§ 12. СИММЕТРИИ ПЛОСКОСТЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ

Пополним наш запас специальных морфизмов симметриями – важным типом автоморфизмов плоскостей параллельных переносов. Самые непосредственные визуальные представления о симметрии приходят к нам в результате наблюдения человеческого тела, животных, растений, других объектов окружающего нас мира. Идеи симметрии с античных времен широко используются в живописи, архитектуре, технике.

Изучение симметрий начнем с отображений специального типа, которые называются *инволюциями*. Для прозрачности изложения ограничимся в этом параграфе случаем плоскости $\mathcal{A}$ параллельных переносов, для которой $\operatorname{char}\mathcal{A} \neq 2$.

Определение 1. *Морфизм плоскости параллельных переносов* $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ *называется* ***инволюцией****, если* $f^2 = \mathbf{Id}_{\mathcal{A}}$.

Тривиальным примером инволюции является тождественное отображение, при котором каждая точка плоскости неподвижна.

Далее будет показано, что во многих случаях инволюцию можно охарактеризовать, зная количество и расположение ее неподвижных точек. Более точно, из теорем, доказанных ниже, вытекают следующие утверждения:

1) каждая инволюция имеет неподвижные точки;

2) если у инволюции f единственная неподвижная точка O, то f – *центральная симметрия с центром* O (см. определение ниже);

3) если у инволюции f не менее двух неподвижных точек и все неподвижные точки f лежат на одной прямой l, то f – *осевая симметрия с осью* l (см. определение ниже);

4) если множество неподвижных точек инволюции f содержит неколлинеарные точки, а также некоторую прямую, то f – тождественное отображение (приведенный в конце параграфа пример показывает, что наличие у инволюции f трех неколлинеарных неподвижных точек недостаточно для того, чтобы f было тождественным отображением).

Лемма 1. *Если* $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ *– инволюция плоскости* $\mathcal{A}$, *то для любой точки* $A\in\mathcal{A}$ *середина отрезка* $m(Af(A))$ *является неподвижной точкой отображения* f.

Доказательство. Если $f(A)=A$, то $A=m(Af(A))$ – неподвижная точка отображения f. Если $f(A)\neq A$, то отрезок $\{A, f(A)\}$ при отображении f переходит в себя, так как

$$f\left(\left\{A, f(A)\right\}\right)=\left\{f(A), f^2(A)\right\}=\left\{f(A), A\right\}=\left\{A, f(A)\right\}.$$

В силу утверждения 11.3 середина отрезка $m(Af(A))$ – неподвижная точка инволюции *f*.◄

Лемма 2. *Всякая инволюция – автоморфизм плоскости параллельных переносов.*

Доказательство. Так как $f^2=\mathbf{Id}_{\mathcal{A}}$, то $f^{-1}=f$. Значит, f – биективное отображение. ◄

Упражнение 1. *Пусть f – инволюция,* $\vec{f}$ – *векторная часть морфизма* f. *Тогда* $\vec{f}^2=\mathbf{Id}_{\mathbf{V}(\mathcal{A})}$.

Сейчас мы опишем все инволюции, обладающие ровно одной неподвижной точкой.

Определение 2. ***Центральной симметрией*** *плоскости* $\mathcal{A}$ *называется инволюция, обладающая ровно одной неподвижной точкой, называемой* ***центром симметрии***.

Среди автоморфизмов группы векторов $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ имеется один специальный автоморфизм ψ, сопоставляющий каждому вектору его противоположный:

$$\psi: \mathbf{V}(\mathcal{A})\to\mathbf{V}(\mathcal{A}),\ \vec{a}\mapsto-\vec{a}$$

(убедитесь, что ψ – действительно автоморфизм!). Легко видеть, что $\psi^2=\mathbf{Id}$. Оказывается, что векторная часть $\vec{f}$ любой центральной симметрии f совпадает с ψ.

Теорема 1. *Пусть* $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ – *центральная симметрия. Тогда* $\vec{f}=\psi$. *Обратно, если* O – *некоторая точка плоскости* $\mathcal{A}$, *то отображение* $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, *определяемое по правилу:*

$$A\mapsto f(A),\ \text{где}\ \overrightarrow{Of(A)}=-\overrightarrow{OA}, \quad (1)$$

является центральной симметрией с центром O (рис.1).

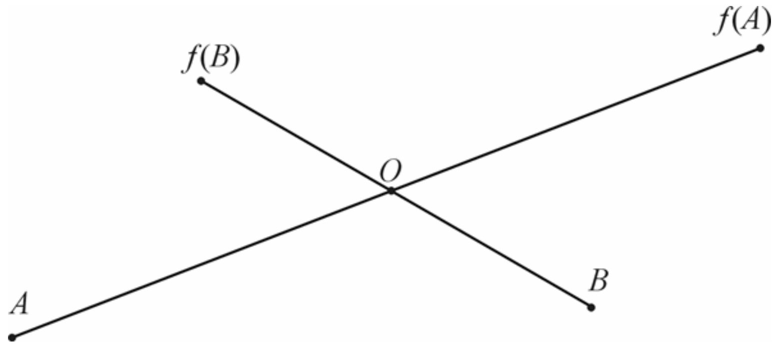

Рис. 1

Доказательство. Пусть O – центр центральной симметрии f. Поскольку O – единственная неподвижная точка отображения f, то (лемма 1) для любой точки $A \in \mathcal{A}$ середина отрезка $\{A, f(A)\}$ совпадает с точкой O. Тогда $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{Of(A)}$ или $\overrightarrow{Of(A)} = -\overrightarrow{OA}$. Последнее равенство означает, что $\vec{f}(\overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{OA}$. Так как точка A произвольная, то любой вектор $\vec{a}$ плоскости $\mathcal{A}$ может быть задан в виде $\overrightarrow{OA}$ (утверждение 7.1). Таким образом, для любого вектора $\vec{a}$ верно равенство $\vec{f}(\vec{a}) = -\vec{a}$, что и означает $\vec{f} = \psi$.

Обратно, пусть $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – отображение, задаваемое правилом (1) (из утверждения 7.1 вытекает, что правило (1) действительно задает отображение плоскости). Тогда при $A = O$ получаем $\overrightarrow{Of(O)} = \vec{0}$, следовательно, O – неподвижная точка отображения f. Других неподвижных точек у отображения f нет. Действительно, если $f(A) = A$, то $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA}$ или $2\overrightarrow{OA} = \vec{0}$. Поскольку $\operatorname{char} \mathcal{A} \neq 2$, то $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$, $A = O$. Очевидно, что $f^2 = \mathbf{Id}_{\mathcal{A}}$, в частности, f – биекция. Остается показать, что f – морфизм плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$, т.е. что f сохраняет эквиполлентность направленных отрезков. Согласно утверждения 8.5, достаточно показать, что f является морфизмом аффинного типа, т.е. f каждую прямую переводит в прямую.

Пусть l – прямая, проходящая через точку O, т.е. $l = l(O, A)$, $A \neq O$. Так как $A, f(A), O$ – коллинеарные точки (лемма 1), то $f(A) \in l$. Если $B \in l$ и $B \neq O, A$, то вновь, так как $B, f(B), O$ – коллинеарные точки, то $f(B) \in l(O, B) = l(O, A) = l$. Итак $f(l) \subset l$.

Пусть теперь прямая l не проходит через O и $A \in l$. Покажем, что $f(l)$ содержится в прямой l', параллельной l и проходящей через $f(A)$. Для точки $B \in l$, отличной от A, имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{Of(A)},\ \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{Of(B)},$$

поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Of(A)} - \overrightarrow{Of(B)}$ или $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f(\text{B})f(A)}$, что влечет $AB \sim f(B)f(A)$. Откуда следует, что $f(B) \in l'$. Значит, образ любой прямой содержится в прямой, (а, следовательно, и совпадает с ней).

Таким образом, f – изоморфизм плоскости $\mathcal{A}$ как плоскости аффинного типа, а следовательно, f – изоморфизм плоскости $\mathcal{A}$ как плоскости параллельных переносов, т.е. f – центральная симметрия.◄

Замечание 1. Если f – центральная симметрия, то для любых точек $A, B \in \mathcal{A}$ верно равенство $\overrightarrow{f(A)f(B)} = -\overrightarrow{AB}$. Из него вытекает, что отображение f любую прямую переводит в параллельную прямую, т.е. f – гомотетия плоскости $\mathcal{A}$.

Получив простое описание инволюций с одной неподвижной точкой, обратимся к инволюциям, все неподвижные точки которых принадлежат одной прямой.

Пусть l – прямая плоскости $\mathcal{A}$ и π – направление плоскости $\mathcal{A}$, отличное от направления прямой l. Рассмотрим отображение плоскости $\mathcal{A}$ в себя, которое обозначим $S_{l,\pi}$ и определим следующим образом. Для любой точки $A \in \mathcal{A}$ обозначим O_A точку пересечения прямой l и прямой направления π, проходящей через A. Пусть A' – образ точки A при центральной симметрии с центром в точке O_A. Положим $S_{l,\pi}(A) = A'$ (рис. 2).

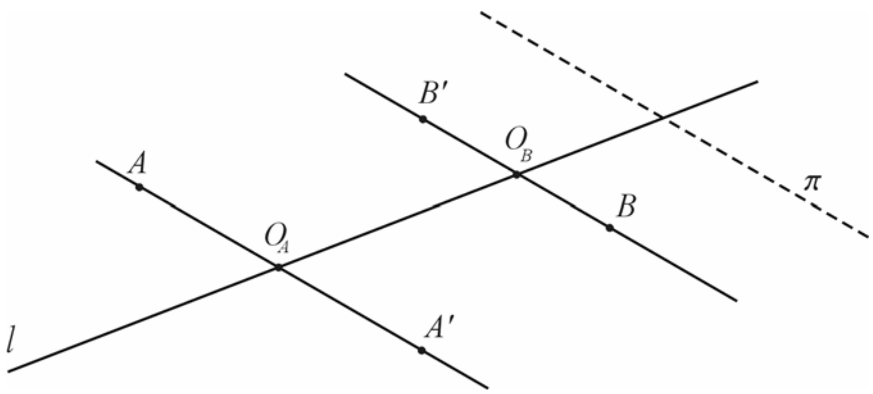

Рис. 2

Итак, при отображении $S_{l,\pi}$ на каждую точку A плоскости действует центральная симметрия, но не одна для всех точек, а зависящая от точки A. Ввиду определения отображения $S_{l,\pi}$ ясно, что все точки прямой l неподвижны относительно $S_{l,\pi}$. Напротив, все остальные точки плоскости подвижны. Также из определения отображения $S_{l,\pi}$ вытекает, что $S_{l,\pi}^2 = \mathbf{Id}_{\mathcal{A}}$, и потому $S_{l,\pi}$ – биекция плоскости $\mathcal{A}$ на себя.

Упражнение 2. *В обозначениях предыдущего абзаца пусть* $A \notin l$, $B \in l(A, A')$, $B' = S_{l,\pi}(B)$. *Докажите, что* $m\left(AA'\right) = m\left(BB'\right) = O_A$.

Определение 3. Осевой симметрией *плоскости параллельных переносов с* ***осью*** l ***в направлении*** π *называется морфизм вида* $S_{l,\pi}$.

Из определения вытекает, что осевая симметрия – автоморфизм плоскости $\mathcal{A}$. Покажем, что осевыми симметриями исчерпываются все инволюции плоскости параллельных переносов, которые имеют, по крайней мере, две неподвижные точки, причем все неподвижные точки коллинеарны.

Теорема 2. *Пусть* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *– инволюция плоскости параллельных переносов, имеющая не менее двух неподвижных точек и такая, что все неподвижные точки отображения* f *лежат на одной прямой* l. *Тогда* f *– симметрия плоскости* $\mathcal{A}$ *с осью* l *в некотором направлении* π.

Доказательство. Зафиксируем точку $C \notin l$. Заметим, что $D = m\left(Cf\left(C\right)\right) \in l$, поскольку в силу леммы 1 $m\left(Cf\left(C\right)\right)$ – неподвижная точка отображения f. Обозначим символом π направление прямой $l_1 = l\left(C, D\right)$ и покажем, что $f = S_{l,\pi}$.

Так как f – инволюция, то $f\left(l\left(C, f\left(C\right)\right)\right) = l\left(C, f\left(C\right)\right) = l_1$ и, так как для любой точки $T \in l_1$ $m\left(T, f\left(T\right)\right) = m\left(C, f\left(C\right)\right) = D$, то ограничение f на l_1 совпадает с ограничением $S_{l,\pi}$ на l_1. Заметим, что прямых с таким свойством, по крайней мере, две. Действительно, если A – неподвижная точка отображения f (таких точек, по условию, не менее двух) и l_2 – прямая направления π, проходящая через A, то $f(l_2) = l_2$, поскольку при отображении f сохраняется параллельность прямых. Отсюда следует, что ограничение f на l_2 также совпадает с ограничением $S_{l,\pi}$ на l_2. Если M – отличная от C точка, не лежащая на прямой l, то точно так же, как для C, показывается, что ограничение f на $l(M, f(M))$ совпадает с ограничением $S_{l,\pi'}$ на $l(M, f(M))$, где π' – направление прямой

$l(M, f(M))$. Покажем, что $\pi = \pi'$. Действительно, если допустить, что $\pi \neq \pi'$, то прямая $l(M, f(M))$ пересекает две различные параллельные прямые l_1 и l_2 в точках P и Q (рис. 3).

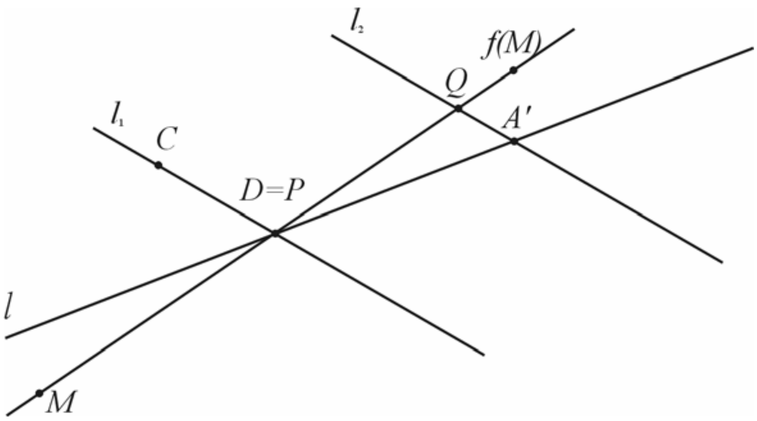

Рис. 3

Поскольку все три прямые инвариантны при отображении f, то P и Q – неподвижные точки отображения f. По условию теоремы $P, Q \in l$, следовательно, $l(M, f(M)) = l$. Последнее противоречит выбору точки M. Итак, доказано, что для любой точки M вне прямой l ограничение f на $l(M, f(M))$ совпадает с ограничением $S_{l,\pi}$ на $l(M, f(M))$. Поскольку объединение прямых вида $l(M, f(M))$ совпадает со всей плоскостью, то получаем, что $f = S_{l,\pi}$. ◄

Теорема 3. *Пусть* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *– инъективный морфизм плоскости параллельных переносов, множество неподвижных точек которого содержит некоторую прямую* l *и точку* A, $A \notin l$. *Тогда* $f = \mathbf{Id}_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Покажем, что f – дилатация плоскости $\mathcal{A}$, т.е. при отображении f каждая прямая l' переходит в параллельную прямую.

Если $l' \parallel l$, то существует параллельный перенос τ плоскости $\mathcal{A}$ такой, что $\tau(l') = l$. В этом случае $(f\tau)(l') = l$. Поскольку f – морфизм плоскости параллельных переносов, то согласно утверждению 9.1 существует параллельный перенос μ_τ плоскости $\mathcal{A}$ такой, что $f\tau = \tau_\mu f$. Но тогда $\mu_\tau(f(l')) = f(\tau(l')) = l$, следовательно, $f(l') \parallel l$, т.е. $f(l') \parallel l'$.

Если же l' не параллельна l, то рассмотрим параллельный перенос τ плоскости $\mathcal{A}$, переводящий прямую l' в прямую, проходящую через точку A. Вновь используя существование параллельного перенос μ_τ со свойством $f\tau=\tau_{\mu}f$, получаем, что $\mu_{\tau}(f(l'))=f(\tau(l'))$. Прямая $\tau(l')$ содержит две неподвижные точки морфизма f: она пересекает прямую l и проходит через точку A, поэтому $f(\tau(l'))\subset\tau(l')$. Следовательно, $\mu_{\tau}(f(l'))\subset\tau(l')$, т.е. множество $f(l')$ лежит на прямой, параллельной l'. Итак, доказано, что $f-$ дилатация плоскости $\mathcal{A}$.

Пусть $B-$произвольная точка плоскости $\mathcal{A}$, не лежащая на прямой l. Выберем две различные точки C и D на прямой l и рассмотрим две прямые $l_1=l(B,C)$ и $l_2=l(B,D)$. Поскольку дилатация f каждую прямую переводит в параллельную прямую, а l_1 и l_2 содержат неподвижные точки отображения f, то $f(l_1)=l_1, f(l_2)=l_2$. Из последних соотношений вытекает, что $B-$ неподвижная точка отображения f, т.е. $f=\mathbf{Id}_{\mathcal{A}}$. ◄

Замечание 2. Приводимый ниже пример показывает, что наличие неколлинеарных неподвижных точек не обеспечивает тождественности отображения f.

Пример 1. Рассмотрим плоскость параллельных переносов $\mathrm{A}^2(\mathbf{C})$ и отображение $f:\mathrm{A}^2(\mathbf{C})\to\mathrm{A}^2(\mathbf{C}), (a,b)\mapsto(\overline{a},\overline{b})$, где $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $a\mapsto\overline{a}$ – автоморфизм сопряжения поля комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Упражнение 3. *Докажите, что* $f-$ *нетождественная инволюция плоскости* $\mathrm{A}^2(\mathbf{C})$, *обладающая неколлинеарными неподвижными точками.*