbf{V}$.

Утверждение 14.8. $GSL(\mathbf{V})-$ *группа относительно композиции отображений и* $GL(\mathbf{V})-$ *подгруппа группы* $GSL(\mathbf{V})$.

Доказательство. Поскольку $GSL(\mathbf{V})-$ подмножество группы $B(\mathbf{V})$ всех биективных преобразований множества $\mathbf{V}$, то для доказательства того, что $GSL(\mathbf{V})-$ группа, достаточно показать, что множество $GSL(\mathbf{V})$ замкнуто относительно композиции отображений и операции взятия обратного отображения.

Пусть $f, g \in GSL(\mathbf{V})$, причем, f и g – полулинейные отображения соответственно относительно автоморфизмов σ и μ тела $\mathbf{D}$. Тогда, как отмечено выше, fg – полулинейный биективный морфизм $\mathbf{V}$ в $\mathbf{V}$ относительно автоморфизма $\sigma\,\mu$ тела $\mathbf{D}$, т.е. $fg \in GSL(\mathbf{V})$.

Пусть $f-$ коллинеация пространства $\mathbf{V}$ относительно автоморфизма σ тела $\mathbf{D}$. Тогда (утверждение 14.6) $f^{-1}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}-$ также коллинеация пространства $\mathbf{V}$.

Проведенные выше рассуждения остаются верными, если отображения f и g считать линейными, т.е. полагать, что $\sigma = \mu = \mathbf{Id}_{\mathbf{D}}$. Учитывая, что каждое линейное отображение является полулинейным, т.е. $GL(\mathbf{V}) \subset GSL(\mathbf{V})$, получаем, что $GL(\mathbf{V})-$ подгруппа группы $GSL(\mathbf{V})$. ◄

Оказывается, что изучение группы $GSL(\mathbf{V})$ сводится к изучению группы $GL(\mathbf{V})$ и группы, тесно связанной с группой автоморфизмов тела $\mathbf{D}$ (точнее ей антиизоморфной). Для простоты мы ограничимся случаем конечномерного пространства $\mathbf{V}$. В этом случае, выбрав базис $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ пространства $\mathbf{V}$, зададим для каждого автоморфизма σ тела $\mathbf{D}$ отображение $u_\sigma : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ формулой:

$$u_\sigma(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^{-1}(\lambda_i)\vec{e}_i.$$

Несложная проверка показывает, что u_σ – коллинеация $\mathbf{V}$ относительно σ^{-1}. Ясно, что множество $\{u_\sigma\}, \sigma \in Aut(\mathbf{D})-$ подгруппа в $GSL(\mathbf{V})$. Заметим далее, что отображение $\varphi: Aut(\mathbf{D}) \to GSL(\mathbf{V}), \sigma \mapsto u_\sigma$ удовлетворяет следующему условию:

$$\varphi(\sigma\mu) = \varphi(\sigma)\varphi(\mu).$$

Таким образом, группы $Aut(\mathbf{D})$ и $\{u_\sigma\}, \sigma \in Aut(\mathbf{D})$ изоморфны. В предыдущих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Всякая коллинеация $g \in GSL(\mathbf{V})$ относительно σ может быть однозначно представлена в виде $g = u_{\sigma^{-1}} f$, где $f \in GL(\mathbf{V})$ (либо в виде $g = hu_{\sigma^{-1}}$, $h \in GL(\mathbf{V})$).*

Доказательство. Пусть g – коллинеация относительно σ. Рассмотрим отображение $u_\sigma g$. Из утверждения 14.5 вытекает, что $u_\sigma g$ – коллинеация пространства $\mathbf{V}$ относительно отображения $\sigma^{-1}\sigma = \mathbf{Id_D}$, т.е. $f = u_\sigma g$ – линейный автоморфизм $\mathbf{V}$. Учитывая, что $u_\sigma^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$, получаем: $g = u_{\sigma^{-1}} f$.

Если $g = u_{\sigma^{-1}} f'$, то, ввиду биективности отображений, входящих в два последних равенства, заключаем, что $f' = f$. Аналогично устанавливается существование разложения $g = hu_{\sigma^{-1}}$. ◄

Если тело $\mathbf{D}$ не имеет иных автоморфизмов, кроме тождественного, т.е. $Aut(\mathbf{D}) = \{\mathbf{Id_D}\}$, то любое полулинейное отображение является линейным, т.е. можно ограничиться рассмотрением линейных отображений векторного пространства $\mathbf{V}$. Такова ситуация в случаях, когда $\mathbf{D}$ является полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ или полем вещественных чисел $\mathbf{R}$. Рассмотрим их последовательно.

Лемма 1. *Если φ – автоморфизм поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, то $\varphi = \mathbf{Id_Q}$.*

Доказательство. Выше уже отмечалось (замечание 13.2), что любой морфизм тел нуль переводит в нуль и единицу переводит в единицу, т.е. $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Следовательно, для любого $n \in \mathbf{N}$

$$\varphi(n) = \varphi(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\ раз}) = \underbrace{\varphi(1) + \ldots + \varphi(1)}_{n\ раз} = n\varphi(1) = n.$$

Поскольку $0 = \varphi(0) = \varphi(1 + (-1)) = 1 + \varphi(-1)$, то $\varphi(-1) = -1$. Откуда для любого $n \in \mathbf{N}$

$$\varphi(-n) = \varphi((-1)n) = \varphi(-1)\varphi(n) = (-1)n = -n.$$

Таким образом, $\varphi|_\mathbf{Z} = \mathbf{Id}|_\mathbf{Z}$.

Если теперь $z \in \mathbf{Z}, z \neq 0$, то

$$1=\varphi(1)=\varphi(z\cdot z^{-1})=\varphi(z)\varphi(z^{-1})=z\varphi(z^{-1}),\text{ т.е. }\varphi(z^{-1})=z^{-1}.$$

Следовательно, для любого рационального числа $q=\dfrac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1},\ z_1,z_2\in\mathbf{Z}$, имеем:

$$\varphi(q)=\varphi(z_1z_2^{-1})=\varphi(z_1)\varphi(z_2^{-1})=z_1z_2^{-1}=q,$$

т.е. $\varphi=\mathbf{Id}\big|_{\mathbf{Q}}$. ◄

Лемма 2. *Если* φ *– автоморфизм поля вещественных чисел* $\mathbf{R}$, *то* $\varphi=\mathbf{Id}_{\mathbf{R}}$.

Доказательство. Заметим, что если $\mathbf{R}^+$ – множество положительных вещественных чисел, то $\varphi(\mathbf{R}^+)\subset\mathbf{R}^+$. В самом деле, если $r\in\mathbf{R}^+$, то $r=a^2,\ a\in\mathbf{R}$. Поэтому

$$\varphi(r)=\varphi(a^2)=(\varphi(a))^2\in\mathbf{R}^+.$$

Включение $\varphi(\mathbf{R}^+)\subset\mathbf{R}^+$ влечет то, что φ сохраняет неравенства, т.е.

$$\forall a,b\in\mathbf{R}\quad a<b\Rightarrow\varphi(a)<\varphi(b).$$

Действительно, если $a<b$, то $b-a\in\mathbf{R}^+$. Но тогда, поскольку $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi(b-a)\in\mathbf{R}^+$, то $\varphi(a)<\varphi(b)$.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, получим, что $\varphi\big|_{\mathbf{Q}}=\mathbf{Id}\big|_{\mathbf{Q}}$. Предположим, что $r\in\mathbf{R}$ и $\varphi(r)\neq r$. Известно (см., например, [ ], § 8.1), что любое вещественное число может быть заключено между двумя рациональным числами, расстояние между которыми сколь угодно мало. В рассматриваемой ситуации выберем такие $q_1,q_2\in\mathbf{Q}$, что

$$q_1<r<q_2\quad\text{и}\quad q_2-q_1<\left|\varphi(r)-r\right|.$$

Тогда, поскольку φ сохраняет неравенства, то

$$\varphi(q_1)<\varphi(r)<\varphi(q_2).$$

С учетом того, что $\varphi(r_1)=r_1,\ \varphi(r_2)=r_2$ получаем, что $q_1<\varphi(r)<q_2$. Теперь неравенства $q_1<r<q_2$ и $q_1<\varphi(r)<q_2$ влекут, что

$$\left|\varphi(r)-r\right|<(q_2-q_1)<\left|\varphi(r)-r\right|.$$

Полученное противоречие означает, что для любого $r\in\mathbf{R}$ $\varphi(r)=r$, т.е. $\varphi=\mathbf{Id}_{\mathbf{R}}$. ◄

Следствие 1. *Если* $\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2$ *– векторные пространства над полем* $\mathbf{Q}$ (*или над полем* $\mathbf{R}$), *то любое полулинейное отображение* $f:\mathbf{V}_1\to\mathbf{V}_2$ *яв-*

ляется линейным. В частности, если $\mathbf{V}-$ *векторное пространство* $\mathbf{V}$ *над полем* $\mathbf{Q}$ (*или над полем* $\mathbf{R}$), *то группа автоморфизмов и группа коллинеаций пространства* $\mathbf{V}$ *совпадают:* $GL(\mathbf{V})=GSL(\mathbf{V})$.