

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЭКСПОНЕНТЫ ВИЕТОРИСА

Данная работа посвящена исследованию вопроса о непрерывном продолжении функтора exp (экспонента Виеториса) на категории, более широкие, чем категория COMP компактных хаусдорфовых пространств (компактов) и их непрерывных отображений.

Начнем с некоторых определений и обозначений. Все топологические пространства предполагаются T_1 -пространствами, а отображения непрерывными, если иное не оговорено. Для данного пространства X , множества $A \subseteq X$ и точки $x \in X$ будем обозначать: τ_X и φ_X — топология и, соответственно, семейство всех замкнутых подмножеств пространства X , $\tau_X(x)$ ($\tau_X(A)$) — семейство всех окрестностей точки x (соответственно, множества A), $[A]_X$ — замыкание A в X , $T_1(A) = \{F \in \varphi_X \mid F \cap A \neq \emptyset\}$, $T_2(A) = \{F \in \varphi_X \mid \emptyset \neq F \subseteq A\}$. Символом $\text{exp}X$ обозначается пространство всех непустых замкнутых подмножеств пространства X , снабженное топологией Виеториса, предбазу которой составляют множества вида $T_1(U)$ и $T_2(U)$, где $U \in \tau_X$. Множество A называют дискретным в X , если оно замкнуто в X и дискретно как подпространство. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называют замкнутым, если $f(F) \in \varphi_Y$ для любого $F \in \varphi_X$. Отображение f называют совершенным (квазисовершенным), если оно замкнуто и имеет компактные (соответственно, счетно компактные) прообразы точек. Для данного покрытия α пространства X и точки $x \in X$ через αx обозначим звезду точки x , т.е. $\alpha x = \bigcup \{V \in \alpha \mid x \in V\}$.

1. Растяжимые пространства.

Определение 1. Топологическое пространство X назовем растяжимым, если для любого $A \subseteq X$ из того, что $[A]_X$ не счетно компактно, следует, что существует бесконечное дискретное в X подмножество $B \subseteq A$.

Определение 2. [1]. Топологическое пространство X называется изокомпактным если компактно любое замкнутое счетно компактное подмножество в X .

Утверждение 1. Любое регулярное слабо паракомпактное пространство X растяжимо и изокомпактно.

Доказательство. Изокомпактность слабо паракомпактных пространств хорошо известна [2,с.477]. Докажем растяжимость. Рассмотрим подмножество $A \subseteq X$ такое, что $[A]_X$ не счетно компактно. Пусть $B \subseteq [A]_X$, $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$) и B дискретно в X . В силу регулярности X существует дизъюнктное семейство окрестностей $U_n \in \tau_X(b_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим покрытие $\alpha = \{X \setminus B\} \cup \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$. Регулярность и слабая паракомпактность X влечет существование конечно конечного открытого покрытия β такого, что $\{[V]_X | V \in \beta\}$ вписано в α . Построим теперь бесконечное дискретное в X множество $C \subseteq A$. Выберем произвольно точку $c_1 \in U_1 \cap A$. Нетрудно заметить, что $[\beta c_1]_X \subseteq (X \setminus B) \cup U_1$, откуда следует существование точки $c_2 \in (U_2 \setminus [\beta c_1]_X) \cap A$. Замечаем, что $[\beta c_1]_X \cup [\beta c_2]_X \subseteq (X \setminus B) \cup U_1 \cup U_2$, и выбираем точку $c_3 \in (U_3 \setminus ([\beta c_1]_X \cup [\beta c_2]_X)) \cap A$. Продолжая процесс по индукции, получаем множество $C = \{c_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, где $c_n \in U_n$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что C дискретно как подпространство. Для доказательства замкнутости C рассмотрим произвольную точку $x \in X \setminus C$. Если $\beta x \cap C = \emptyset$, то доказывать нечего. Пусть $c_k \in \beta x \cap C$. Тогда $x \in \beta c_k$, $\beta c_k \setminus \{c_k\} \in \tau_X(x)$ и $(\beta c_k \setminus \{c_k\}) \cap C = \emptyset$, поскольку по построению $c_n \notin \beta c_k$ при $n \neq k$.

Замечание. В утверждении 1 доказано свойство более сильное, чем растяжимость, а именно: если $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq [A]_X$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$) и B дискретно в X , то для любого семейства окрестностей $U_n \in \tau_X(b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, можно выбрать дискретное в X множество $C = \{c_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ ($c_n \neq c_k$ при $n \neq k$) так, что $c_n \in U_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 2. а) Замкнутое подпространство растяжимого пространства растяжимо; б) замкнутое подпространство изокомпактного пространства изокомпактно; в) произведение любой совокупности растяжимых изокомпактных пространств растяжимо и

изокомпактно; г) предел обратного спектра растяжимых изокомпактных хаусдорфовых пространств растяжим и изокомпактен (если не пуст).

Доказательство. Пункт а) очевиден, пункт б) доказан в [1]. Докажем в). Пусть пространства $X_t, t \in T$, растяжимы и изокомпактны, $X = \prod_{t \in T} X_t$, $p_t: X \rightarrow X_t$ — проекции. Докажем, что X растяжимо. Пусть $A \subseteq X$ и $[A]_X$ не счетно компактно. Рассуждая от противного легко показать, что найдется $s \in T$, для которого $[p_s(A)]_{X_s}$ не счетно компактно. В силу растяжимости X_s существует дискретное в X_s подмножество $B \subseteq p_s(A)$, $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$, $(b_n \neq b_k \text{ при } n \neq k)$. Выбирая для каждого $n \in \mathbb{N}$ точку $\xi_n \in A \cap p_s^{-1}(b_n)$ получаем бесконечное дискретное в X подмножество в A . Докажем изокомпактность X . Пусть $F \subseteq X$ замкнуто в X и счетно компактно. Допустим, что F не компактно. Тогда найдется $s \in T$ такое, что $[p_s(F)]_{X_s}$ не компактно, а значит, в силу изокомпактности X_s , и не счетно компактно. Вследствие растяжимости X_s в $p_s(F)$ существует бесконечное дискретное в X_s подмножество. Но тогда (см. выше) существует и бесконечное дискретное в X подмножество в F , что противоречит счетной компактности F . Пункт г) следует из а), б) и в). Утверждение доказано.

Утверждение 3. Квасисовершенные отображения сохраняют растяжимость в сторону образа и в сторону прообраза.

Доказательство. Рассмотрим сюръективное квасисовершенное отображение $f: X \rightarrow Y$. 1). Пусть X — растяжимо. Рассмотрим $A \subseteq Y$ такое, что $[A]_Y$ не счетно компактно. Тогда, поскольку $f([f^{-1}(A)]_X) = [A]_Y$, $[f^{-1}(A)]_X$ не счетно компактно, и следовательно $f^{-1}(A)$ содержит дискретное в X множество $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). Очевидно, что $f(B) \subseteq A$ и любое множество $C \subseteq f(B)$ замкнуто в Y , что доказывает дискретность $f(B)$ в Y . Допустим, что множество $f(B)$ конечно. Тогда для некоторой точки $y \in f(B)$ множество $f^{-1}(y) \cap B$ бесконечно, что противоречит квасисовершенности отображения f . Растяжимость Y доказана.

2). Пусть Y растяжимо, $A \subseteq X$, $[A]_X$ не счетно компактно. Тогда и $[f(A)]_Y$ не счетно компактно, поскольку $[A]_X \subseteq f^{-1}([f(A)]_Y)$. Но тогда существует бесконечное дискретное в Y множество $B \subseteq f(A)$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выбирая для каждого $n \in \mathbb{N}$ точку $c_n \in f^{-1}(b_n) \cap A$ получаем бесконечное дискретное в X множество $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Утверждение доказано.

Учитывая, что изокомпактность сохраняется квазисовершенными отображениями в сторону образа, а совершенными в сторону прообраза [1], получаем

Следствие. Свойство пространства быть растяжимым и изокомпактным сохраняется квазисовершенными отображениями в сторону образа, а совершенными в сторону прообраза.

Совершенство отображения, индуцированного на экспоненты.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ замкнутое отображение. Тогда оно индуцирует непрерывное отображение $f_!: \exp X \rightarrow \exp Y$ по правилу $f_!(F) = f(F)$ ($F \in \exp X$).

Теорема 1. [3] Отображение $f_!$ совершенно тогда и только тогда, когда совершенно f и выполняется следующее условие:

$f^{-1}(f(F)) \setminus U$ компактно для любых $\emptyset \neq F \in \varphi_X$ и $U \in \tau_X(F)$.

Теорема 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ совершенно, сюръективно и одно из пространств X и Y растяжимо и изокомпактно. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $f_!$ совершенно.

б) Существует разложение $Y = Y_0 \cup Y_1$ такое, что $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$, Y_1 компактно и замкнуто в Y , а множество $f^{-1}(y)$ одноточечно для любой точки $y \in Y_0$ (и следовательно $f^{-1}(Y_0) \xrightarrow{f} Y_0$ — гомеоморфизм).

в) Существует разложение $X = X_0 \cup X_1$ такое, что $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, X_1 компактно, а $f^{-1}f(x) = \{x\}$ для любой точки $x \in X_0$ (и следовательно $X_0 \xrightarrow{f} f(X_0)$ — гомеоморфизм).

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Обозначим $M = \{y \in Y \mid |f^{-1}(y)| \geq 2\}$, $Y_1 = [M]_Y$, $Y_0 = Y \setminus Y_1$. Осталось показать, что Y_1 компактно. Если это не

так, то в силу растяжимости и изокомпактности пространства Y существует дискретное в Y множество $\{b_n | n \in N\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$) такое, что $|f^{-1}(b_n)| \geq 2$ для всех $n \in N$. Выбирая для каждого $n \in N$ точки $x_n, z_n \in f^{-1}(b_n)$, $x_n \neq z_n$, получим два дискретных в X множества $F = \{x_n | n \in N\}$ и $\Phi = \{z_n | n \in N\}$. Пусть U — произвольное открытое в X множество такое, что $F \subseteq U$, $U \cap \Phi = \emptyset$. Но тогда $\Phi \subseteq f^{-1}(f(F)) \setminus U$, что противоречит совершенности отображения f_1 в силу теоремы 1.

б) $\Rightarrow$ в). Очевидно. Достаточно положить $X_0 = f^{-1}(Y_0)$, $X_1 = f^{-1}(Y_1)$.

в) $\Rightarrow$ а). Проверим, что $f^{-1}(f(F)) \setminus U$ компактно для любых $\emptyset \neq F \in \varphi_X$ и $U \in \tau_X(F)$. Имеем: $f^{-1}(f(F)) \setminus U = ((f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_0) \cup ((f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_1)$. Легко заметить, что $(f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_0 = \emptyset$, $(f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_1$ компактно. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 2 в пункте б) достаточно требовать компактности подпространства Y_1 , а в пункте в) можно потребовать дополнительно замкнутость в X подпространства X_1 .

3. Критерий непрерывности функтора экспоненты Висториса.

Рассмотрим обратный спектр $S = \{X_t, \pi_t^s, T\}$. Если все связующие отображения π_t^s замкнуты, то определен обратный спектр $\exp S = \{\exp X_t, \Pi_t^s, T\}$, где отображения Π_t^s индуцированы соответственно отображениями π_t^s . Обозначим $L = \lim_{\leftarrow} S$, $\pi_t: L \rightarrow X_t$

— канонические проекции, $L_t = \pi_t(L)$, $t \in T$. Можно показать [4], что если все π_t^s совершенны и имеют хаусдорфовы прообразы точек, то все π_t также совершенны, в частности, L_t замкнуто в X_t для каждого $t \in T$. При этих ограничениях определено каноническое отображение $H: \exp L \rightarrow \lim_{\leftarrow} \exp S$ по правилу $H(F) = (P_t(F))_{t \in T}$, где $F \in \exp L$,

$P_t: \exp L \rightarrow \exp X_t$ индуцированы отображениями π_t , $t \in T$. Обозначим далее для произвольных $s \geq t$: $M_t^s = \{x \in L_t | |(\pi_t^s)^{-1}(x) \cap L_s| \geq 2\}$,

$M_t = \bigcup_{h \geq t} M_t^h$. Ясно, что $\pi_t^s(M_s) \subseteq M_t$.

Теорема 3. Пусть все пространства X_t обратного спектра S регулярны, растяжимы и изокомпактны, а связующие отображения совершенны и индуцируют совершенные отображения на экспоненты. Тогда отображение H является гомеоморфизмом (т.е. функтор exp непрерывен на спектре S) тогда и только тогда, когда множества $[M_t]_{X_t}$ компактны для всех $t \in T$.

Доказательства этой теоремы, а также следствия ниже, данные в [4] для более узкого класса пространств, переносятся на рассматриваемый случай без существенных изменений.

Следствие. Пусть все пространства и связующие отображения спектра S удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда отображение H есть гомеоморфизм тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$ можно подобрать замкнутое в X_t подпространство Y_t и компактное подпространство $\Phi_t \subseteq Y_t$ таким образом, что $\pi_t^s(Y_s) = Y_t$, (и следовательно определен обратный спектр $S_1 = \{Y_t, \pi_t^s|_{Y_s}, T\}$, вложенный в спектр S), $\pi_t^s(\Phi_s) \subseteq \Phi_t$ и $(\pi_t^s)^{-1}(y)$ одноточечно при $s \geq t$ и $y \in Y_t \setminus \Phi_t$ и $L = \varprojlim S_1$.

1. Bacon P. // Pacif. J. Math. 1970. Vol. 32. № 3. P. 587.

2. Энгелькинг Р. Общая топология. М. 1986.

3. Кукрак Г.О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 3. С. 56.

4. Кукрак Г.О., Тимохович В.Л. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 1. С. 51.

In this paper the class of extendable spaces is introduced. For this class of spaces the necessary and sufficient condition for the map induced on the Vietoris hyperspaces to be perfect is obtained. Besides, the functor of the Vietoris hyperspace on the category of regular isocompact extendable spaces and perfect maps which induces perfect maps on the hyperspaces is considered. The necessary and sufficient condition for this functor to be continuous is proved.

Kukrak G.O., Timochovich V.L. On some properties of the Vietoris hyperspaces.

УДК 513.83

Кукрак Г.О., Тимохович В.Л. **О некоторых свойствах экспоненты Виеториса** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1.

В работе определен класс растяжимых пространств. Для этого класса пространств установлен критерий совершенности отображения, индуцированного на экспоненты Виеториса. Доказан критерий непрерывности функтора экспоненты Виеториса на обратных спектрах, пространства в которых регулярны, растяжимы и изокомпактны, а связующие отображения совершенны и индуцируют совершенные отображения на экспоненты.

Библиогр. 4 назв.