§ 11. ПРОЕКЦИИ НА ПРЯМУЮ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКОСТЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ

В этом параграфе $\mathcal{A}$ будет обозначать плоскость параллельных переносов. Пусть l – фиксированная прямая в $\mathcal{A}$ и π – направление на плоскости $\mathcal{A}$, отличное от направления прямой l.

Определение 1. *Отображение*

$$P_{l,\pi} : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ A \mapsto P_{l,\pi}(A),$$

где $P_{l,\pi}(A)$ *– точка пересечения прямой* l *и прямой направления* π*, проходящей через точку* A*, называется* ***проектированием*** (*или* ***параллельным проектированием***) *плоскости* $\mathcal{A}$ *на прямую* l *вдоль направления* π. *Точка* $P_{l,\pi}(A)$ *называется* ***проекцией*** *точки* A (рис. 1).

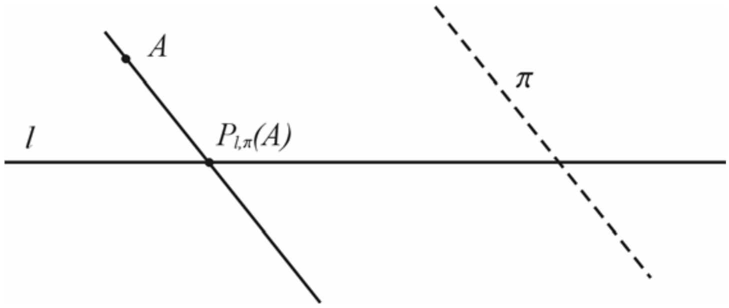

Рис. 1

Упражнение 1. *Докажите, что образом проектирования* $P_{l,\pi}$ *является прямая* l *и что все точки этой прямой – неподвижные точки отображения* $P_{l,\pi}$.

Лемма 1. *Проектирование* $P_{l,\pi}$ *является морфизмом плоскости* $\mathcal{A}$ *на себя, т.е. для любых* $A,B,C,D \in \mathcal{A}$ *истинна импликация*:

$$AB \sim CD \;\Rightarrow\; P_{l,\pi}(A)P_{l,\pi}(B) \sim P_{l,\pi}(C)P_{l,\pi}(D). \qquad (1)$$

Доказательство. Вначале рассмотрим два специальных случая расположения точек A,B,C,D, в которых справедливость леммы очевидна.

Если точки A и B лежат на прямой направления π, то отрезок $P_{l,\pi}(A)P_{l,\pi}(B) = A'B'$ нулевой. Поскольку $AB \sim CD$, то точки C и D также лежат на прямой направления π и отрезок $P_{l,\pi}(C)P_{l,\pi}(D) = C'D'$ также нулевой. Нулевые отрезки эквиполлентны, следовательно, в рассматриваемом случае импликация (1) истинна (рис. 2).

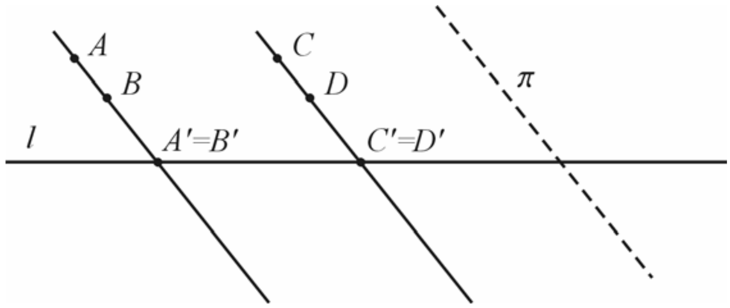

Рис. 2

Если точки A и C лежат на прямой направления π, то точки B и D также лежат на прямой направления π. В этом случае отрезки $P_{l,\pi}(A)P_{l,\pi}(B)$ и $P_{l,\pi}(C)P_{l,\pi}(D)$ равны, следовательно, эквиполлентны (рис. 3).

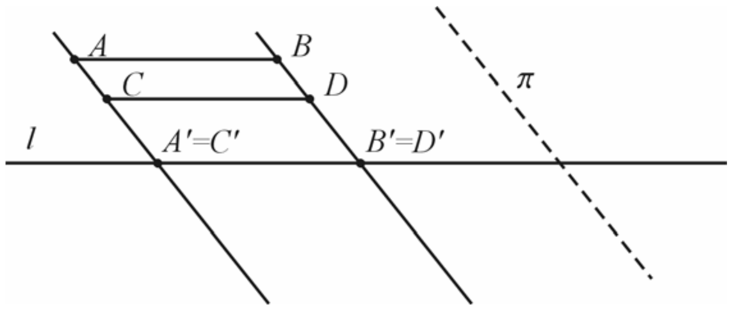

Рис. 3

Рассмотрим теперь общий случай расположения точек A,B,C,D, который определяется следующими условиями:

1) точки A,B,C попарно различны;

2) направления прямых $l(A,B)$ и $l(A,C)$ не совпадают с направлением π (рис. 4).

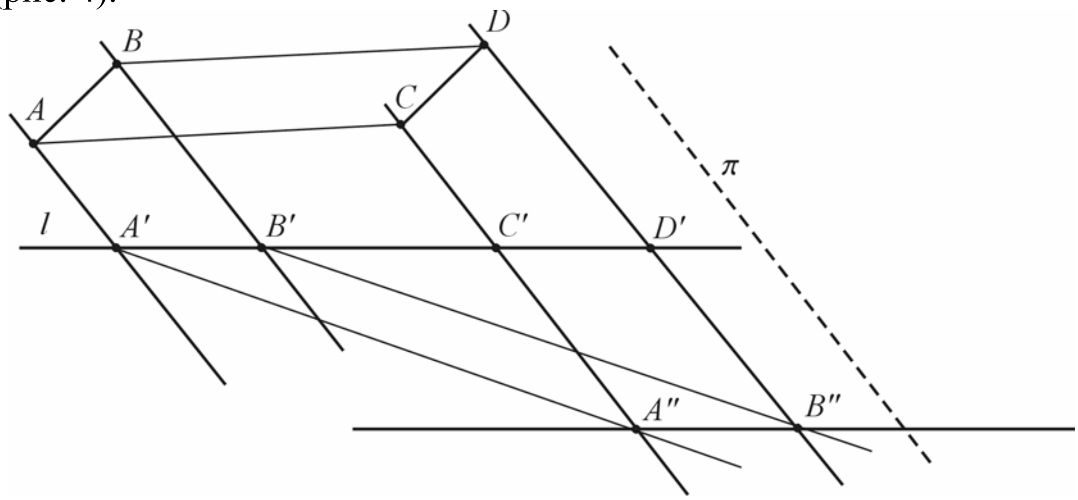

Рис. 4

В этом случае точки $A' = P_{l,\pi}(A)$ и $B' = P_{l,\pi}(B)$ различны. Поскольку $AB \sim CD$, то точки $C' = P_{l,\pi}(C)$ и $D' = P_{l,\pi}(D)$ также различны. Выберем некоторое направление на плоскости $\mathcal{A}$, отличное от направлений π и направления прямой l, и через точки A' и B' проведем две параллельные прямые l_1 и l_2 в выбранном направлении. Пусть A'' – точка пересечения прямой l_1 и прямой l_3, проектирующей точку C на прямую l; B'' – точка пересечения прямой l_2 и прямой l_4, проектирующей точку D на прямую l. Тогда $A'B'B''A''$ – параллелограмм, образованный парой параллельных прямых l_1, l_2 и парой параллельных прямых l_3, l_4. Следовательно, $A'B' \sim A''B''$. С другой стороны, $C'D'B''A''$ – также параллелограмм, образованный парой параллельных прямых $l(A', B')$, $l(A'', B'')$ и парой параллельных прямых l_3, l_4. Следовательно, $C'D' \sim A''B''$. Используя транзитивность отношения эквиполлентности направленных отрезков, получаем $A'B' \sim C'D'$. ◄

В качестве следствия леммы 1 докажем утверждение, хорошо известное из курса элементарной геометрии, но формулируемое там в несколько иной форме.

Теорема 1(***малая теорема Фалеса***)**.** *Пусть l, l' – различные прямые в плоскости $\mathcal{A}$, π – направление, отличное от направлений прямых l, l'. Если $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, и $A_1, ..., A_n$ – точки прямой l, $A_i' = P_{l',\pi}(A)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, – их проекции на прямую l' вдоль направления π, то истинна следующая импликация*:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2A_3} = ... = \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \Rightarrow \overrightarrow{A_1'A_2'} = \overrightarrow{A_2'A_3'} = ... = \overrightarrow{A_{n-1}'A_n'}.$$

Доказательство. По условию имеем: $A_1A_2 \sim A_2A_3 \sim ... \sim A_{n-1}A_n$. Ввиду леммы 1 имеем: $A_1'A_2' \sim A_2'A_3' \sim ... \sim A_{n-1}'A_n'$. Переходя к векторам, получаем требуемое (рис.5). ◄

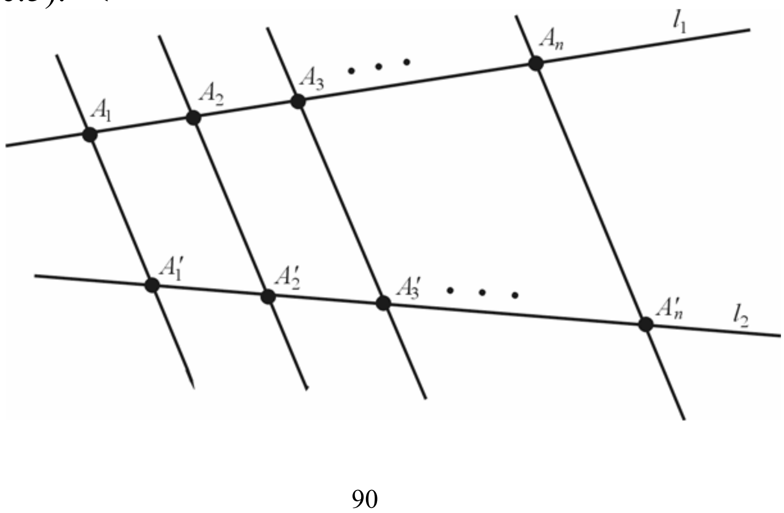

Рис. 5

Поскольку каждое проектирование $P_{l,\pi}$ является морфизмом плоскости параллельных переносов, то оно индуцирует гомоморфизм $\overrightarrow{P_{l,\pi}}$ группы $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ векторов плоскости $\mathcal{A}$ в себя:

$$\overrightarrow{P_{l,\pi}} : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbf{V}(\mathcal{A}),\ \overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{P_{l,\pi}(A)P_{l,\pi}(B)}. \qquad (2)$$

Отметим, что образом отображения (2) является подгруппа $\mathbf{V}(\alpha)$ векторов направления α, определяемого прямой l. Действительно, так как для любых точек $A, B \in \mathcal{A}$ их образы $P_{l,\pi}(A), P_{l,\pi}(B)$ лежат на прямой l, то для любого вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ имеем: $\overrightarrow{P_{l,\pi}}(\vec{a}) \in \mathbf{V}(\alpha)$. Кроме того, поскольку любой вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}(\alpha)$ представляется в виде $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A, B \in l$, то $\overrightarrow{P_{l,\pi}}(\vec{a}) = \vec{a}$.

Легко видеть, что отображения $P_{l,\pi}$ и $\overrightarrow{P_{l,\pi}}$ обладают тем свойством, что их квадрат совпадает с самим отображением: $(P_{l,\pi})^2 = P_{l,\pi}$, $(\overrightarrow{P_{l,\pi}})^2 = \overrightarrow{P_{l,\pi}}$. Кроме этого, отображение $\overrightarrow{P_{l,\pi}}$ следующим образом действует на подгруппы векторов различных направлений:

$\overrightarrow{P_{l,\pi}}(\mathbf{V}(\pi)) = \{\vec{0}\}$;

$\overrightarrow{P_{l,\pi}}(\mathbf{V}(\gamma)) = \mathbf{V}(\alpha)$, если $\gamma -$ любое направление, не совпадающее с направлением π, а $\alpha -$ направление прямой l.

Сейчас мы докажем, что отмеченные свойства отображения $\overrightarrow{P_{l,\pi}}$ полностью характеризуют векторные части проектирований плоскости параллельных переносов $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Пусть* $p : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbf{V}(\mathcal{A})$ – *гомоморфизм группы векторов плоскости* $\mathcal{A}$ *такой, что выполняются условия:*

(i) $p^2 = p$;

(ii) *существуют направления* $\alpha, \beta, \gamma, (\alpha \neq \beta)$ *на плоскости* $\mathcal{A}$ *такие, что* $p(\mathbf{V}(\beta)) = \{\vec{0}\}$, $p(\mathbf{V}(\gamma)) = \mathbf{V}(\alpha)$.

Тогда p *является векторной частью некоторого проектирования плоскости* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Ввиду утверждения 7.2 $\mathbf{V}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}(\alpha) \oplus \mathbf{V}(\beta)$. Это означает, что любой вектор $\vec{c}$ плоскости $\mathcal{A}$ единственным образом представляется в виде $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} \in \mathbf{V}(\alpha)$, $\vec{b} \in \mathbf{V}(\beta)$. Поэтому

$$p(\vec{c}) = p(\vec{a}) + p(\vec{b}) = p(\vec{a}), \text{ т.е. } p(\mathbf{V}(\mathcal{A})) = p(\mathbf{V}(\alpha)). \tag{3}$$

Кроме того, по условию (ii) $\beta \neq \gamma$, поэтому

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}(\gamma) \oplus \mathbf{V}(\beta) \text{ и } p(\mathbf{V}(\mathcal{A})) = p(\mathbf{V}(\gamma)) = \mathbf{V}(\alpha). \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получаем, что $p(\mathbf{V}(\alpha)) = \mathbf{V}(\alpha)$. Таким образом, любой вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}(\alpha)$ может быть представлен в виде $\vec{a} = p(\overrightarrow{a'})$, $\overrightarrow{a'} \in \mathbf{V}(\alpha)$. Но тогда $p(\vec{a}) = p(p(\overrightarrow{a'})) = p^2(\overrightarrow{a'}) = p(\overrightarrow{a'}) = \vec{a}$. Следовательно, отображение p на произвольный вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} \in \mathbf{V}(\alpha)$, $\vec{b} \in \mathbf{V}(\beta)$ действует по правилу: $p(\vec{c}) = \vec{a}$. Но точно так же действует на $\vec{c}$ векторная часть проектирования $P_{l,\beta}$, где $l-$ прямая направления α. Итак, $p = \overrightarrow{P_{l,\beta}}$. ◄

Упражнение 2. *Выясните, в каком случае два проектирования имеют одинаковую векторную часть?*

Предыдущие рассуждения позволяют определить для каждой плоскости параллельных переносов неотрицательное целое число, связанное с кратными векторов и играющее важную роль в дальнейшем.

Определение 2. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$. n*-* ***кратным*** *произвольного вектора* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ *называется вектор* (*обозначаемый* $n\vec{a}$), *равный сумме* n *векторов, каждый из которых есть* $\vec{a}$:

$$n\vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{n \text{ раз}}.$$

В частности, 1*-кратное вектора* $\vec{a}$ *есть сам вектор* $\vec{a}$. ***Нуль-кратным*** *вектора* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ *называется нулевой вектор* $\vec{0}$.

Определение 3. *Плоскость* $\mathcal{A}$ *называется* ***плоскостью характеристики нуль****, если*

$$\forall\, \vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A}),\ \vec{a} \neq \vec{0}, \forall\, n \in \mathbf{N} \quad n\vec{a} \neq \vec{0}.$$

В противном случае, ***характеристикой плоскости*** $\mathcal{A}$ *называется наименьшее из натуральных чисел* p *таких, что* $p\vec{a} = \vec{0}$ *для какого-нибудь* *ненулевого вектора* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$. *Характеристику плоскости* $\mathcal{A}$ *будем обозначать символом* $\mathrm{char}\mathcal{A}$.

Пример 1. Плоскости $\mathrm{A}^2(\mathbf{Q})$, $\mathrm{A}^2(\mathbf{R})$ и $\mathrm{A}^2(\mathbf{C})$ – плоскости нулевой характеристики (проверьте это!).

Пример 2. Всякая конечная плоскость параллельных переносов $\mathcal{A}$ (в частности, плоскость $AFP(p) \cong \mathbf{A^2}(\mathbf{Z}/(p))$ (см. §2)) – плоскость положительной характеристики. Действительно, ввиду конечности $\mathcal{A}$ конечно и множество $\mathbf{V}(\mathcal{A})$. Тогда для любого ненулевого вектора $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ должны существовать два различных $m,n \in \mathbf{N}$ таких, что $m\vec{a} = n\vec{a}$. Если теперь $m > n$, то $k = m - n \in \mathbf{N}$ и $k\vec{a} = \vec{0}$. Остается выбрать наименьшее из таких k. Следующее утверждение описывает важное свойство характеристики плоскости.

Утверждение 1. (i) *Если* $\vec{a}$ – *ненулевой вектор и* $m\vec{a} = \vec{0}$ *для некоторого* $m \in \mathbf{N}$, *то для всякого* $\vec{b} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ $m\vec{b} = \vec{0}$;

(ii) *если* $p = \mathrm{char}\,\mathcal{A}$ *и* $p \neq 0$, *то* p – *простое число*.

Доказательство.(i) Заметим, что при $\vec{b} = \vec{0}$, очевидно, $m\vec{b} = \vec{0}$, поэтому ниже $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Предположим, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Тогда вектор $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарен ни $\vec{a}$, ни $\vec{b}$. Выберем точку O и прямые l_a, l_b, проходящие через O в направлении соответственно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Рассмотрим на прямой l_a точки $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$, получаемые следующим образом: $\tau_{\vec{a}}(A_i) = A_{i+1}$, $1 \le i \le m$, где $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Тогда $\overrightarrow{A_1A_2} = \ldots = \overrightarrow{A_mA_{m+1}}$. Поскольку вектор $\overrightarrow{A_1A_{m+1}} = m\vec{a} = \vec{0}$, то $A_1 = A_{m+1}$. Пусть π – направление вектора $\vec{a} - \vec{b}$. Тогда, применяя малую теорему Фалеса, получаем, что $m\vec{b} = \vec{0}$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то рассмотрим не коллинеарный им вектор $\vec{c}$. Тогда по уже доказанному $m\vec{c} = \vec{0}$. Поскольку $\vec{c}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то снова по уже доказанному $m\vec{b} = \vec{0}$.

(ii) Предположим противное, $p = \mathrm{char}\,\mathcal{A} = mn$, $m,n > 1$, $m,n \in \mathbf{N}$. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда по определению характеристики $\vec{b} = n\vec{a} \neq \vec{0}$. Однако $m\vec{b} = mn\vec{a} = \vec{0}$, что противоречит определению характеристики.◄

Для плоскостей параллельных переносов можно естественным образом определить понятие середины отрезка.

Определение 4. Серединой *направленного отрезка* AB *в плоскости параллельных переносов* $\mathcal{A}$ *называется точка* $C \in \mathcal{A}$ *такая, что* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– плоскость параллельных переносов и* $\operatorname{char} \mathcal{A} \neq 2$. *Тогда для любого направленного отрезка в плоскости* $\mathcal{A}$ *существует единственная середина.*

Доказательство. Сначала докажем существование середины отрезка. Поскольку для любой точки $A \in \mathcal{A}$ верно равенство $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, то серединой нулевого отрезка AA является точка A.

Пусть $A \neq B$, т.е. отрезок AB ненулевой. Выберем точку A_1 вне прямой $l = l(A, B)$, тогда $l_1 = l(A, A_1)$ и $l -$ две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Отложим от точки A_1 ненулевой вектор $\overrightarrow{AA_1}$, т.е. построим точку A_2 такую, что $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{AA_1}$. Точка A_2 лежит на прямой l_1 и, поскольку $\operatorname{char} \mathcal{A}$ отлична от 2, то $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = 2\overrightarrow{AA_1} \neq \vec{0}$, т.е. $A_2 \neq A$. Таким образом, точка A_2 лежит вне прямой l, следовательно, направление π прямой $l(A_2, B)$ отлично от направления прямой l и можно определить проектирование $P_{l,\pi}$. Очевидно, что $P_{l,\pi}(A) = A$, $P_{l,\pi}(A_2) = B$. Пусть $C = P_{l,\pi}(A_1)$. Тогда согласно малой теореме Фалеса $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, т.е. точка C является серединой отрезка AB (рис. 6).

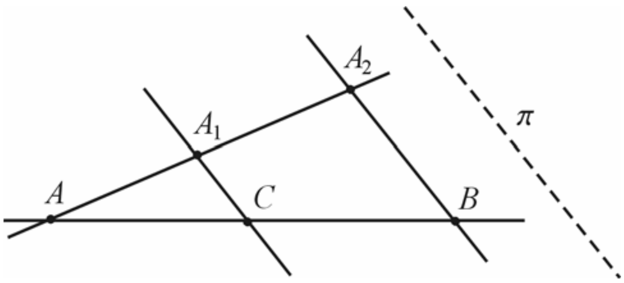

Рис. 6

Теперь докажем единственность середины отрезка. Пусть $C, C' -$ середины отрезка AB. Тогда $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC'}$ или $2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}) = \vec{0}$. Поскольку $\operatorname{char} \mathcal{A} \neq 2$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$, т.е. $C = C'$. ◄

Обозначим середину отрезка AB символом $m(AB)$. В дальнейшем мы будем использовать следующие свойства середины отрезка.

Утверждение 3. *Пусть* $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ *– плоскости параллельных переносов, характеристики которых не равны* 2. *Тогда верны следующие утверждения:*

(i) $\forall\ A, B \in \mathcal{A} \quad m(AB) = m(BA)$;

(ii) *каждый морфизм* $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *сохраняет середины отрезков, т.е.*

$$\forall\ A, B \in \mathcal{A}_1 \quad f(m(AB)) = m(f(A)f(B));$$

Доказательство. (i) Пусть $C = m(AB)$, т.е. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Переходя в последнем равенстве к противоположным векторам, получим $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, т.е. $C = m(BA)$.

(ii) Пусть $\vec{f}$ – векторная часть морфизма f (см. § 8), $C = m(AB)$. Из равенства $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ получаем

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \vec{f}(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{f(C)f(B)},$$

т.е. $m(f(A)f(B)) = f(C) = f(m(AB))$. ◄

Замечание 1. Часть (i) утверждения 1 показывает, что для любых точек A, B плоскости $\mathcal{A}$ направленные отрезки AB и BA имеют одну и ту же середину. Имея в виду эту точку, можно говорить просто о *середине отрезка* $\{A, B\}$.

В плоскостях, характеристики которых не равны 2, справедливо следующее хорошо известное в элементарной геометрии свойство диагоналей параллелограмма: они пересекаются в своих серединах.

Утверждение 4. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– плоскость параллельных переносов,* $\operatorname{char}\mathcal{A} \neq 2$ *и* $ABCD$ *– параллелограмм с диагоналями* $\{A, C\}$ *и* $\{B, D\}$. *Тогда* $m(AC) = m(BD)$ (рис. 7).

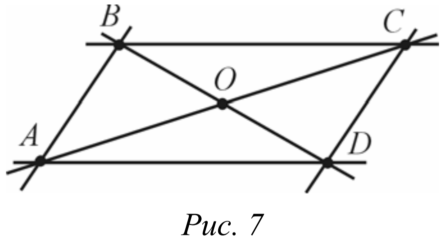

Рис. 7

Доказательство. Пусть $O = m(A, C)$. Согласно соотношению Шаля,

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}\,,\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}\,. \tag{3}$$

Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Используя это равенство, а также то, что $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, из равенств (3) получаем, что $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.

Последнее равенство означает, что $O = m(B, D)$. ◄

Упражнение 4. *Выясните, верно ли утверждение, обратное утверждению 4.*

Замечание 2. Можно было бы ввести понятие середины отрезка иным образом: начинать с плоскости аффинного типа и постулировать основные свойства середины отрезка. Все же, как показывает следующее упражнение, возникать оно может только для плоскостей параллельных переносов.

Упражнение 5. *Пусть $\mathcal{A}$ – плоскость аффинного типа, в которой для каждого направленного отрезка AB определена точка $m(AB) \in \mathcal{A}$ (называемая* ***серединой*** *отрезка AB) таким образом, что выполняются следующие условия:*

(i) $m(AB) = m(BA)$;

(ii) $m(AA) = A$;

(iii) *для любого проектирования $P_{l,\pi}$ и для любых точек $A, B \in \mathcal{A}$* $m(P_{l,\pi}(A)P_{l,\pi}(B)) = m(AB)$.

Докажите, что при сформулированных условиях верны следующие утверждения:

1) *для любого параллелограмма в плоскости $\mathcal{A}$ его диагонали пересекаются в своих серединах*;

2) *в плоскости $\mathcal{A}$ выполняется малая теорема Дезарга, и поэтому $\mathcal{A}$ – плоскость параллельных переносов.*

Теперь мы покажем (как было обещано в § 8), что плоскости различных характеристик очень не похожи друг на друга.

Утверждение 5. *Пусть $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ – плоскости параллельных переносов различных характеристик p, q. Тогда любой морфизм плоскостей параллельных переносов $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ является постоянным отображением.*

Доказательство. Так как f – морфизм плоскостей параллельных переносов, то (утверждение 8.1) для произвольного параллельного переноса $\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_1)$ существует единственный параллельный перенос $\mu_\tau \in \mathbf{T}(\mathcal{A}_2)$ такой, что

$$\mu_\tau f = f\tau. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что

$$\mu_\tau^p f = f\tau^p. \tag{5}$$

Если τ есть параллельный перенос на вектор $\vec{a} \in \mathcal{A}_1$, т.е. $\tau = \tau_{\vec{a}}$, то $\tau^p = \tau_{p\vec{a}} = \tau_{\vec{0}} = \mathbf{Id}_{\mathcal{A}_1}$. С учетом последнего из (4) получаем, что для любой точки $A \in \mathcal{A}_1$ верно равенство: $f(A) = \mu_\tau^p(f(A))$. Следовательно, μ_τ^p = $= \mathbf{Id}_{\mathcal{A}_2}$. Поскольку $p, q -$ взаимно простые числа, то существуют такие $u, v \in \mathbf{Z}$, что $pu + qv = 1$. Но тогда $\mu_\tau = (\mu_\tau^p)^u (\mu_\tau^q)^v = (\mathbf{Id}_{\mathcal{A}_2})^u (\mathbf{Id}_{\mathcal{A}_2})^v = \mathbf{Id}_{\mathcal{A}_2}$. Теперь из равенства (4) для произвольной точки $C \in \mathcal{A}_1$ имеем

$$f(\tau(C)) = f(C).$$

Так как $\mathcal{A}_1$ – плоскость параллельных переносов, то, зафиксировав C и меняя τ, мы можем получить в виде $\tau(C)$ любую точку плоскости $\mathcal{A}_1$, что влечет $\operatorname{Im} f = \{f(c)\}$. ◄