§ 10′. ОКТАВЫ, ЧИСЛА КЭЛИ И НЕДЕЗАРГОВЫ ПЛОСКОСТИ

Поскольку все дезарговы плоскости являются плоскостями параллельных переносов, то плоскости Мултона недезарговы. Влечет ли свойство плоскости быть плоскостью параллельных переносов ее дезарговость? – вопрос, ответ на который мы дадим ниже. С этой целью рассмотрим одну алгебраическую конструкцию, которая имеет многочисленные приложения в геометрии, алгебре и физике.

Пусть k – поле, в котором из равенства $\sum_{i=0}^{7} x_i^2 = 0$ для произвольных $x_i \in k$ следует, что все x_i равны нулю. В качестве k можно взять, например, поле вещественных чисел или любое его подполе. Рассмотрим восьмимерное векторное пространство $O(k)$ над k с базисом $\{e_0, e_1, ..., e_7\}$ и определим на $O(k)$ новую операцию, которую мы будем называть *умножением*. Определим, прежде всего, произведение пар базисных векторов с компонентой e_0:

$$e_0 \cdot e_i = e_i \cdot e_0 = e_i \text{ для } \ i \in \{0,1, ..., 7\}.$$

Произведение $e_i \cdot e_j \ \ (1 \le i, j \le 7)$ определим как элемент следующей таблицы, находящийся в i-ой строке и j-том столбце.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_0$	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	$-e_0$	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	$-e_0$	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	$-e_0$	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	$-e_0$	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_1	$-e_4$	$-e_2$	$-e_0$

Наконец, если $a = \sum_{i=0}^{7} \lambda_i e_i$, $b = \sum_{j=0}^{7} \mu_j e_j$ для $\lambda_i, \mu_j \in k$, то положим

$$a \cdot b = \sum_{i,j=0}^{7} \lambda_i \mu_j \left(e_i \cdot e_j \right). \tag{1}$$

Таким образом, на множестве $O(k)$ имеются две алгебраические операции (сложение и умножение векторов) и операция умножения векторов на скаляры. Ниже мы будем опускать, для краткости, точку в обозначении произведения. Простая проверка показывает, что умножение в $O(k)$ с умножением на скаляр связаны следующим соотношением: для любых $\lambda \in k$, $a,b \in O(k)$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Определение 1. *Пространство $O(k)$ с умножением, определенным выше, называется* ***алгеброй октав****, элементы $O(k)$ называются* ***октавами****. В случае $k = \mathbf{R}$ октавы иногда называются* ***числами Кэли***[1].

Используя октавы, приведем примеры плоскостей, которые недезарговы, но одновременно являются плоскостями параллельных переносов.

Рассмотрим в качестве плоскости множество $A^2(O(k)) = O(k) \times O(k)$, объявив *точками* элементы $A^2(O(k))$ (т.е. упорядоченные пары октав), а *прямыми* – множества следующего вида:

$$l_{a,b} = \left\{(x,y) \in A^2(O(k)) \mid y = ax + b\right\},\ a,b \in O(k), \tag{2}$$

$$l_c = \left\{(x,y) \in A^2(O(k)) \middle| x = c\right\},\ c \in O(k). \tag{3}$$

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 1. *$A^2(O(k))$ – плоскость параллельных переносов, не являющаяся дезарговой.*

Чтобы доказать теорему, нам придется познакомиться с некоторыми свойствами алгебры октав $O(k)$.

Лемма 1. *Для произвольных $a,b,c \in O(k)$ справедливы равенства:*

$$a(b+c) = ab + ac,\ (b+c)a = ba + ca. \tag{4}$$

Доказательство. Используя приведенную выше таблицу умножения, легко проверить справедливость леммы в случаях, когда a,b,c – базисные векторы. В общем случае раскладываем векторы a,b,c по базисным и, пользуясь определением умножения по формуле (1), вычисляем левые и правые части формул (4). Далее используем доказанную справедливость (4) для базисных векторов и получаем нужные равенства.◄

Утверждение 1. *Для любого $a = \sum_{i=0}^{7} \lambda_i e_i \in O(k)$ положим:*

$$\overline{a} = \lambda_0 e_0 - \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i \quad и \quad \sum_{i=0}^{7} \lambda_i^2 = N(a).$$

Тогда

1

(i) $a\overline{a}=\left(\sum_{i=0}^{7}\lambda_i^2\right)e_0=N(a)e_0;$

(ii) $\forall\, a,b\in O(k)\;\; N(ab)=N(a)N(b);\;\; N(a)=0 \;\Leftrightarrow\; a=0;$

(iii) $\forall\, a,b\in O(k)\;\; (ab=0)\Rightarrow (a=0$ *или* $b=0).$

(iv) *Положим для* $a\neq 0\;\; a^{-1}=(N(a))^{-1}\overline{a}$. *Тогда* $a^{-1}a=aa^{-1}=e_0$.

Доказательство. Утверждение (i) доказывается прямым вычислением, то же относится и к утверждению (ii). Для доказательства (iii) заметим, что если $ab=0$, то $N(ab)=N(a)N(b)=N(0)=0.$ Если $a\neq 0,\; b\neq 0$, то по утверждению (ii) $N(a)\neq 0,\; N(b)\neq 0$, т.е. $N(ab)\neq 0$, что противоречит предыдущему равенству. Утверждение (iv) доказывается прямым вычислением с учётом определения a^{-1}.◄

Из пункта (ii) доказанного утверждения в случае, когда $k=\mathbf{Q}$, вытекает интересное арифметическое свойство.

Следствие 1. *Пусть m и n целые (рациональные) числа, представимые в виде сумм восьми квадратов целых (рациональных) чисел. Тогда произведение mn представимо в виде суммы восьми квадратов целых (рациональных) чисел.*

Определение 2. *Подпространство L пространства $O(k)$ называется* ***подалгеброй*** *алгебры $O(k)$, если для любых $a,b\in L\;\; ab\in L$.*

Лемма 2. *Пусть L – подалгебра алгебры $O(k)$. Тогда для любого ненулевого $a\in L\;\; a^{-1}\in L$.*

Доказательство. Заметим, что $a^2-\left(a+\overline{a}\right)a+a\overline{a}e_0=0.$ Отсюда, учитывая, что $a^2,\; (a+\overline{a})a\in L,$ получаем: $a\overline{a}e_0\in L$ и $e_0\in L$. Рассмотрим отображение $r_a:L\to L$, сопоставляющее произвольному элементу $l\in L$ элемент la. Нетрудно видеть, что r_a – линейный морфизм векторного пространства L в себя. Этот морфизм инъективен, поскольку для $l_1,l_2\in L$ и $l_1\neq l_2$ при предположении $l_1a=l_2a$ получим $\left(l_1-l_2\right)a=0$, что противоречит пункту (iii) утверждения 1. Линейность и инъективность r_a влечет его сюръективность. Так как $e_0\in L$, то существует $x\in L$ такой, что $xa=e_0$. Следовательно, $x=a^{-1}\in L$ (если предположить, что $x\neq a^{-1}$, то равенство $xa=a^{-1}a$ противоречит инъективности r_a).◄

Пример 1. Пусть $a,b\in O(k)$. Рассмотрим линейную k–оболочку $k\left(a,b\right)$ всевозможных конечных произведений натуральных степеней элементов a и b. Тогда $k(a,b)$ – подалгебра алгебры $O(k)$. Элементы a,b называются ***образующими подалгебры*** $k(a,b)$, а сама подалгебра – ***порождённой*** элементами a,b.

Отметим, что умножение в алгебре октав $O(k)$ не является, в общем случае, ассоциативным. Действительно, пользуясь таблицей умножения, получаем, что $e_1(e_2e_3)=e_6$, а $(e_1e_2)e_3=-e_6$. Если $k-$ поле вещественных чисел или любое его подполе, то элементы e_6 и $-e_6$ различны. Тем не менее, в подалгебре $k(a,b)$ закон ассоциативности всё же имеет место.

Лемма 3. *Для произвольных элементов* $m,n,g\in k(a,b)$ *верно равенство:* $m(ng)=(mn)g$.

Доказательство. Прямое вычисление показывает, что

$$(aa)b=a(ab),\ (ba)a=b(aa) \tag{5}$$

Далее, если m,n,g – произведение натуральных степеней элементов a и b, то доказываемое равенство получается применением равенств (5). Общий случай вытекает из замечания, что элементы из $k(a,b)$ – суть линейные комбинации вышеупомянутых степеней элементов a и b. ◄

Лемма 4. *Множество* $A^2(O(k))$ *с прямыми вида* (2) *и* (3) *является плоскостью аффинного типа.*

Доказательство. Покажем, что для $A^2(O(k))$ выполняются аксиомы **AP₁** – **AP₃** из §1, определяющие плоскость аффинного типа.

AP₁. Пусть (a,b), (c,d) – две различные точки $A^2(O(k))$. Если $a=c$, то обе точки принадлежат прямой l_a. Предположим, что $a\neq c$. Покажем, что (a,b), (c,d) – точки прямой $l_{m,n}$ вида (2), где

$$m=(b-d)(a-c)^{-1},\quad n=b-((b-d)(a-c)^{-1})a.$$

Чтобы показать, что точка (a,b) принадлежит прямой $l_{m,n}$, нужно установить равенство

$$b=\Big(\big(b-d\big)\big(a-c\big)^{-1}\Big)a+\ b-\Big(\big(b-d\big)\big(a-c\big)^{-1}\Big)a,$$

которое, очевидно, верно. Чтобы показать, что точка (c,d) принадлежит прямой $l_{m,n}$, достаточно проверить справедливость равенства

$$d=\Big(\big(b-d\big)\big(a-c\big)^{-1}\Big)c+\ b-\Big(\big(b-d\big)\big(a-c\big)^{-1}\Big)a.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$b-d=\left(\left(b-d\right)\left(a-c\right)^{-1}\right)a-\left(\left(b-d\right)\left(a-c\right)^{-1}\right)c$$

$$\text{или}\quad b-d=\left(\left(b-d\right)\left(a-c\right)^{-1}\right)(a-c).$$

Чтобы доказать последнее равенство, рассмотрим подалгебру, порожденную элементами $b-d$ и $a-c$. Ввиду леммы 2 элемент $\left(a-c\right)^{-1}$ принадлежит этой подалгебре, а ввиду леммы 3 умножение в ней ассоциативно. Таким образом, имеем:

$$\left(\left(b-d\right)\left(a-c\right)^{-1}\right)\left(a-c\right)=\left(b-d\right)\left(\left(a-c\right)^{-1}\left(a-c\right)\right)=b-d\,,$$

что и требовалось. Доказано, что через две различные точки $A^2\left(O\left(k\right)\right)$ проходит прямая. Покажем, что такая прямая единственная.

Пусть сначала $a=c$. Ясно, что если l – другая прямая, проходящая через точки $\left(a,b\right)$, $\left(c,d\right)$, то она не может иметь вид l_n, где $n\neq a$. Если же она имеет вид $l_{m,n}$, то из равенств $b=ma+n,\ d=mc+n$ с учетом $a=c$ получаем: $b=d$, что не так, ввиду $\left(a,b\right)\neq\left(c,d\right)$. Следовательно, через точки $\left(a,b\right)$, $\left(a,d\right)$ проходит ровно одна прямая.

Пусть далее, $a\neq c$. Тогда l не может иметь вид l_n. Если $l=l_{m,n}$, то из равенств $b=ma+n,\ d=mc+n$ элементы m и n находятся однозначно. Таким образом, множество $A^2(O(k))$ удовлетворяет аксиоме **AP$_1$.**

Аксиома **AP$_2$** также выполняется. Вне прямой l_c лежит, например, точка $\left(c+e_0,0\right)$, а вне прямой $l_{m,n}$ – точка $\left(0,n+e_0\right)$.

AP$_3$. Заметим, что прямые $l_{m,n}$ и l_c не параллельны, поскольку, во-первых, имеют общую точку $\left(c,mc+n\right)$ и, во-вторых, точка $\left(c+e_0,m\left(c+e_0\right)+n\right)$, лежащая на прямой $l_{m,n}$, не принадлежит прямой l_c. Таким образом, если задана прямая l_c и точка $\left(a,b\right)$, то единственной прямой, параллельной l_c и проходящей через $\left(a,b\right)$, будет прямая l_a. Рассмотрим теперь прямую $l_{m,n}$ и покажем, что прямая $l_{m',n'}$ ей параллельна в том, и только в том случае, когда $m=m'$. Действительно, пусть $m=m'$ и $\left(a,b\right)$ – общая точка прямых $l_{m,n}$ и $l_{m',n'}$. Тогда $b=ma+n,\ b=ma+n'$. Откуда следует, что $n=n'$. Таким образом, либо $l_{m,n}$ и $l_{m',n'}$ не имеют общих точек, либо совпадают. Пусть теперь $m\neq m'$. Тогда прямые $l_{m,n}$ и $l_{m',n'}$ различны (либо $n\neq n'$, и тогда $\left(0,n'\right)$ – не их общая точка, либо $n=n'$ и тогда такой точкой будет $\left(e_0, m'+n'\right)$). Остается показать, что общая точка у этих прямых имеется – это точка

$$p=(-(m-m')^{-1}(n-n'),\ n-m((m-m')^{-1}(n-n')).$$

В самом деле, имеем очевидное равенство

$$n-m((m-m')^{-1}(n-n'))=m(-(m-m')^{-1}(n-n'))+n$$

и потому $p\in l_{m,n}$. Что касается второй прямой, то точка p лежит на ней, если верно равенство:

$$n-m((m-m')^{-1}(n-n'))=m'(-(m-m')^{-1}(n-n'))+n'.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$\left(n-n'\right)=\left(m-m'\right)((m-m')^{-1}(n-n')).$$

Как и выше, из того, что элементы $\left(m-m'\right)$, $\left(m-m'\right)^{-1}$, $\left(n-n'\right)$ принадлежат подалгебре октав, порожденной $\left(m-m'\right)$ и $\left(n-n'\right)$, следует, что правая часть может быть переписана в виде $((m-m')(m-m')^{-1})(n-n')$, что, очевидно равно $n-n'$ и совпадает с левой частью. Из вышеприведенного заключаем, что при $m\neq m'$ прямые $l_{m,n}$ и $l_{m',n'}$ непараллельны.

Окончательно получаем, что $l_{m,n}\parallel l_{m',n'} \Leftrightarrow m=m'$. Теперь для точки $\left(a,b\right)$ прямая, параллельная $l_{m,n}$ и проходящая через $\left(a,b\right)$, должна иметь вид $l_{m,r}$ и, кроме того, должно быть $b=ma+r$. Последнее равенство показывает, что r однозначно определено заданием этой точки и потому аксиома **AP₃** также выполняется.◄

Следствие 1. *Две прямые в $A^2(O(k))$ параллельны тогда и только тогда, когда либо обе они имеют вид l_c, $l_{c'}$, $c,c'\in O(k)$, либо обе имеют вид $l_{m,n}$, $l_{m,n'}$, $m,n,n'\in O(k)$.*

Лемма 5. *$A^2(O(k))$ – плоскость параллельных переносов.*

Доказательство. Пусть $\left(a,b\right)$, $\left(c,d\right)\in A^2(O(k))$ и пусть $\left(x,y\right)$ – произвольная точка плоскости $A^2(O(k))$. Положим

$$\tau_{(a,b),(c,d)}\left(x,y\right)=\left(x+\left(c-a\right),\ y+\left(d-b\right)\right).$$

Возникшее отображение $\tau_{(a,b),(c,d)}: A^2(O(k))\to A^2(O(k))$, очевидно, переводит точку $\left(a,b\right)$ в $\left(c,d\right)$. Остается показать, что $\tau_{(a,b),(c,d)}$ – параллельный перенос. Заметим, что образом прямой l_r при отображении $\tau_{(a,b),(c,d)}$

является прямая $l_{r+(c-a)}$, параллельная l_r, а прямая $l_{m,n}$ имеет образом прямую $l_{m,\,n-m(c-a)+(d-b)}$, параллельную ей ввиду следствия 1. Стало быть, $\tau_{(a,b),(c,d)}$ – дилатация, очевидно, не имеющая неподвижных точек, когда $(a,b)\neq(c,d)$ и тождественная в противном случае. Таким образом $\tau_{(a,b),(c,d)}$ – параллельный перенос.◄

Доказательство основной теоремы. Первая часть теоремы вытекает из леммы 5. Остается установить недезарговость $A^2(O(k))$.

Предположим, что $A^2(O(k))$ дезаргова. Тогда, ввиду теоремы 10.4., для всякой тройки коллинеарных попарно различных точек O,P,R должна существовать гомотетия с центром O, переводящая P в R. Мы получим противоречие, взяв в качестве точек O,P,R соответственно точки $(0,0)$, $(0,e_0)$, $(0,e_1)$ (очевидно принадлежащие прямой l_0). Пусть γ – соответствующая гомотетия. Более точно, мы покажем, что образ прямой l_{e_5,e_2} совпадает с прямой $l_{-e_5,-e_4}$. Последнее противоречит тому, что γ – гомотетия, поскольку эти прямые не параллельны. Чтобы доказать совпадение $\gamma\left(l_{e_5,e_2}\right)$ и $l_{-e_5,-e_4}$, заметим, что прямая l_{e_5,e_2} проходит через точки $(0,e_2)$ и $(e_3,0)$. Если показать, что $\gamma(0,e_2)=(0,-e_4)$ и $\gamma(e_3,0)=(-e_7,0)$, то $\gamma\left(l_{e_5,e_2}\right)=l_{-e_5,-e_4}$. Таким образом, остается показать, что

$$\gamma(0,e_2)=(0,-e_4)=(0,e_2e_1),\quad \gamma(e_3,0)=(-e_7,0)=(e_3e_1,0).$$

Последнее же будет вытекать из справедливости двух следующих равенств для $a\in O(k),\ a\neq 0$:

$$\gamma(a,0)=(ae_1,0), \tag{6}$$

$$\gamma(0,a)=(0,ae_1). \tag{7}$$

Обратимся к равенству (6). Рассмотрим прямую $l((a,0),(0,e_0))$. При гомотетии γ она переходит в параллельную прямую, поэтому $l((a,0),(0,e_0))\,||\,l(\gamma(a,0),\gamma(0,e_0))$. Так как $l((a,0),(0,e_0))=l_{-a^{-1},e_0}$, то прямая $l(\gamma(a,0),\gamma(0,e_0))$, будучи параллельной l_{-a^{-1},e_0}, имеет вид $l_{-a^{-1},r}$ для подходящего $r\in O(k)$. Из того, что $(0,e_1)\in l_{-a^{-1},r}$ следует, что $r=e_1$ и $\gamma(l_{-a^{-1},e_0})=l_{-a^{-1},e_1}$. Заметим, что $(a,0)\in l_{-a^{-1},e_0}\bigcap l_{0,0}$. Тогда, с учетом того, что $\gamma\left(l_{0,0}\right)=l_{0,0}$, получим: $\gamma\left(a,0\right)\in l_{-a^{-1},e_1}\bigcap l_{0,0}$. Ясно, что $l_{-a^{-1},e_1}\bigcap l_{0,0}=\left\{\left(ae_1,0\right)\right\}$, поэтому равенство (6) установлено.

Из равенства (*) следует, что $\gamma\left(\left(e_0,0\right)\right)=\left(e_1,0\right)$, поэтому $l\left(\left(0,a\right),\left(e_0,0\right)\right)\parallel l\left(\gamma\left(0,a\right),\left(e_1,0\right)\right)$. Далее, аналогично предыдущему имеем:

$$l\left(\left(0,a\right),\left(e_0,0\right)\right)=l_{-a,a},\quad l\left(\gamma\left(0,a\right),\left(e_1,0\right)\right)=l_{-a,ae_1}.$$

Тогда из условий $\left(0,a\right)\in l_{-a,a}\bigcap l_0$ и $\gamma\left(l_0\right)=l_0$ получаем:

$$\gamma\left(\left(0,a\right)\right)\in(l_{-a,ae_1}\bigcap l_0)=\left\{\left(0,ae_1\right)\right\},$$

что доказывает (7). ◄