

Некоторые топологические свойства пространства отображений

Предлагаемая заметка дополняет работу [1], где рассмотрены некоторые топологические свойства пространства непрерывных отображений. Под пространством понимается топологическое T_1 -пространство, под отображением – непрерывное отображение. Основные результаты, сформулированные как следствия в п.п. 2.8, 3.6 и 4.3 существенно усиливают аналогичные утверждения из [1].

1. Основные понятия и обозначения. Как и в [1] для произвольных пространства X , множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ обозначим: τ_X и φ_X – топология пространства X и, соответственно, семейство всех замкнутых в X множеств; $[A]_X$ и $\tau_X(A)$ – замыкание и, соответственно, семейство всех окрестностей множества A в X , $\tau_X(x) = \tau_X(\{x\})$; $\exp X$ – экспонента пространства X , т.е. множество $\varphi_X \setminus \{\emptyset\}$, снабженное топологией Виеториса, предбазой которой служит семейство всех множеств вида $T_1(U) = \{F \in \exp X \mid F \cap U \neq \emptyset\}$ и $T_2(U) = \{F \in \exp X \mid F \subset U\}$, где $U \in \tau_X$; $C(X, Y)$ – множество всех отображений пространства X в пространство Y ;
 $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ – график отображения $f \in C(X, Y)$;
 $T(X, Y) = \{f \in C(X, Y) \mid \text{множество } f(X) \text{ одноточечно}\}.$

Семейство α некоторых множеств в пространстве X называют дискретным в X , если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \in \tau_X(x)$; пересекающаяся не более, чем с одним элементом α . Множество A дискретно в X , если дискретно в X семейство $\{\{a\} \mid a \in A\}$.

Последовательность покрытий α_n пространства X называется измельчением, а X при этом называют измельчающимся, если для любых $x \in X$ и $U \in \tau_X(x)$ можно подобрать $n \in N$, для которого $\bigcup \{V \in \alpha_n \mid x \in V\} \subset U$.

Топологию τ_X называют секвенциальной, если для любого не замкнутого в X множества A найдутся точка $x \in X \setminus A$ и последовательность точек $a_n \in A, n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к x . Говорят, что топология τ_X имеет счетную тесноту, если для любых

$A \subset X$ и $x \in [A]_X \setminus A$ существует счетное $B \subset A$, для которого $[B]_X \ni x$. Наконец, назовем τ_X κ -топологией (при этом X называют κ -пространством), если для любого не замкнутого в X множества A найдется компактное $B \subset X$ такое, что $A \cap B$ не замкнуто в B . Отметим, что любая топология, удовлетворяющая первой аксиоме счетности, секвенциальна, любая секвенциальная является κ -топологией и (факт очевидный) имеет счетную тесноту.

Если пространство Y хаусдорфово, то определена инъекция $C(X, Y) \xrightarrow{\Gamma} \exp(X \times Y) : f \rightarrow \Gamma_f$, посредством которой на $C(X, Y)$ индуцируется экспоненциальная топология $\tau_{\exp}^{(X, Y)}$. Отметим как очевидное хаусдорфовость $\tau_{\exp}^{(X, Y)}$.

Если Y метризуемо, Ω_Y – множество всех допустимых метрик на Y , то на $C(X, Y)$ определены для каждой $\rho \in \Omega_Y$ соответствующая топология равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$, заданная метрикой $\mu = \mu(\rho)$, $\mu(f, g) = \sup \{ \rho(f(x), g(x)) \mid x \in X \}$ (здесь допускается равенство $\mu(f, g) = \infty$, что, очевидно, не влияет на топологию), а также супремальная топология $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$, предбазой которой служит семейство $\bigcup \{ \tau_{\mu(\rho)}^{(X, Y)} \mid \rho \in \Omega_Y \}$ (т. е. топология $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$ наименьшая, содержащая все топологии вида $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$). Очевидно, что топология $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$ хаусдорфова.

Более подробно об указанных понятиях см., например, [2], [3].

2. Топология $\tau_{\exp}^{(X, Y)}$. Далее считаем пространство Y хаусдорфовым.

Сформулируем некоторые известные факты.

2.1. Утверждение. Семейство всех множеств вида $O(U) = \{ f \in C(X, Y) \mid \Gamma_f \subset U \}$, где $U \in \tau_{X \times Y}$, является базой топологии $\tau_{\exp}^{(X, Y)}$.

2.2. Утверждение. Если пространство X счетно компактно, а Y измельчается, то топология $\tau_{\exp}^{(X, Y)}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Доказательства 2.1 и 2.2 см. в [1].

2.3. Определение. Скажем, что упорядоченная пара произвольных пространств (X, Z) удовлетворяет условию (T) (ср. с определением тихоновской пары в [1]), если в Z найдется точка z_0 (базовая) такая, что для любых

$V \in \tau_z(z_0)$, $F \in \varphi_X \setminus \{\emptyset, X\}$ и $x \in X \setminus F$ можно указать отображение $f \in C(X, Z)$, для которого $f(X) \subset V$, $f(F) = \{z_0\}$ и $f(x) \neq z_0$.

2.4. Замечание. Условию (T) удовлетворяет любая пара (X, Z) , где X вполне регулярно, а Z содержит нетривиальную кривую (т. е. неодноточечный непрерывный образ отрезка).

2.5. Теорема. Пусть пространство X регулярно, пара (X, Y) удовлетворяет условию (T) , и при этом по крайней мере базовая точка $y_0 \in Y$ имеет в Y счетную локальную базу. Тогда, если топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ имеет счетную тесноту, то пространство X счетно компактно.

Доказательство. Допустим от противного, что X не счетно компактно. Тогда найдется дискретное в X множество $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ (см. [2], с. 304). Поскольку X регулярно, и $B \in \varphi_X$ для любого $B \subset A$, можно для каждого $n \in \mathbb{N}$ подобрать пару окрестностей $(U_n, H_n) \subset \tau_X(a_n)$ так, чтобы $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $[H_n]_X \subset U_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем базовую точку $y_0 \in Y$ и пусть $\{V_n \in \tau_Y(y_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ – ее локальная база в Y , $V_1 \supset V_2 \supset \dots$. Рассмотрим отображение $f \in T(X, Y)$, $f(X) = \{y_0\}$. Отметим, что $\Gamma_f = X \times \{y_0\}$. Фиксируем произвольную окрестность $O(Q) \ni f$ ($\Gamma_f \subset Q \in \tau_{X \times Y}$, см. 2.1) и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем окрестности $O_n \in \tau_X(a_n)$, $W_n \in \tau_Y(y_0)$ и отображение $f_n \in C(X, Y)$ такие, что $O_n \subset H_n$, $W_n \subset V_n$, $O_n \times W_n \subset Q$, $f_n(X) \subset W_n$, $f_n(X \setminus O_n) = \{y_0\}$ и $f_n(a_n) \neq y_0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Далее определим отображение $f_Q : X \rightarrow Y$, $f_Q(x) = y_0$ при $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, $f_Q(x) = f_n(x)$ при $x \in O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Проверим, что $f_Q \in C(X, Y)$.

Фиксируем произвольную точку $x_0 \in X$. Если $x_0 \in U_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $f_Q|_{U_n} = f_n|_{U_n}$, и, следовательно, f_Q непрерывно в точке x_0 . Если же $x_0 \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, то $f_Q(x_0) = y_0$. Тогда для любой окрестности $V_n \ni y_0$, очевидно, существует окрестность $G \in \tau_X(x_0)$, для которой $G \cap \left(\bigcup_{i=1}^n [H_i]_X \right) = \emptyset$. Несложно проверить, что

$f_Q(G) \subset \bigcup_{i=n+1}^{\infty} W_i \subset V_n$. Итак, $f_Q \in C(X, Y)$. Ясно также, что $f_Q \in O(Q)$. Обозначим

$\Sigma = \{f_Q \mid \Gamma_f \subset Q \in \tau_{X \times Y}\}$. Ясно (см. 2.1), что f является точкой прикосновения для Σ , но $f \notin \Sigma$. В силу счетной тесноты f является точкой прикосновения для некоторого множества отображений $h_n \in \Sigma$, $h_n = f_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $E = (X \times Y) \setminus \{(a_n, h_n(a_n)) \in X \times Y \mid n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что $\Gamma_f \subset E \in \tau_{X \times Y}$, т. е. $f \in O(E)$, но $h_n \notin O(E)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что ведет к противоречию. Теорема доказана.

2.6. Замечание. Если в теореме 2.5 регулярность пространства X усилить до нормальности, то требование наличия счетной локальной базы в точке y_0 можно опустить. Доказательство в этом случае опирается на существование дискретного семейства окрестностей $\{U_a \in \tau_X(a) \mid a \in A\}$ для любого дискретного в X счетного множества A (см. [2], с. 119).

2.7. Теорема. Пусть пространство X регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности, пара (X, Y) удовлетворяет условию (T) , и при этом базовая точка y_0 имеет в Y счетную локальную базу, а топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ является κ -топологией. Тогда пространство X счетно компактно.

Доказательство. Считаем A, U_n, H_n, V_n и f теми же, что и в доказательстве 2.5, $\{O_k^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ – локальная база в X точки a_n , $H_n \supset O_1^n \supset O_2^n \supset \dots$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждой упорядоченной пары $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ фиксируем отображение $f_k^n \in C(X, Y)$, $f_k^n(x) = y_0$ при $x \in X \setminus O_k^n$, $f_k^n(O_k^n) \subset V_k \setminus \{f_i^n(a_n) \mid 1 \leq i < k\}$, $f_k^n(a_n) \neq y_0$. Обозначим $\Lambda = \{\bar{k} = (k_1, k_2, \dots) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \mid k_1 < k_2 < \dots\}$ и для каждого $\bar{k} \in \Lambda$ определим отображение $f_{\bar{k}} : X \rightarrow Y$, $f(x) = y_0$ при $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{k_n}^n$, $f(x) = f_{k_n}^n(x)$ при $x \in O_{k_n}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Непрерывность $f_{\bar{k}}$ доказывается как и в 2.5. Ясно, что множество $\Sigma = \{f_{\bar{k}} \mid \bar{k} \in \Lambda\}$ дискретно в себе, $f \notin \Sigma$, но f – точка прикосновения для Σ . Но тогда найдется компактное (относительно $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$) множество $\Omega \subset C(X, Y)$ такое, что $\Omega \cap \Sigma$ не замкнуто в Ω , в частности бесконечно. Выберем произвольным образом множество $\Delta = \{h_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega \cap \Sigma$, $h_n \neq h_m$ при $n \neq m$, и рассмотрим отображение

$h \in \Omega \setminus \Delta$, являющееся предельной точкой для Δ . Обозначим

$F_n = \{f_k^n(a_n) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}$ и исследуем следующие случаи.

(A) $h(a_n) \notin F_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим открытое в $X \times Y$ множество $G = (X \times (Y \setminus F_n)) \cup ((X \setminus \{a_n\}) \times Y)$. Поскольку $h \in O(G)$, но $O(G) \cap \Delta = \emptyset$, случай (A) невозможен.

(B) $h(a_n) = y_0$ и $h(a_m) = f_k^m(a_m)$ для некоторых n, m, k и $n < m$. Для точек y_0 и $f_k^m(a_m)$ фиксируем окрестности V_p и W соответственно такие, что $V_p \cap \{f_i^n(a_n) \mid 1 \leq i \leq k\} = \emptyset$ и $W \cap F_m = \{f_k^m(a_m)\}$, и определим открытое в $X \times Y$ множество $G = ((X \setminus \{a_m\}) \times V_p) \cup ((X \setminus \{a_n\}) \times W) \cup ((X \setminus \{a_n, a_m\}) \times Y)$. Поскольку $h \in O(G)$, но $O(G) \cap \Delta = \emptyset$, случай (B) невозможен.

(C) $h(a_n) = f_k^n(a_n)$ и $h(a_m) = f_p^m(a_m)$ для некоторых n, m, k, p и $n < m, k \geq p$.

Для точек $f_k^n(a_n)$ и $f_p^m(a_m)$ подберем окрестности V и W соответственно, $V \cap F_n = \{f_k^n(a_n)\}$ и $W \cap F_m = \{f_p^m(a_m)\}$, и положим $G = ((X \setminus \{a_m\}) \times V) \cup ((X \setminus \{a_n\}) \times W) \cup ((X \setminus \{a_n, a_m\}) \times Y)$. Так как $G \in \tau_{X \times Y}$, $h \in O(G)$, но $O(G) \cap \Delta = \emptyset$, случай (C) также невозможен.

(D) $h(a_n) = f_{k_n}^n(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $k_1 < k_2 < \dots$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем окрестность $W_n \in \tau_Y(f_{k_n}^n(a_n))$, $W_n \cap F_n = \{f_{k_n}^n(a_n)\}$, и определим $G \in \tau_{X \times Y}$, $G = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ((X \setminus (A \setminus \{a_n\})) \times W_n) \right) \cup ((X \setminus A) \times Y)$. Ясно, что $h \in O(G)$ и $O(G) \cap \Sigma = \{f_{\bar{k}}\}$, $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots)$. Итак, и случай (D) оказывается невозможным.

Таким образом показано, что найдется $m \in \mathbb{N}$ ($m = m(h)$) такое, что $h(a_n) = y_0$ для любого $n \geq m$. Теперь применим к Δ следующую процедуру. Положим формально $\Delta_0 = \Delta$, $N_0 = \mathbb{N}$, $n_2^0 = 1$, $m_1^0 = m_0^1 = 0$ и строим поэтапно множества $N_1 = \{n_i^1 \mid i \in \mathbb{N}\} \subset N_0$, $n_2^0 = n_1^1 < n_2^1 < \dots$, и $M_1 = \{m_i^1 \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, $m_1^0 < m_1^1 < m_2^1 < \dots$, $n_{i+1}^1 = \min \{n > n_i^1 \mid h_{n_i^1}(a_m) \neq h_n(a_m)\}$ для некоторого $m > m_{i-1}^1$,

$m_i^1 = \min \left\{ m > m_{i-1}^1 \mid h_{n_i^1}(a_m) \neq h_{n_{i+1}^1}(a_m) \right\}$, $i \in \mathbb{N}$. Такое построение возможно, поскольку в противном случае найдется $p \in \mathbb{N}$ такое, что $h_i(a_i) = h_j(a_i)$ для любых $i \geq p, j \geq p$, откуда следует конечность множества Δ , что влечет противоречие. Далее положив $m_0^2 = m_1^1$, мы можем применить указанную процедуру к множеству $\Delta_1 = \left\{ h_{n_i^1} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ и т. д. В итоге получим последовательности множеств $M_i = \left\{ m_j^i \mid j \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{N}$, $m_1^{i-1} < m_1^i < m_2^i < \dots$, $i \in \mathbb{N}$, и $N_i = \left\{ n_j^i \mid j \in \mathbb{N} \right\}$, $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$, $n_2^{i-1} = n_1^i < n_2^i < \dots$, $i \in \mathbb{N}$, причем $h_{n_i^i}(a_{m_j^i}) \neq h_{n_{j+1}^i}(a_{m_j^i})$ для любых $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$. Определим открытые в $X \times Y$ множества $E_i = (X \times Y) \setminus \left\{ (a_{m_j^i}, h_{n_{j+1}^i}(a_{m_j^i})) \mid j \in \mathbb{N} \right\}$. Очевидно, что $O(E_i) \ni h$, но $O(E_i) \cap \left\{ h_{n_j^i} \mid j \geq 2 \right\} = \emptyset$, для любого $i \in \mathbb{N}$. Ясно также, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} O(E_i) \ni h$ для любых бесконечного $\Delta_* \subset \Delta$ и $h \in [\Delta_*]_{\Omega} \setminus \Delta_*$. Положим $\Delta_* = \left\{ h_{n_i^i} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ и рассмотрим компакт $K = [\Delta_*]_{\Omega}$. Поскольку $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O(E_i)$, но K не покрывается конечным числом множеств $O(E_i)$, получаем противоречие. Теорема доказана.

Привлекая 2.2, получаем следующее (два следствия одной формулировкой).

2.8. Следствия. Если пара (X, Y) удовлетворяет условию (T), пространство X регулярно (регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности), а Y измельчается, то эквивалентны следующие условия: (a) топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ имеет счетную тесноту (является κ -топологией соответственно); (b) топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности; (c) пространство X счетно компактно.

3. Топология $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$. Далее считаем пространство Y метризуемым.

3.1. Утверждение. Для любого $f \in C(X, Y)$ семейство открытых шаров $\left\{ B_{\mu(\rho)}(f, \varepsilon) \mid \rho \in \Omega_Y, \varepsilon > 0 \right\}$ является локальной базой для f в топологии $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$.

3.2. Утверждение. Если множество $[f(X)]_Y$ компактно для любого $f \in C(X, Y)$, то все топологии вида $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$, $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega_Y$, совпадают.

3.3. Утверждение. Для любых дискретного в Y семейства $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ и множества $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, где $U_n \in \tau_Y(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, существует метрика $\sigma \in \Omega_Y$ такая, что $B_\sigma(a_n, 1) \subset U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательства 3.1 – 3.3 см. в [1].

3.4. Определение [1]. Произвольное пространство X назовем локально подвижным, если для любой пары (x_0, U) , где $x_0 \in X$, $U \in \tau_X(x_0)$, найдутся окрестность $V \in \tau_X(x_0)$ и отображение $f \in C(X, X)$ такие, что $V \subset U$, $f(x) = x$ при $x \in X \setminus V$, $f(V) \subset V$ и $f(x_0) \neq x_0$.

Отметим, что локально подвижным является любое регулярное пространство, локально гомеоморфное линейному нормированному.

3.5. Теорема. Пусть пространство Y локально подвижно, а топология $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$ имеет счетную тесноту или является κ -топологией. Тогда множество $[f(X)]_Y$ компактно для любого $f \in C(X, Y)$.

Доказательство. Допустим от противного, что найдутся $f \in C(X, Y)$ и дискретное в Y множество $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset [f(X)]_Y$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Подберем дискретное в Y семейство окрестностей $U_n \in \tau_Y(a_n)$ (см. [2], с.с. 444, 452, 453) и точки $b_n \in U_n \cap f(X)$, $b_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $\rho \in \Omega_Y$ и упорядоченной пары $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ выберем открытый шар $B_\rho(b_n, \varepsilon_n) \subset U_n$, $0 < \varepsilon_n \leq 1$, окрестность $V_n^{(\rho, k)} \in \tau_Y(b_n)$, $V_n^{(\rho, k)} \subset B_\rho\left(b_n, \frac{\varepsilon_n}{3k}\right)$, и отображение $f_n^{(\rho, k)} \in C(Y, Y)$, для которого (см. 3.4) $f_n^{(\rho, k)}(x) = x$ при $x \in X \setminus V_n^{(\rho, k)}$, $f_n^{(\rho, k)}(V_n^{(\rho, k)}) \subset V_n^{(\rho, k)}$ и $f_n^{(\rho, k)}(b_n) \neq b_n$. Определим $f_n^\rho \in C(Y, Y)$, $f_n^\rho(x) = x$ при $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^{(\rho, k)}$ и $f_n^\rho(x) = f_n^{(\rho, k)}(x)$ при $x \in V_n^{(\rho, k)}$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $h_k^\rho = f_k^\rho \circ f$, $\Sigma = \{h_k^\rho | \rho \in \Omega_Y, k \in \mathbb{N}\}$, $\Sigma^* = \{h \in C(X, Y) |$ существует бесконечное $M \subset \mathbb{N}$ такое, что $h(x_m) \neq b_m$ при $m \in M\}$. Очевидно, $\Sigma \subset \Sigma^*$.

Поскольку $\mu(f, h_k^\rho) < \frac{1}{k}$ для любых $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega_Y$, и $k \in \mathbb{N}$, то f является точкой прикосновения для Σ (см. 3.1), и тем более для Σ^* , но $f \notin \Sigma^*$. Далее рассмотрим указанные выше варианты.

(A) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ имеет счетную тесноту. Тогда найдется множество $\Delta = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$, $h_i = h_{k_i}^{\rho_i}$, $i \in \mathbb{N}$, для которого f является предельной точкой. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ фиксируем $W_i \in \tau_Y(b_i)$, $W_i \subset V_i^{(\rho_i, k_i)} \setminus f_{k_i}^{\rho_i}(b_i)$, и подберем метрику $\sigma \in \Omega_Y$, для которой $B_\sigma(b_i, 1) \subset W_i$ при любом $i \in \mathbb{N}$ (см. 3.3). Очевидно, $B_{\mu(\sigma)}(f, 1) \cap \Delta = \emptyset$, что влечет противоречие.

(B) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ – κ -топология. Тогда найдутся компакт $K \subset C(X, Y)$ и отображение $g \in K \setminus \Sigma^*$, являющееся предельной точкой для множества $K \cap \Sigma^*$. В силу определения Σ^* существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $g(x_n) = b_n$ при $n \geq m_0$. Несложно заметить, что компакт K метризуем. Но тогда к g сходится некоторая последовательность отображений $h_n \in K \cap \Sigma^*$. Далее подберем $n_i \in \mathbb{N}$, $m_0 \leq n_1 < n_2 < \dots$, так, чтобы $h_i(x_{n_i}) \neq b_{n_i}$ при любом $i \in \mathbb{N}$, для каждого $i \in \mathbb{N}$ фиксируем $W_i \in \tau_Y(b_{n_i})$, $W_i \subset U_{n_i} \setminus h_i(x_{n_i})$, и выберем метрику $\sigma \in \Omega_Y$, для которой $B_\sigma(b_{n_i}, 1) \subset W_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Поскольку $B_{\mu(\sigma)}(g, 1) \cap \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, получаем противоречие. Теорема доказана.

Учитывая 3.2, получаем следующее.

3.6. Следствие. При локально подвижном пространстве Y эквивалентны условия: (а) топология $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ имеет счетную тесноту; (б) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ – κ -топология; (с) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ совпадает с любой топологией вида $\tau_\mu^{(X,Y)}$, $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega_Y$; (д) множество $[f(X)]_Y$ компактно для любого $f \in C(X, Y)$.

4. Топологии $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ и $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$. Пространство Y по-прежнему считаем метризуемым. Уточним известное соотношение $\tau_{\sup}^{(X,Y)} \subset \tau_{\exp}^{(X,Y)}$ (см. [1]).

4.1. Утверждение. При счетно компактном X топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ совпадает с любой топологией вида $\tau_\mu^{(X,Y)}$, $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega_Y$, в частности $\tau_{\exp}^{(X,Y)} = \tau_{\sup}^{(X,Y)}$.

4.2. Утверждение. Если Y не дискретно, и топологии $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ и $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ совпадают на множестве $T(X, Y)$ (т. е. индуцируют на $T(X, Y)$ одну и ту же топологию), то X счетно компактно.

Доказательства 4.1 и 4.2 см. в [1].

Из 4.1, 4.2, 2.5 и 2.7 вытекает следующее.

4.3. Следствия. Пусть пространство X регулярно (регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности), а пара (X, Y) удовлетворяет условию (T). Тогда эквивалентны условия: (а) топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ имеет счетную тесноту (является κ -топологией соответственно); (б) топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ совпадает с любой топологией вида $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ ($\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega_Y$); (в) топологии $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$ и $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ совпадают; (д) топологии $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$ и $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ совпадают на множестве $T(X, Y)$; (е) пространство X счетно компактно.

1. Тимохович В.Л., Фролова Д.С. Вестн. БГУ. Сер.1. 2009. № 3.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.
3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 2006.

Реферат

В работе изучаются различные топологии на множестве непрерывных отображений $C(X, Y)$, в частности экспоненциальная топология $\tau_{\exp}^{(X, Y)}$, топология равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ и топология $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$, определённая как супремум всех топологий вида $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$.

Основными являются следующие результаты 1, 2. Пространства X и Y подчинены некоторым естественным дополнительным условиям, причём в 1 Y хаусдорфово с измельчением, в 2 метризуемо.

1. Пространство $(C(X, Y), \tau_{\exp}^{(X, Y)})$ является k -пространством тогда и только тогда когда X счётно компактно.
2. Пространство $(C(X, Y), \tau_{\sup}^{(X, Y)})$ является k -пространством тогда и только тогда, когда компактно замыкание в Y любого множества $f(X)$, где $f \in C(X, Y)$. При этом все топологии вида $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ совпадают с $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$.

Утверждения в п.п. 1 и 2 остаются справедливыми при замене условия для $C(X, Y)$ быть k -пространством на условие иметь счётную тесноту.

Авторы

Тимохович Владимир Леонидович

Белгосуниверситет, ММФ, кафедра геометрии, топологии и МПМ

доцент, кандидат физ.-мат. наук

домашний адрес: ул. Грушевская, д. 131, кв. 33, г. Минск

д. телефон 226-28-13

р. телефон 226-59-45

Кукрак Глеб Олегович

Белгосуниверситет, ММФ, кафедра геометрии, топологии и МПМ

ст. преподаватель, кандидат физ.-мат. наук

домашний адрес: ул. Берута, д.6, к.3, кв.17, г. Минск

д. телефон 251-23-93

р. телефон 226-59-45

Title: Some topological properties of mappings space

Authors: Kukrak H.O., Timohovich V.L.

Resume:

The subject of the study is different topologies on the set of continuous maps $C(X, Y)$, especially the exponential topology $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$, the topology of uniform convergence $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ and the topology $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$ determined as the supremum of all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$.

The following results 1, 2 are the main. Spaces X and Y are satisfies some natural conditions. Moreover, space Y is Hausdorff and developable in 1 and metrizable in 2.

1. The space $(C(X, Y), \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)})$ is a k-space if and only if space X is countably compact.
2. The space $(C(X, Y), \tau_{\sup}^{(X, Y)})$ is a k-space if and only if the closure in Y of any set $f(X)$, where $f \in C(X, Y)$, is compact. At that all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ are coincides with the topology $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$.