БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра математической физики

Е. С. ЧЕБ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций

Линейные ограниченные операторы

Минск
2007

Оглавление

3. Теория линейных ограниченных операторов

3.1. Линейные ограниченные операторы (основные понятия)

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства и пусть множество $\mathscr{D}(A) \subseteq X$. Если каждому элементу $x \in \mathscr{D}(A)$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что задан оператор A и $y = Ax$. При этом множество $\mathscr{D}(A)$ называют *областью определения* оператора A. Множество $\mathscr{R}(A) = \{y \in Y : \exists x \in \mathscr{D}(A), y = Ax\}$ называют *областью значений* оператора A. В дальнейшем мы будем изучать линейные операторы, постоянно встречающиеся в приложениях. К тому же теория линейных операторов, обладающих целым рядом хороших свойств, разработана значительно лучше, чем теория нелинейных операторов.

Определение 3.1.1. Оператор $A : X \to Y$ с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ называют *линейным*, если:

1) область определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A – линейное многообразие, т. е. если $x,y \in \mathscr{D}(A)$, то $\alpha x + \beta y \in \mathscr{D}(A)$ для всех скаляров $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$;
2) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для любых элементов $x,y \in \mathscr{D}(A)$ и любых скаляров $\alpha,\beta \in \mathcal{K}$.

Лемма 3.1.1. *Область значений всякого линейного оператора является линейным многообразием.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in \mathscr{R}(A)$ и α,β – произвольные скаляры из поля $\mathcal{K}$. Рассмотрим элемент $x_1 \in \mathscr{D}(A)$ – прообраз y_1, и $x_2 \in \mathscr{D}(A)$ – прообраз y_2, тогда $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. Учитывая линейность оператора A, получим

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Это означает, что элемент $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathscr{D}(A)$ является прообразом элемента $\alpha y_1 + \beta y_2$, т. е. последний принадлежит $\mathscr{R}(A)$. $\otimes$

Практически наиболее важны два случая задания линейных операторов:

1) $\mathscr{D}(A) = X$, т. е. оператор A задан всюду в нормированном пространстве X;
2) $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$, т. е. оператор A задан плотно в X.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать лишь такие линейные операторы.

Определение 3.1.2. Линейный оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\|_X < \delta$, выполняется $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

Оказывается, судить о непрерывности линейного оператора в различных точках $x_0 \in X$ можно по непрерывности его в нуле пространства X.

Теорема 3.1.1. *Пусть X, Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора A эквивалентны:*

1) оператор A непрерывен в точке $x = 0$;
2) оператор A непрерывен в любой точке пространства X;
3) оператор A равномерно непрерывен.

Доказательство. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) справедлива для любого отображения. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Действительно, пусть точка $x_0 \in X$ и оператор A непрерывен в x_0, тогда $\|Ax - Ax_0\|_Y \to 0$ при $\|x - x_0\|_X \to 0$. Тогда $\|A(x - x_0)\|_Y \to 0$ при $\|x - x_0\|_X \to 0$. Обозначим через $z = x - x_0$. Последнее соотношение означает, что $\|Az\|_Y \to 0$ при $\|z\|_X \to 0$, т. е. оператор A непрерывен в нуле.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть A непрерывен в нуле. По определению оператор A равномерно непрерывен, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x,y \in X$ таких, что $\|x - y\|_X < \delta$, имеем $\|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon$, или $\|A(x - y)\|_Y < \varepsilon$. Обозначив через $z = x - y$, видим, что последнее соотношение есть ни что иное, как непрерывность в нуле. $\otimes$

Определение 3.1.3. Линейный оператор A называется *ограниченным,* если существует константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство ограниченности $\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X$.

Таким образом, ограниченный оператор переводит каждое ограниченное множество в X в ограниченное множество в Y.

Теорема 3.1.2. *Пусть X,Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда A ограничен.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор A непрерывен в пространстве X, тогда по теореме 3.1.1 он непрерывен в нуле. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, что $\forall x\colon\ \|x\|_X < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|Ax\|_Y < \varepsilon$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$, $x \neq 0$, и построим элемент $y = \dfrac{\delta x}{2\|x\|}$. Поскольку $\|y\|_X < \delta$, то $\|Ay\|_Y < \varepsilon$. Следовательно, $\|Ay\|_Y \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|_X$. Таким образом, существует постоянная $c = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$, что $\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X$ для всех $x \in X$.

Достаточность. Пусть оператор A ограничен, т. е. существует постоянная $c > 0$, что $\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X$ для любого $x \in X$. Тогда A непрерывен в нуле и по теореме 3.1.1 непрерывен. ⊗

Определение 3.1.4. Множество тех элементов $x \in X$, для которых $Ax = 0$, называется *ядром* линейного оператора и обозначается $KerA$.

Теорема 3.1.3. *Ядро линейного непрерывного оператора $A : X \to Y$ является подпространством пространства X.*

Доказательство. Ядро оператора $A, KerA = \{x \in X : Ax = 0\}$, является подпространством в X, если оно представляет собой замкнутое линейное многообразие. Рассмотрим произвольные x,$y \in KerA$ и $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$, тогда $\alpha x + \beta y \in KerA$, так как $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$.

Рассмотрим последовательность $x_n \in KerA$, которая сходится в X к элементу x_0. Покажем, что $x_0 \in KerA$. В силу непрерывности оператора A имеем $Ax_n \longrightarrow Ax_0$ при $x_n \longrightarrow x_0$, но $Ax_n = 0$, поэтому и $Ax_0 = 0$, т. е. $x_0 \in KerA$. ⊗

Рассмотрим ограниченный линейный оператор A и запишем условие ограниченности в виде $\dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant c$, или, обозначив через $x_0 = \dfrac{x}{\|x\|}$, будем иметь $\|Ax_0\| \leqslant c$ для $\|x_0\| = 1$.

Таким образом, наименьшая из констант c в неравенстве ограниченности есть точная верхняя грань множества $\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$,

$$\inf c = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Определение 3.1.5. Назовем *нормой линейного ограниченного оператора* наименьшую из констант ограниченности,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Определение 3.1.6. Норма $\|A\|$ называется *достижимой*, если существует такой элемент $x_0 \in X$, что

$$\|Ax_0\|_Y = \|A\| \|x_0\|_X.$$

Задачи

1. Пусть X, Y – нормированные пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Всегда ли $\mathscr{R}(A)$ является подпространством в Y? Привести примеры.

2. Доказать, что линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен в том и только том случае, когда множество $\{x \in X : \|Ax\|_Y < 1\}$ имеет внутренние точки.

3. Пусть X, Y – нормированные пространства, $A : X \to Y$ такой линейный оператор, что многообразие $\mathscr{R}(A) \subset Y$ конечномерно. Следует ли отсюда, что A – ограниченный оператор?

4. Пусть X, Y – нормированные пространства, $A : X \to Y$ такой линейный оператор, что его ядро $Ker(A)$ является подпространством в X. Следует ли отсюда, что A – ограниченный оператор?

5. Пусть H – гильбертово пространство. Доказать, что существует такой элемент $x \in H$, что $\|Ax\|_H = \|A\| \cdot \|x\|_H$.

3.2. Примеры линейных ограниченных операторов

Простейшими примерами вышеуказанных операторов служат нулевой и тождественный оператор. *Нулевой* оператор каждый элемент x пространства X переводит в нулевой элемент пространства Y, т. е.

$0x = 0$. Он имеет, очевидно, нулевую норму. Оператор I, переводящий каждый элемент пространства X в себя, называется *тождественным*. Его норма равна единице.

Перейдем к рассмотрению более общих примеров.

Пример 1. Пусть A – линейный оператор, отображающий пространство $\mathbb{R}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ с базисом $f_1, \ldots, f_m$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad Ax = A\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i.$$

Разложим вектор $Ae_i \in \mathbb{R}^m$ по базису $f_1, \ldots, f_m$ пространства $\mathbb{R}^m$. Получим

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k.$$

Из определения видно, что линейный оператор в конечномерном пространстве определятся матрицей с элементами a_{ki}, $(k = 1,2, \ldots, m;$ $i = 1,2, \ldots, n)$, столбцами которой служат координаты векторов $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ относительно базиса $f_1, \ldots, f_m$. Очевидно, что в конечномерном пространстве каждый линейный оператор ограничен.

Пример 2. Пусть $X = Y = l_2$, $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ – некоторая ограниченная последовательность. Для каждого $x(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in l_2$ положим

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_i x_i, \ldots) \in l_2.$$

Линейность данного оператора очевидна. Ограниченность вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\|Ax\|_{l_2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i x_i|^2 \leqslant \sup_i |\alpha_i| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = c^2 \|x\|_{l_2}^2,$$

т. е. $\|A\| \leqslant \sup\limits_i |\alpha_i| = c$.

Пример 3. Пусть $X = Y = C[a,b]$. Для произвольной функции $x(t) \in C[a,b]$ положим

$$y(t) = Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{K}(t,s)$ – ядро интегрального оператора, которое является непрерывной функцией по переменным t,s.

Используя равномерную непрерывность $\mathcal{K}(t,s)$, легко показать непрерывность $y(t)$. Значит, оператор A задает отображение пространства $C[a,b]$ в себя. Оператор A называется *интегральным оператором Фредгольма* с непрерывным ядром.

Теорема 3.2.1. *Формула* (2.1) *определяет линейный ограниченный оператор в пространстве* $C[a,b]$ *причем*

$$\|A\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

Доказательство. Линейность оператора (2.1) вытекает из следующих равенств:

$$A(\alpha x+\beta y) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\big(\alpha x(s)+\beta y(s)\big)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \alpha\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + \beta\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Покажем, что оператор A ограничен. Для этого воспользуемся определением ограниченного оператора и оценим норму

$$\|Ax\|_{C[a,b]} = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\max_{s\in[a,b]}|x(s)|\mathrm{d}s =$$

$$= \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\,\mathrm{d}s\|x\|_{C[a,b]}.$$

Следовательно, норма оператора A удовлетворяет неравенству

$$\|A\| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\,\mathrm{d}s = c.$$

Покажем, что полученная константа c в условии ограниченности наименьшая. Непрерывная функция

$$k(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],$$

достигает своего максимума в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$:

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\mathrm{d}s = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t_0,s)\,\mathrm{d}s.$$

Возможны два случая при рассмотрении последнего интеграла.

Пусть $\mathcal{K}(t_0,s)$ на отрезке $[a,b]$ знака не меняет, тогда рассмотрим функцию $x_0(s) = sign\mathcal{K}(t_0,s)$, для которой

$$\|A\| \geqslant \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x_0(s)\mathrm{d}s| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_0,s)|\mathrm{d}s = c.$$

Если $\mathcal{K}(t_0,s)$ меняет знак на отрезке $[a,b]$, то рассмотрим непрерывную функцию $x_h(s)$ – среднюю по Стеклову, которая в среднем аппроксимирует функцию $x_0(s) = sign\mathcal{K}(t_0,s)$. Тогда

$$\|A\| \geqslant \lim_{h \to 0} |\int\limits_a^b \mathcal{K}(t_0,s)x_h(s)\mathrm{d}s| = \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_0,s)|\mathrm{d}s = c.$$

$\otimes$

Пример 4. В примере 3 в случае непрерывного ядра $\mathcal{K}(t,s)$ возьмем функцию $x(t) \in L_p[a,b], p \geqslant 1$. Тогда функция $y(t)$ будет определена и почти всюду конечна на отрезке $[a,b]$. В самом деле, при любом t_0 $\mathcal{K}(t_0,s)$ непрерывна по $s \in [a,b]$, значит, измерима и ограничена. Пусть

$|\mathcal{K}(t_0,s)| \leqslant M$. По условию $x(s)$ суммируема, поэтому интеграл

$$y(t_0) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t_0,s)x(s)\mathrm{d}s$$

определен и конечен:

$$|y(t_0)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_0,s)||x(s)|\mathrm{d}s \leqslant M\|x\|_{L_1[a,b]}.$$

Покажем, что $y(t) \in C[a,b]$. Используя равномерную непрерывность ядра, будем иметь

$$|y(t) - y(t')| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s) - \mathcal{K}(t',s)|\|x\|\mathrm{d}s \to 0$$

при $t \to t'$. Таким образом, $A : L_p[a,b] \to C[a,b]$. При этом

$$\|Ax\|_{C[a,b]} = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big|\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\Big| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)||x(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant M\|x\|_{L_1[a,b]} \leqslant M(b-a)^{1/q}\|x\|_{L_p[a,b]}.$$

Пример 5. Пусть теперь в (2.1) функция $\mathcal{K}(t,s)$ измерима. Тогда при дополнительных на нее условиях при любой $x(t) \in C[a,b]$ формула (2.1) задает ограниченный оператор. Сформулируем эти условия.

Теорема 3.2.2. *Пусть в* (2.1) *функция* $\mathcal{K}(t,s)$ *измерима и удовлетворяет условиям:*

1) найдется такая константа $c > 0$, *что* $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\,\mathrm{d}s \leqslant c$ *для всех* $t \in [a,b]$;

2) для любого $t_1 \in [a,b]$ $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t,s)|\,\mathrm{d}s \longrightarrow 0$ *при* $t_1 \to t$.

Тогда интегральный оператор (2.1) *ограничен в пространстве* $C[a,b]$.

Доказательство. Достаточно показать, что $y \in C[a,b]$. $\otimes$

Пример 6. Пусть $X = Y = L_2[a,b]$. Вновь рассмотрим оператор (2.1), но теперь будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрируемо с квадратом в прямоугольнике $[a,b] \times [a,b]$:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = M^2 < \infty. \tag{2.3}$$

Теорема 3.2.3. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – измеримая функция и выполнено условие* (2.3). *Тогда формула* (2.1) *определяет ограниченный оператор в пространстве* $L_2[a,b]$.

Доказательство. Покажем, что формула (2.1) определяет ограниченный оператор. Используем в доказательстве неравенство Коши-Буняковского:

$$\|Ax\|^2_{L2[a,b]} = \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \cdot \int\limits_a^b |x(s)|^2 \mathrm{d}s = c^2 \|x\|^2.$$

Последнее неравенство означает, что $\|A\| \leqslant M$. $\otimes$

Пример 7. Рассмотрим пример неограниченного оператора. Пусть $X = C^1[0,\pi]$ и $\|x\|_X = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|, Y = C[0,\pi]$. Рассмотрим оператор дифференцирования

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C^1[0,\pi] \to C[0,\pi].$$

Оператор дифференцирования в пространстве $X = C^1[0,\pi]$ с нормой пространства $C[0,\pi]$ неограничен, так как для последовательности $x_n(t) = \sin(nt)$, $n = 1,2,\ldots,$ с нормой $\|x_n\| = 1$ справедливо следующее соотношение

$$\|Ax_n\| = \|n\cos(nt)\| = n \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |\cos(nt)| = n \to \infty.$$

Задачи

1. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим интегральный оператор со слабополярным ядром вида

$$Ax(t) = \int_a^b \frac{\mathcal{K}_0(t,s)}{|t-s|^\gamma}\, x(s)\mathrm{d}s,$$

где $\mathcal{K}_0(t,s)$ – непрерывная функция по t и s, $0 < \gamma < 1$. Используя теорему 3.2.2, доказать его ограниченность.

2. Пусть $A : C[a,b] \to C[a,b]$ и $Ax(t) = x(t)m(t)$, где $m(t) \in C[a,b]$. Оператор A называется оператором умножения. Вычислить его норму.

3.3. Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства, $A,B,\ldots$ – линейные ограниченные операторы, отображающие X в Y, множество которых обозначим через $\mathcal{B}(X,Y)$.

Теорема 3.3.1. *Множество $\mathcal{B}(X,Y)$ является нормированным векторным пространством.*

Доказательство. Определим в $\mathcal{B}(X,Y)$ операции сложения операторов и умножения оператора на скаляр. Положим по определению

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad (\alpha A)x = \alpha Ax.$$

Покажем, что операторы $A+B$ и αA являются линейными и ограниченными. Рассмотрим следующие цепочки:

$$\begin{gathered}(A+B)(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y)\\ =\alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By = \alpha(A+B)x + \beta(A+B)y;\end{gathered}$$

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leqslant (\|A\|+\|B\|)x, \text{ т. е. } \|A+B\| \leqslant \|A\|+\|B\|;$$
$$\|\alpha Ax\| \leqslant |\alpha|\|A\|\|x\|, \text{ т. е. } \|\alpha Ax\| \leqslant |\alpha|\|A\|.$$

Теперь каждому линейному ограниченному оператору $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ поставим в соответствие число $\|A\|$ по формуле

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|}. \tag{3.1}$$

Получим нормированное векторное пространство $\mathcal{B}(X,Y)$. $\otimes$

Как и во всяком нормированном пространстве, в $\mathcal{B}(X,Y)$ можно говорить о сходимости последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,Y)$.

Определение 3.3.1. Будем говорить, что последовательность операторов $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ сходится *равномерно* к оператору $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, если

$$\|A_n - A\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, равномерная сходимость последовательности операторов $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ – это сходимость по норме пространства $\mathcal{B}(X,Y)$.

Теорема 3.3.2. *Для того, чтобы последовательность операторов $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ сходилась к оператору $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ равномерно, необходимо и достаточно, чтобы $A_n x \rightrightarrows Ax$ при $n \to \infty$ равномерно по x в шаре $\|x\| \leqslant 1$.*

Доказательство. *Необходимость* сразу же следует из неравенства

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\| \cdot \|x\| \leqslant \|A_n - A\|,$$

справедливого для любых $x \in X$ с $\|x\| \leqslant 1$.

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } \|x\| \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|A_n x - Ax\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Тогда из определения нормы вытекает, что

$$\|A_n - A\| < \varepsilon \text{ для всех } n > N(\varepsilon), \text{ т. е. } \|A_n - A\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$\otimes$

Следствие 3.3.1. Пусть $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$ и $M \subset X$ – произвольное ограниченное множество. Тогда $A_n x \rightrightarrows Ax$ при $n \to \infty$ на множестве M.

Доказательство следствия основано на том, что всякое ограниченное множество содержится в некотором шаре.

Введем в пространстве еще один тип сходимости.

Определение 3.3.2. Пусть X,Y – нормированные векторные пространства. Последовательность $(A_n) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ сильно сходится к оператору A, если для любого $x \in X$ $\|A_n x - Ax\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$.

заметим, что если последовательность (A_n) сходится равномерно, то она будет сильно сходится. Действительно, это вытекает сразу из оценки

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leqslant \|A_n - A\|\|x\|.$$

Приведем пример сильно сходящейся последовательности (A_n), которая равномерно не сходится.

Пример 8. В пространстве ℓ_2 рассмотрим полную ортонормированную систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда по теореме о разложении в ряд Фурье для каждого элемента $x \in \ell_2$ справедливо разложение $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i e_i$, $C_i = (x,e_i)_{\ell_2}$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i e_i$ представляет собой проекцию элемента x на подпространство $L_n = \mathcal{L}\big\{(e_1, \ldots, e_n)\big\}$. Рассмотрим оператор P_n, который каждому x ставит в соответствие его проекцию $P_n x$ на подпространство L_n. Тогда

$$\|P_n x - x\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} C_i e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \|C_i\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

Следовательно, $\|(P_n - I)x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Это означает, что $\|(P_n - I)\| \leqslant 1$ и при этом $\|P_n x - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \|C_i\|^2$ представляет собой остаток сходящегося ряда. Рассмотрим элемент $x = e_{n+1}$, тогда $\|x\| = 1$ и

$$\|P_n - I\| \geqslant \|(P_n - I)x\| = \|x\| = 1,$$

так как $P_n e_{n+1} = 0$. Следовательно, $\|P_n - I\| = 1$. Это означает, что $P_n \to I$ сильно, а равномерная сходимость отсутствует.

В определении предела сильно сходящейся последовательности операторов не требуется, чтобы предельный оператор был линейным и ограниченным. Однако, если операторы A_n являются линейными, то переходя к пределу в равенствах $A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y$, убеждаемся, что оператор A будет линейным. Но в неполных пространствах оператор A может оказаться неограниченным.

Упражнение 1. Привести пример последовательности линейных ограниченных операторов, которая сильно сходится к неограниченному оператору.

Для любого нормированного пространства существует понятие полноты. Выясним, когда полно пространство $\mathcal{B}(X,Y)$.

Теорема 3.3.3. *Если пространство Y полно, то и пространство $\mathcal{B}(X,Y)$ полно.*

Доказательство. Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность Коши в пространстве $\mathcal{B}(X,Y)$. Покажем, что найдется оператор $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ такой, что $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Исходя из определения последовательности Коши, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $m,n \geqslant N(\varepsilon)$ справедливо неравенство$\|A_n - A_m\| < \varepsilon$. Выберем произвольный элемент $x \in X$ и рассмотрим последовательность значений оператора $(A_n x) \subset Y$. Она является последовательностью Коши, так как

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A)_m)x\| \leqslant \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

В силу полноты пространства Y найдется такой элемент $y \in Y$, что $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Определим оператор $A : X \to Y$, полагая

$$Ax = y = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

В силу линейности предела оператор A является линейным.

Покажем, что оператор A ограничен. Поскольку $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши, то и числовая последовательность $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши и, следовательно, ограниченной, т. е. существует постоянная $m > 0$, что $\|A_n\| \leqslant m$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$\|A_n x\| \leqslant \|A\| \|x\| \leqslant m\|x\| \text{ для всех } x \in X.$$

Переходя в числовом неравенстве к пределу, получим $\|Ax\| \leqslant m\|x\|$, т. е. $\|A\| \leqslant m$. Таким образом, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Далее, при $m \to \infty$ $\|A_n x - Ax\| \leqslant \varepsilon \|x\|$, откуда $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$. $\otimes$

Рассмотрим несколько примеров сходящихся последовательностей операторов.

Пример 9. Пусть последовательность функций $\mathcal{K}_n(t,s)$, непрерывных на $[a,b] \times [a,b]$, равномерно сходится к функции $\mathcal{K}(t,s)$. Рассмотрим последовательность интегральных операторов Фредгольма

$$A_n x(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

Она будет равномерно сходиться к интегральному оператору

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{3.3}$$

Действительно, разность $A_n - A$ является интегральным оператором с ядром $\mathcal{K}_n(t,s) - \mathcal{K}(t,s)$. Поэтому по теореме 3.2.1

$$\|A_n - A\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}_n(t,s) - \mathcal{K}(t,s)|\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Пример 10. Пусть функция $\mathcal{K}(t,s)$ определена для $[0,1] \times [0,1]$ и имеет вид

$$\mathcal{K}(t,s) = \frac{\mathcal{K}_0(t,s)}{|t-s|^{\gamma}},\ 0 < \gamma < 1, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{K}_0(t,s)$ – непрерывна функция по совокупности аргументов, т. е. ядро интегрального оператора $K(t,s)$ является слабополярным. Покажем, что в пространстве $C[0,1]$ оператор (3.3) со слабополярным ядром является пределом последовательности (3.2) с ядром

$$\mathcal{K}_n(t,s) = \begin{cases} \frac{\mathcal{K}_0(t,s)}{|t-s|^{\gamma}}, & |t-s| \geqslant \frac{1}{n}, \\ n^{\gamma}\mathcal{K}_0(t,s), & |t-s| < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

Действительно,

$$\|A_n - A\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big|\int\limits_0^1 \big(\mathcal{K}_n(t,s) - \mathcal{K}(t,s)\big)\mathrm{d}s\Big| =$$

$$= \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}}\Big|\mathcal{K}_0(t,s)\frac{1}{|t-s|^\gamma} - n^\gamma\Big|\mathrm{d}s \leqslant \frac{C}{n^{1-\gamma}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Упражнение 2. Привести пример неполного пространства Y и последовательности Коши $(A_n) \subset \mathcal{B}(X,Y)$, которая не имеет предела.

Очень часто встречается в приложениях пространство $\mathcal{B}(X,X) = \mathcal{B}(X)$. В пространстве $\mathcal{B}(X)$ помимо введенных ранее операций над операторами можно ввести еще одну операцию – умножение операторов по формуле

$$(AB)x = A(Bx). \tag{3.5}$$

Упражнение 3. Пусть $A,B \in \mathcal{B}(X)$. Показать, что $AB \in \mathcal{B}(X)$.

Вообще говоря, $BA \neq AB$. Равенство выполняется не всегда даже в конечномерных пространствах.

Два оператора $A,B \in \mathcal{B}(X)$ называются *перестановочными* или *коммутативными* если $AB = BA$.

Пусть $A,B \in \mathcal{B}(X)$. Тогда справедливы оценки

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|, \quad \|BA\| \leqslant \|B\|\cdot\|A\|,$$

которые легко проверяются. В пространстве $\mathcal{B}(X)$ существует тождественный оператор I и определена степень A^k оператора $A : A^2 = A\cdot A$, $\ldots$, $A^k = A\cdot A^{k-1}$, $A^0 = I$, причем

$$\|A^k\| \leqslant \|A\|^k.$$

Это дает возможность ввести в рассмотрение многочлены от операторов

$$P_N(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k \tag{3.6}$$

и функции от операторов.

Пусть $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k$ – аналитическая в круге $|\lambda| < \mathbb{R}$ функция комплексного переменного λ, $A \in \mathcal{B}(X)$, $\|A\| < R$. Тогда операторная функция $\varphi(A)$ оператора A может быть определена по формуле

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \tag{3.7}$$

например, $\varphi(A) = e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ или $\varphi(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ при $\|A\| < 1$. Последний ряд носит название ряда *Неймана.*

Задачи

1. Пусть (A_n),$(B_n) \subset \mathcal{B}(X)$. Доказать, что если $A_n \rightrightarrows A, B_n \rightrightarrows B$, то

$$A_nB_n \rightrightarrows AB.$$

2. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор Фредгольма A с непрерывным на $[0,1] \times [0,1]$ ядром $\mathcal{K}(t,s)$ и последовательность интегральных операторов A_n с ядрами $P_n(t,s)$, удовлетворяющими условиям

$$\max_{0 \leqslant t,s \leqslant 1} |P_n(t,s) - \mathcal{K}(t,s)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Сходится ли последовательность A_n к A?

3.4. Принцип равномерной ограниченности

Принцип равномерной ограниченности является одним из трех основных принципов функционального анализа. Он применяется, например, для оценки метода интерполирования по Лагранжу, к представлению функций интегралами Фурье.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.4.1. *Пусть* X,Y *– нормированные векторные пространства и* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность операторов пространства* $\mathcal{B}(X,Y)$. *Пусть существуют постоянная* $c > 0$ *и замкнутый шар* $B[x_0,r]$, $r > 0$, *такие, что* $\|A_nx\| \leqslant c$ *для всех* $x \in B[x_0,r]$, *т. е.*

последовательность $(A_n x)$ *равномерно ограничена на шаре* $B[x_0,r]$. *Тогда числовая последовательность* $\big(\|A_n\|\big)$ *ограничена.*

Доказательство. Возьмем любое $x \in X$, $x \neq 0$ и по нему построим элемент $z = x_0 + \frac{x}{2\|x\|}r$, который принадлежит шару $B[x_0,r]$. Действительно, $\|z - x_0\| = r/2 < r$. По условию теоремы последовательность $A_n z$ ограничена константой c на шаре, поэтому

$$c \geqslant \|A_n z\| = \left\|\frac{r}{2\|x\|}A_n x + A_n x_0\right\| \geqslant \frac{r}{2\|x\|}\|A_n x\| - \|A_n x_0\| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{r}{2\|x\|}\|A_n x\| - c.$$

Мы учли, что $x_0 \in B[x_0,r]$, значит $\|Ax_0\| \leqslant c$. Таким образом,

$$\|A_n x\| \leqslant \frac{4c}{r}\|x\|, \quad x \in X.$$

Последнее соотношение означает, что

$$\|A_n\| \leqslant \frac{4c}{r}\|x\| \ \text{ для всех } \ n \in \mathbb{N},$$

т. е. последовательность $\big(\|A_n\|\big)$ ограничена. $\otimes$

Теорема 3.4.1 (принцип равномерной ограниченности). *Если последовательность* $(A_n x)$ *в банаховом пространстве* Y *ограничена при каждом фиксированном* x *из банахова пространства* X, *то последовательность* $\big(\|A_n\|\big)$ *ограничена.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда последовательность $\big(\|A_n x\|\big)$ не ограничена ни в каком замкнутом шаре, в противном случае по лемме 3.4.1 была бы ограничена последовательность $\big(\|A_n\|\big)$. Возьмем некоторый шар $B[x_0,r_0], r_0 > 0, x_0 \in X$. В нем последовательность $\big(\|A_n x\|\big)$ не ограничена. Следовательно, найдутся элемент x_1 из шара $B(x_0,r_0)$ и номер $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. По непрерывности ограниченного оператора A_{n_1} найдется окрестность точки x_1 – шар $B_1(x_1,r_1) \subset B[x_0,r_0]$ такой, что $\|A_{n_1} x\| > 1$ для всех $x \in B_1[x_1,r_1]$, $r_1 < r_0/2$. В шаре $B_1[x_1,r_1]$ последовательность $\big(\|A_n x\|\big)$ опять не ограниченна, и можно найти $x_2 \in B_1(x_1,r_1)$ и $n_2 > n_1$, так что $\|A_{n_2} x_2\| > 2$ и $\|A_{n_2} x\| > 2$ для всех $x \in B_2[x_2,r_2], r_2 < r_1/2$, и т. д. В результате этих рассуждений находим последовательность (x_k)

– центров шаров, причем все шары замкнуты и их радиусы удовлетворяют неравенству $r_k < r_{k-1}/2$, из которого следует, что $r_k \to 0$ при $k \to \infty$. По теореме о вложенных шарах найдется их общая точка $x^* \in B[x_k,r_k]$, $k = 1,2,\dots$. Тогда $\|A_{n_k}x^*\| \geqslant k$, т. е. при фиксированном x^* последовательность $(A_n x^*)$ не ограничена, что противоречит условию теоремы. $\otimes$

Из хода доказательства теоремы 3.4.1 можно заключить, что справедлива

Теорема 3.4.2 (принцип фиксации особенности). *Если*

$$\sup_n \|A_n\| = \infty,$$

то найдется такой элемент $\bar{x} \in X$, *что*

$$\|A_n\bar{x}\| = \infty.$$

В предыдущем пункте мы говорили о том, что в случае сильной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов предельный оператор может оказаться неограниченны. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых предельный оператор будет ограниченным.

Теорема 3.4.3 (Банаха – Штейнгауза). *Пусть* X *и* Y *– банаховы пространства и последовательность* $(A_n) \subset \mathcal{B}(X,Y)$. *Для того, чтобы* $A_n \to A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $n \to \infty$, *сильно, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *последовательность* $\big(\|A_n\|\big)$ *была ограничена;*
2) $A_n \to A$, $n \to \infty$, *сильно на некотором линейном многообразии* X', *плотном в* X.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $A_n \to A \in \mathcal{B}(X,Y)$ при $n \to \infty$ сильно, т. е. $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$, $x \in X$. Тогда последовательность $\big(\|A_n x\|\big)$ будет сходится к $\|Ax\|$ и, следовательно, будет ограничена. Из принципа равномерной ограниченности получаем ограниченность $\big(\|A_n\|\big)$. В качестве X' можно взять все X.

Достаточность. Пусть $x \in X$, но $x \notin X'$. По определению всюду плотного множества в нормированном пространстве для любого $\varepsilon > 0$

найдется $x' \in X'$ такой, что $\|x - x'\| < \varepsilon$. Пусть $c = \sup\limits_{n=0,1,\dots} \|A_n\|$, где $A_0 = A$. Покажем, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$ сильно:

$$\|A_n x - Ax\| = \|A_n(x - x') + (A_n x' - Ax') + A(x' - x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A_n\|\|x - x'\| + \|A_n x' - Ax'\| + \|A\|\|x' - x\| \leqslant 2c\varepsilon + \|A_n x' - Ax'\|.$$

Учитывая сходимость $A_n x'$ к Ax' на X', найдется такой номер N, начиная с которого $\|A_n x' - Ax'\| < \varepsilon$. Тогда для всех $n > N$

$$\|A_n x - Ax\| < \tilde{\varepsilon},$$

т. е. $A_n \to A$ при $n \to \infty$ сильно. $\otimes$

Перейдем к примерам, показывающим применение теоремы Банаха – Штейнгауза в вычислительной математике.

Пример 11. Пусть в прямоугольнике $[a,b] \times [a,b]$ задана последовательность непрерывных функций $\big(\mathcal{K}_n(t,s)\big)$. Будем говорить, что функция $x(t)$ представима через сингулярные интегралы Лебега, если последовательность

$$x_n(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s) x(s)\,\mathrm{d}s, \quad n = 1,2,\dots, \tag{4.1}$$

в некотором смысле сходится к $x(t)$. Такого рода интегралы встречаются в различных вопросах теории аппроксимации. Наша задача – указать необходимые и достаточные условия сходимости последовательности x_n.

Для примера рассмотрим полную ортонормированную в смысле нормы пространства $L_2[a,b]$ систему непрерывных на $[a,b]$ функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Рассмотрим частную сумму ряда Фурье (многочлен Фурье) порядка n для функции $x(t)$:

$$\begin{gathered} S_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \int\limits_a^b x(s)\varphi_j(s)\,\mathrm{d}s = \\ = \int\limits_a^b \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\varphi_j(s) x(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s) x(s)\,\mathrm{d}s, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\mathcal{K}_n(t,s) = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\varphi_j(s)\,\mathrm{d}s$.

Запишем (4.2) в виде последовательности операторов

$$A_n x(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{4.3}$$

отображающих пространство $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Согласно теореме 3.2.1

$$\|A_n\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}_n(t,s)|\,\mathrm{d}s.$$

Теорема Банаха – Штейнгауза в этом случае будет иметь вид:

Теорема 3.4.4. *Для того, чтобы последовательность $\big(x_n(t)\big)$ сходилась в пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ к функции $x(t) \in C[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\exists M > 0$ *такое, что* $\|A_n\| \leqslant M$;

2) *последовательность $A_n x(t)$ сходилась к $x(t)$ на всюду плотном в $C[a,b]$ множестве функций, например, на множестве алгебраических или тригонометрических многочленов.*

Пример 12. Рассмотрим приближенное вычисление интегралов вида

$$Ax = \int\limits_a^b \omega(t)x(t)\,\mathrm{d}s, \quad x(t) \in C[a,b], \tag{4.4}$$

где $\omega(y)$ – интегрируемая положительная на (a,b) весовая функция. Выпишем так называемые *квадратурные формулы* вида

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} A_k^n x(t_k^n), \tag{4.5}$$

где точки t_k^n принадлежат отрезку $[a,b]$ и называются *узлами*, $t_k^n \neq t_k^m$, $n \neq m$; числа A_k^n – *весами* квадратурной формулы (4.4).

Если для любой $x(t) \in C[a,b]$ $A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$, то говорят, что квадратурный процесс сходится. Заметим, что

$$\|A_n\| = \sum_{k=1}^{n} |A_k^n|. \tag{4.6}$$

Упражнение 4. Докажите формулу (4.6).

Существуют различные принципы определения узлов и весов в квадратурной формуле (4.5). Как правило, квадратурная формула строится так, чтобы она становилась точной для любых многочленов порядка n. С помощью выбора весовых функций $\omega(t)$ можно учесть особенности класса интегрируемых функций. Теорема Банаха – Штейнгауза для этого случая формулируется в виде:

Теорема 3.4.5 (Т. Сеге). *Для того, чтобы квадратурный процесс сходился для любой функции $x(t) \in C[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\exists M > 0$ такое, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |A_k^n| \leqslant M$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) сходимость имела место для любого многочлена порядка n.

Обратимся к рассмотрению случая, когда линейный оператор A задан не на всем пространстве X, однако область его задания $\mathscr{D}(A)$ является всюду плотным множеством в X, т. е. $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$. Для таких операторов можно сформулировать понятие ограниченности. Будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен на $\mathscr{D}(A)$, если существует постоянная $c > 0$, что

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|, \quad \forall x \in \mathscr{D}(A).$$

Теорема 3.4.6 (о продолжении по непрерывности). *Пусть X – нормированное, Y – банахово пространства и A – линейный ограниченный на $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ оператор, причем $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$. Тогда существует линейный ограниченный оператор $\overline{A}$, являющийся продолжением A, и*

1) $Ax = \overline{A}x$ для всех $x \in \mathscr{D}(A)$;

2) $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Доказательство. Если $x \in \mathscr{D}(A)$, то $\overline{A} = A$, т. е. $\overline{A}x = Ax$ для всех $x \in \mathscr{D}(A)$. В противном случае воспользуемся тем, что $\mathscr{D}(A)$ всюду плотно в X. Поэтому для $x \in X$, но $x \notin \mathscr{D}(A)$ найдется в $\mathscr{D}(A)$ такой элемент x_n, что $\|x_n - x\| \to 0$. Положим по определению

$$\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Данное определение корректно, если указанный предел существует и не зависит от выбора последовательности (x_n), сходящейся к x. Рассмотрим последовательность $(Ax_n) \subset Y$, которая является последовательностью Коши, так как

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Поскольку пространство Y банахово, найдется элемент в Y, к которому данная последовательность сходится.

Пусть теперь $(x'_n) \subset \mathscr{D}(A)$ – другая последовательность, сходящаяся к $x \in X$. Обозначим через $y_1 = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$, $y_2 = \lim\limits_{n\to\infty} Ax'_n$, тогда

$$\|y - y_1\| \leqslant \|y - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax'_n\| + \|Ax'_n - y_1\| \to 0$$

при $n \to \infty$, т. е. $y_1 = y_2$.

Линейность оператора $\overline{A}$ вытекает из линейности предела и оператора A. Покажем, что $\overline{A}$ – ограниченный оператор. Так как

$$\|Ax_n\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n\|,$$

то при $n \to \infty$

$$\|\overline{A}x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|.$$

Значит, $\|\overline{A}\| \leqslant \|A\|$. Далее

$$\|\overline{A}\| = \sup_{\substack{x\in X,\\ \|x\|\leqslant 1}} \|\overline{A}x\| \geqslant \sup_{\substack{x\in \mathscr{D}(A),\\ \|x\|\leqslant 1}} \|\overline{A}x\| = \|A\|.$$

Следовательно, $\|\overline{A}\| = \|A\|$. ⊗

Построенное продолжение оператора A называется *продолжением оператора A по непрерывности.*

Задачи

1. Пусть H – гильбертово пространство, последовательность $(A_n) \subset \mathscr{B}(H)$ и $\sup\limits_n \big|(A_n x, y)\big| < \infty$ для любых $x,y \in H$. Доказать, что $\sup\limits_n \big|A_n\big| < \infty$.

2. Пусть X и Y – банаховы пространства, множество $M \in \mathscr{B}(X,Y)$ такое, что $\sup\limits_{A \in M} \big\|Ax\big\| = f(x) < \infty$ для любого $x \in X$. Доказать, что $\sup\limits_{A \in M} \big\|A\big\| < \infty$.

3.5. Обратные операторы. Непрерывная обратимость

Большой класс задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, в частности, системы линейных алгебраических уравнений, можно записать в виде операторного уравнения

$$Ax = y, \tag{5.1}$$

где x – неизвестная функция из некоторого нормированного векторного пространства X, y – заданная функция из нормированного векторного пространства Y, A – линейный оператор, отображающий X в Y. Выясним, при каких условиях уравнение (5.1) имеет единственное решение и как зависит это решение от известной функции $y \in Y$. Этот круг вопросов связан с обратимостью оператора A.

Итак, пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ и областью значений $\mathscr{R}(A) \subseteq Y$. Если оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{R}(A)$, то к оператору A существует обратный оператор A^{-1}, и решение уравнения (5.1) может быть записано в явном виде

$$x = A^{-1}y, \tag{5.2}$$

Выясним, когда это возможно.

Теорема 3.5.1. *Линейный оператор A переводит $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{R}(A)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда*

$$Ker A = \{x \in \mathscr{D}(A) : Ax = 0\} = \{0\}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Очевидно, что A переводит нулевой элемент пространства X в нулевой элемент пространства Y. Действительно, для любого $x \in X$ справедливо $A0 = A(0 \cdot x) = 0 \cdot Ax = 0$. В силу взаимной однозначности не существует такого элемента $x \neq 0$, что $Ax = 0$. Поэтому $KerA = \{0\}$.

С другой стороны, пусть $KerA = \{0\}$ и $Ax = Ay$. Тогда, очевидно, $A(x - y) = 0$ или $x - y \in KerA$. Следовательно, $x = y$. $\otimes$

Пусть A отображает $\mathscr{D}(A)$ на $\mathscr{R}(A)$ взаимно однозначно и является линейным оператором. Тогда A^{-1} взаимно однозначно отображает $\mathscr{R}(A)$ на $\mathscr{D}(A)$ и также является линейным, т. е. справедлива

Теорема 3.5.2. *Если $A : X \to Y$ линеен, то и $A^{-1} : Y \to X$ линеен.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in \mathscr{R}(A)$, где $y_1 = A^{-1}x_1$, $y_2 = A^{-1}x_2$. Поскольку $\mathscr{R}(A)$ является линейным многообразием, то

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in \mathscr{R}(A).$$

В силу взаимной однозначности между $\mathscr{R}(A)$ и $\mathscr{D}(A)$ имеем

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2),$$

что и означает линейность оператора A^{-1}. $\otimes$

Таким образом, если оператор $A : X \to Y$, то обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ определен на $\mathscr{R}(A)$ и принимает значения в $\mathscr{D}(A)$ и при этом

$$\begin{aligned} &A^{-1}Ax = x, \quad x \in \mathscr{D}(A), \\ &AA^{-1}Ay = y, \quad y \in \mathscr{R}(A). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Если оператор A является ограниченным, то оператор A^{-1} при этом может оказаться неограниченным.

Теорема 3.5.3. *Оператор A^{-1} существует и одновременно ограничен на $\mathscr{R}(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\| \geqslant m\|x\|. \tag{5.5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор A^{-1} существует и ограничен на $\mathscr{D}(A^{-1}) = \mathscr{R}(A)$. Это означает, что существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|A^{-1}y\| \leqslant c\|y\| \text{ для всех } y \in \mathscr{R}(A).$$

Пусть элемент $x \in \mathscr{D}(A)$ такой, что $y = Ax$. Тогда

$$\|A^{-1}Ax\| = \|x\| \leqslant c\|Ax\|,$$

или

$$\|Ax\| \geqslant \frac{1}{c}\|x\|,$$

т. е. $m = c^{-1}$.

Достаточность. Пусть выполнено (5.5) и $x \in KerA$, тогда $Ax = 0$. Из (5.5) вытекает, что $0 \geqslant m\|x\|$, откуда $x = 0$. Это означает, что $KerA = \{0\}$. Но тогда по теореме 3.5.1 существует оператор A^{-1}, взаимно однозначно отображающий $\mathscr{R}(A)$ на $\mathscr{D}(A)$. Полагая в неравенстве $x = A^{-1}y$, получим

$$\|AA^{-1}y\| \geqslant m\|A^{-1}y\|$$

для всех $y \in Y$. Откуда

$$\|A^{-1}y\| \leqslant c\|y\|,$$

где $c = m^{-1}$. ⊗

Определение 3.5.1. Будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\mathscr{R}(A) = Y$, оператор A обратим и A^{-1} ограничен.

Рассмотрим теперь случай, когда ограниченный линейный оператор A задан на всем пространстве X.

Теорема 3.5.4 (Банаха об обратном операторе). *Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y взаимно однозначно. Тогда обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ ограничен.*

Данную теорему мы приводим без доказательства. Доказательство приведено в книге

Приведем некоторые важные следствия из этой теоремы.

Следствие 3.5.1. Пусть на векторном пространстве X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ и пространство X полно относительно каждой из норм. Если $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ для всех $x \in X$, то эти нормы эквивалентны.

Доказательство. Обозначим через X_k $(k = 1{,}2)$ банахово пространство X с нормой $\|\cdot\|_k$. Неравенство $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ означает, что тождественный оператор $I : X_2 \to X_1$ ограничен. По теореме Банаха об обратном операторе оператор $I^{-1} : X_1 \to X_2$ также будет ограничен, что эквивалентно неравенству $\|x\|_2 \leqslant c_1\|x\|_1$. $\otimes$

Следствие 3.5.2. Пусть $X{,}Y$ – банаховы пространства. Если линейное непрерывное отображение A отображает все пространство X на все Y, то отображение A открыто.

Упражнение 5. Доказать следствие 3.5.2.

Пример 13. В пространстве $C[0{,}1]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$Ax(t) \equiv x(t) - \int\limits_0^1 t^2 s^3 x(s)\,\mathrm{d}s = y(t),$$

или $Ax(t) = y(t)$. Тогда $x(t) = y(t) + t^2 c$, где

$$c = \int\limits_0^1 s^3 x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Подставляя в данную формулу выражение для $x(s)$, получим

$$c = \int\limits_0^1 s^3(cy(s) + cs^3)\,\mathrm{d}s = \frac{6}{5}\int\limits_0^1 s^3 y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Значит, при любой правой части $y(t) \in C[0{,}1]$ решение исходного уравнения имеет вид

$$x(t) = y(t) + \frac{6}{5}\int\limits_0^1 t^2 s^3 y(s)\,\mathrm{d}s \equiv A^{-1}y(t).$$

Мы доказали непрерывную обратимость оператора A.

Более подробно уравнения второго рода, в том числе и интегральные, будут рассмотрены в последующих пунктах.

Задачи

1. Пусть X – нормированное пространство. $A,B : X \to X$ линейные ограниченные операторы с $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(B) = X$. Известно, что существуют операторы $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$. Можно ли утверждать, что существуют операторы A^{-1} и B^{-1}?

2. Пусть X – нормированное пространство. $A : X \to X$ линейный ограниченный оператор с $\mathscr{D}(A) = X$. Пусть последовательность $x_n \in X$ такова, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$ при $n \to \infty$. Может ли у оператора A существовать ограниченный обратный оператор?

3. Пусть $A : \ell_2 \to \ell_2$ и для любого элемента $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$ $Ax = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$, где $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и $\sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$. Указать условия на последовательность (λ_n), при которых к оператору A существует A^{-1}. Что можно сказать об ограниченности A^{-1}?

4. Пусть $c(t) \in C[0,1]$, $c(t) > 0$ для всех $t \in [0,1]$. Доказать, что краевая задача $-x'' + c(t)x = y(t)$, $x(0) = x(1)$, $x'(0) = x'(1)$ имеет единственное решение.

3.6. Линейные операторные уравнения и их решения

В п. 3.5 мы выяснили, что если задано операторное уравнение первого рода
$$Ax = y, \tag{6.1}$$
где $A : X \to Y$ и для любого $y \in \mathscr{R}(A)$ существует $A^{-1}y$, то $x = A^{-1}y$ является решением уравнения (6.1). Если оператор A непрерывно обратим, то уравнение (6.1) имеет единственное решение при любой правой части $y \in Y$. Пусть теперь $\tilde{x}$ – решение возмущенного уравнения
$$Ax = \tilde{y}. \tag{6.2}$$
Тогда
$$\|\tilde{x} - x\| \leqslant \|A^{-1}\| \|\tilde{y} - y\|.$$
Это означает, что $\|\tilde{y} - y\| \to 0$ будет и $\|\tilde{x} - x\| \to 0$. Другими словами, малое изменение правой части y в (6.1) влечет за собой малое изменение решения x в (6.1).

Определение 3.6.1. Будем говорить, что уравнение (6.1) *корректно разрешимо*, если

1) решение x уравнения (6.1) существует для любой правой части $y \in Y$;
2) решение единственно;
3) решение непрерывно зависит от входных данных $y \in Y$.

Таким образом, корректная разрешимость уравнения (6.1) эквивалентна непрерывной обратимости оператора A.

Из практики известно, что не всегда уравнение (6.1) разрешимо при любой правой части $y \in Y$, если решение существует, то оно может оказаться не единственным. Далее, решение может существовать лишь при определенных условиях, налагаемых на правую часть. Чтобы осветить круг этих вопросов, введем в рассмотрение для линейного оператора $A : X \to Y$ правый и левый обратные операторы.

Определение 3.6.2. Оператор $A_r^{-1} : Y \to X$ называется *правым обратным оператором* к линейному оператору $A : X \to Y$, если $AA_r^{-1} = I_y$ для любого $y \in$
$Rs(A)$. Оператор $A_l^{-1} : Y \to X$ называется *левым обратным оператором* к A, если $A_l^{-1}A = I_x$ для любого $x \in \mathscr{D}(A)$.

Теорема 3.6.1. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения (6.1) *единственно для любого $y \in \mathscr{R}(A)$;*

2) $KerA = \{0\}$, т. е. оператор A инъективен;

3) для оператора A существует левый обратный оператор A_l^{-1}.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть уравнение (6.1) имеет единственное решение при любом $y \in \mathscr{R}(A)$, тогда при $y = 0$ этим решением будет $x = 0$, т. е. $KerA = \{0\}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Если $KerA = \{0\}$, то отображение A из $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{R}(A)$ является взаимно однозначным. Поэтому решение уравнения единственно.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть уравнение (6.1) имеет единственное решение $x \in X$ при $\forall y \in \mathscr{R}(A)$. Построим оператор $A_l^{-1} : \mathscr{R}(A) \to X$, который каждому $y \in \mathscr{R}(A)$ ставит в соответствие решение $x \in X$, т. е. $Ax = y$. Для остальных $y \in Y \setminus \mathscr{R}(A)$ оператор A_l^{-1} определен произвольным образом, например, $A_l^{-1} = 0$. Покажем, что A_l^{-1} – левый обратный

оператор. Пусть $y \in \mathscr{R}(A)$ и $y = Ax$, тогда по построению

$$x = A_l^{-1}y = A_l^{-1}Ax = x, \text{ т. е. } A_l^{-1}A = I_x.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть существует к оператору A левый обратный оператор. Предположим, что найдутся два решения уравнения (6.1) $x_1 = A_l^{-1}y$ и $x_2 = A_l^{-1}y$, тогда $x_1 - x_2 = A_l^{-1}(0) = 0$. $\otimes$

Теорема 3.6.2. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения (6.1) *существует для любого $y \in Y$;*

2) $R(A) = Y$, т. е. оператор A сюръективен;

3)к оператору A существует правый обратный оператор A_r^{-1}.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) следует из определения множества $\mathscr{R}(A)$.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть для каждого $y \in Y$ уравнение (6.1) имеет некоторое решение, возможно, не единственное. Обозначим через $\widetilde{x}$ такое решение. Построим теперь отображение из Y в X, которое каждому $y \in Y$ ставит в соответствие $\widetilde{x} \in X$. Обозначим это отображение через A_r^{-1}. Тогда $\widetilde{x} = A_r^{-1}y$. Покажем, что A_r^{-1} правый обратный оператор к A. Учитывая, что $\widetilde{x}$ – решение уравнения (6.1), имеем

$$A\widetilde{x}A = AA_r^{-1}y = y, \text{ т. е. } AA_r^{-1} = I_y,$$

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть к оператору $A : X \to Y$ существует правый обратный оператор $A_r^{-1} : Y \to X$. Покажем, что для $\forall y \in Y$ уравнение (6.1) имеет решение, а именно, его решением будет $x = A_r^{-1}y$. Действительно, $Ax = AA_r^{-1}y = I_y y = y$. $\otimes$

Приведем примеры левого и правого обратных операторов.

Пример 14. В пространстве ℓ_2 бесконечных числовых последовательностей со сходящимися рядами рассмотрим полную ортонормированную систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots)$.

Определим линейный оператор A на элементах базиса следующей формулой

$$Ae_1 = 0, \; Ae_i = e_{i-1}, \; k = 2,3, \ldots.$$

Очевидно, что оператор A является оператором сдвига и $\|A\| = 1$. Определим оператор A_r^{-1} так:

$$A_r^{-1}e_i = e_{i+1} + c_i e_1, \; i = 1,2, \ldots,$$

где $_i$, $i = 1,2,\ldots$ – некоторые постоянные, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$.

Покажем, что A_r^{-1} – правый обратный к оператору A. Действительно,

$$AA_r^{-1}e_i = A(e_{i+1} + c_i e_1) = Aei + 1 + c_i Ae_1 = e_i, i = 1, \ \ldots.$$

Рассмотрим ядро оператора A. $KerA = \{x \in \ell_2 : Ax = 0\}$. Пусть $x \in X$, $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in KerA$. Тогда

$$A(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i Ae_i = x_1 \cdot 0 + \sum_{i=2}^{\infty} x_i e_{i-1} = 0.$$

Откуда следует, что вектор $e_1 = (1,0\ldots,0,\ldots) \in KerA$ Таким образом, $KerA$ представляет собой одномерное подпространство, порожденное вектором e_1. Из теоремы 3.6.1 следует, что к оператору A не определен левый обратный оператор. По построению правых обратных операторов бесконечно много.

Покажем, что $\mathscr{R}(A) = \ell_2$. Рассмотрим $\forall y \in \ell_2$. Тогда $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i e_i$ и его прообраз $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ определиться следующим образом

$$x_{i+1} = y_i, \quad i = 1,2,\ldots, x_1 = a, \ a \in \mathbb{R},$$

где a – произвольное число.

Таким образом, уравнение $Ax = y$ разрешимо при любой правой части $y \in \ell_2$ и имеет бесконечно много решений.

Упражнение 6. Пусть $A : \ell_2 \to \ell_2$ и действует по формуле

$$Ae_i = e_{i+1}, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Показать, что $KerA = \{0\}$ и, следовательно, к оператору A существует левый обратный оператор. Построить $A - 1_l$. писать множество $\mathscr{R}(A)$.

Таким образом, к линейному ограниченному оператору может существовать семейство левых обратных либо правых обратных операторов. Однако справедлива

Теорема 3.6.3. *Пусть* $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ *и пусть существуют операторы* A_l^{-1} *и* A_r^{-1}. *Тогда существует обратный оператор* A^{-1} *и*

1) $A^{-1} = A_l^{-1} = A_r^{-1}$;

2) $\mathscr{D}(A^{-1}) = Y$ $\mathscr{R}(A^{-1}) = X$;

3) A_l^{-1} *и* A_r^{-1} *единственны.*

Доказательство. Поскольку существуют операторы A_l^{-1} и A_r^{-1}, то согласно теореме 3.6.1 и 3.6.2 $kerA = \{0\}$, $\mathscr{R}(A) = Y$. Следовательно, A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{D}(A) = X$ и $\mathscr{R}(A) = Y$, т. е. оператор A всюду обратим. Но $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, поэтому по теореме Банаха об обратном операторе 3.5.4 A^{-1} ограничен. $\otimes$

Упражнение 7. Доказать, что операторы A_l^{-1} и A_r^{-1} единственны.

Теория обратных операторов используется при обосновании вычислительных методов. Итак, пусть u – приближенное решение уравнения (6.1), $\varepsilon = x - u$ – вычислительная ошибка, $r = y - Au$ – невязка. При реальных вычислениях нас интересуют следующие проблемы:

1) имея приближенное решение u уравнения (6.1), оценить по невязке r сверху и снизу норму относительной ошибки;

2) оценить сверху норму относительной ошибки при некоторых возмущениях в (6.1) оператора A и правой части y.

Рассмотрим вкратце первую проблему. Пусть X – банахово пространство, $A : X \to X$, $A \in \mathscr{B}(X)$. Назовем число

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{6.3}$$

числом обусловленности оператора A. Очевидно, что $k(A) = k(A^{-1})$ и $k(A) \geqslant 1$, поскольку $AA^{-1} = I$ и $\|I\| = 1 \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = k(A)$. Воспользуемся соотношениями

$$x = A^{-1}y, \quad A\varepsilon = r, \quad \varepsilon = A^{-1}r \tag{6.4}$$

Тогда из соотношений (6.4) и уравнения (6.1) получаем неравенства

$$\begin{gathered} \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|, \quad \|x\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|y\|, \\ \|r\| \leqslant \|A\| \cdot \|\varepsilon\|, \quad \|\varepsilon\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|r\|. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Покажем, что для величины относительной погрешности $\|\varepsilon|\|x\|$ справедливо неравенство

$$k^{-1}(A)\frac{\|r\|}{\|y\|} \leqslant \frac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} \leqslant k(A)\frac{\|r\|}{\|y\|}, \tag{6.6}$$

в которое входят только $k(A)$, норма правой части и норма невязки.

Действительно, из (6.5) получаем

$$\frac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|A\|^{-1}\|y\|} = k(A)\frac{\|r\|}{\|y\|}.$$

Действительно, из (6.5) получаем

$$\frac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|A\|^{-1}\|r\|}{\|A^{-1}\|\|y\|} = k^{-1}(A)\frac{\|r\|}{\|y\|}.$$

Неравенство (6.6) может быть использовано для оценки точности различных приближенных методов решения уравнения (6.1).

Задачи

1. Пусть X – нормированное векторное пространство, $A,B : X \to X$ – линейные операторы с $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(B) = X$, удовлетворяющие условию $AB = BA$.

a) Пусть существует оператор A^{-1}. Доказать, что $A^{-1}B = BA^{-1}$;

b) Пусть $A,B \in \mathscr{B}(X)$, а B непрерывно обратим. Доказать, что

$$\|AB\| \leqslant \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}.$$

2. Пусть X – нормированное векторное пространство, $A : X \to X$ – линейный оператор и пусть в X существует такая последовательность $(x_n) \subset \mathscr{D}(A)$ с $\|x_n\| = 1$, что $\|Ax_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что оператор A не может иметь ограниченного обратного.

3.7. Линейные операторные уравнения второго рода

Пусть X – банахово пространство и $A : X \to X$– линейный ограниченный оператор. Рассмотрим операторное уравнение второго рода

$$x - Ax = y. \tag{7.1}$$

Как и в предыдущих пунктах нас будет интересовать при каких условиях на оператор $A \in \mathscr{B}(X)$ уравнение (7.1) корректно разрешимо.

Теорема 3.7.1. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и при этом справедливы оценки*

$$\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}, \quad \|I-(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1-\|A\|}. \tag{7.2}$$

Доказательство. В банаховом пространстве $\mathscr{B}(X)$ рассмотрим ряд Неймана

$$I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots. \tag{7.3}$$

и докажем, что он сходится абсолютно. Действительно

$$\|I\|+\|A\|+\|A^2\|+\ldots+\|A^n\|+\ldots \leqslant \|I\|+\|A\|+\ldots+\|A\|^k+\ldots \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Здесь использовано, что мажорирующий числовой ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $\|A\| < 1$. Тогда по теореме **??** ряд (7.3) сходится, т. е. его последовательность частных сумм

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k \tag{7.4}$$

имеет предел $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$.. Имеем

$$S_n(I-A) = I - A^{n+1}, \quad (I-A)S_n = I - A^{n+1}. \tag{7.5}$$

Переходя в (7.5) к пределу, используя (7.4), условие теоремы $\|A\| < 1$, получим

$$S(I-A) = (I-A)S \tag{7.6}$$

Равенство (7.6) означает, что оператор S является обратимым к оператору $I - A$. Оценим норму S:

$$\|S_n\| \leqslant 1 + \|A\| + \cdots + \|A\|^n = \frac{1-\|A\|^{n+1}}{1-\|A\|},$$

$$\|I - S_n\| \leqslant \|A\| + \cdots + \|A\|^n = \frac{\|A\| - \|A\|^{n+1}}{1-\|A\|}.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получим (7.2). $\otimes$

Теорема 3.7.1 является некоторым усилением принципа сжимающих отображений для линейных операторов в банаховых пространствах. А именно: решение уравнения (7.1) есть неподвижная точка отображения $f(x) = Ax+y$, которое является сжимающим при условии $\|A\| < 1$.

Наряду с уравнением (7.1)? рассмотрим более общее уравнение

$$x - \lambda Ax = y. \tag{7.7}$$

Далее для него можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 3.7.1

Теорема 3.7.2. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $\|\lambda\| < \frac{1}{\|A\|}$. Тогда оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим, причем*

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots .$$

Выясним, какое множество образует класс обратимых операторов в пространстве $\mathscr{B}(X)$.

Теорема 3.7.3 (о четырех шарах). *Если $A,A^{-1} \in \mathscr{B}(X)$, то множество G элементов $\mathscr{B}(X)$, имеющих в $\mathscr{B}(X)$ обратне, содержит вместе с операторами A и A^{-1} два шара*

$$B_1 = \{B \in \mathscr{B}(X) : \|A - B\| < \frac{1}{A^{-1}}\} B_2 = \{B \in \mathscr{B}(X) : \|A^{-1} - B\| < \frac{1}{A}\} \tag{7.8}$$

Если оператор B лежит в шаре B_1, то

$$B^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(A - B)A^{-1}]^n \tag{7.9}$$

или

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [A^{-1}(A - B)]^n A^{-1}, \tag{7.10}$$

причем справедливо неравенство

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A - B\| \|A^{-1}\|}; \tag{7.11}$$

если $B_\varepsilon \in G$ *и* $\|B_\varepsilon - A\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то и* $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Если оператор B *лежит в шаре* B_2, *то*

$$B^{-1} = A\sum_{n=0}^{\infty}[(A^{-1} - B)A]^n \tag{7.12}$$

или

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[A(A^{-1} - B)]^n A, \tag{7.13}$$

причем справедливо неравенство

$$\|B^{-1} - A\| \leqslant \frac{\|A\|^2\|A^{-1} - B\|}{1 - \|A^{-1} - B\|\|A\|};$$

если $B_\varepsilon \in G$ *и* $\|B_\varepsilon - A^{-1}\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то и* $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Докажем теорему для шара B_1. Доказательство для шара B_2 проводится аналогично.

Пусть $A \in G$ и $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Имеем

$$\|I - BA^{-1}\| = \|(A - B)A^{-1}\| < 1,$$

$$\|I - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| < 1.$$

Тогда по теореме 3.7.1 операторы $BA^{-1} = I - (I - BA^{-1})$ и $A^{-1}B = I - (I - A^{-1}B)$ имеют обратные, которые согласно формуле 7.4 можно представить в виде рядов

$$(BA^{-1})^{-1} = AB^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - BA^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}[(A - B)A^{-1}]^n(A^{-1}B)^{-1} = \\ = B^{-1}A = \sum_{n=0}^{\infty}(I - A^{-1}B)^n = \sum_{n=0}^{\infty}[A^{-1}(A - B)]^n. \tag{7.14}$$

Следовательно, оператор B имеет обратный B^{-1} и для него справедливы представления (7.9) и (7.10). Из (7.9) вытекает неравенство

(7.11), так как

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \sum_{n=0}^{\infty} [\|A - B\| \|A^{-1}\|]^n \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A - B\| \|A^{-1}\|}; \tag{7.15}$$

Из (7.15) вытекает, что если $B_\varepsilon \in G$ и $\|A - B_\varepsilon\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то и $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. $\otimes$

Следствие 3.7.1. Множество обратимых операторов в пространстве $\mathscr{B}(X)$ открыто.

Доказательство. Теорема 3.7.3 утверждает,что в шаре радиуса $\|A^{-1}\|^{-1}$ вместе с обратимым оператором A все операторы обратимы. А это означает, что выполнены условия открытого множества. $\otimes$

Следствие 3.7.2. Пусть $A \in \mathscr{B}(X)$ – непрерывно обратимы и пусть последовательность $A_n \subset \mathscr{B}(X)$, равномерно сходится к . Тогда, начиная с некоторого номера $n_0 \in N$ все операторы A_n непрерывно обратимы и $A_n^{-1} \rightrightarrows A^{-1}$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Возьмем номер $n_0 \in R$ из условия равномерной сходимости так, чтобы для всех $n \geqslant n_0$ выполнялось $\|A_n - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда по теореме 3 все операторы A_n при $n \geqslant n_0$ обратимы.По формуле (7.9) вычислим A_n^{-1} , учитывая, что $\|(A - A_n)A^{-1}\| < 1$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [(A - A_n)A^{-1}]^k = [I - (A - A_n)A^{-1}]^{-1}$

$$A_n^{-1} = A^{-1}[I - (A - A_n)A^{-1}]^{-1}.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $n \to \infty$. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} (I - A^{-1}(A - A_n))^{-1} = I$$

тогда

$$A_n^{-1} \rightrightarrows A$$

$\otimes$

Теорема 3.7.3 используется при обосновании вычислительных методов.А именно: требуется оценить норму относительно ошибки, если оператору задачи и правой части придать некоторое возмущение; оценить по невязке норму относительной ошибки.

Рассмотрим уравнение (6.1). Предположим, что оператор A претерпевает некоторые возмущения, возмущенный оператор B удовлетворяет условию (7.8), т. е. $\|A-B\|\cdot\|A^{-1}\|<1$ и для него рассматривается задача вида

$$Bu = y + \delta y, \tag{7.16}$$

где δy – возмущение правой части, u – решение (7.16), определяемое формулой $u = B^{-1}(y + \Delta y)$. Рассмотрим оценку для относительной ошибки $\|x - u\|\|\|x\|$, возникающей от замены уравнения (6.1) на уравнение (7.16). Пусть $B = A + \Delta A$, тогда

$$u - x = (B^{-1}A - I)x + B^{-1}\Delta y. \tag{7.17}$$

Используя разложение оператора B^{-1} в ряд и оценивая сверху ряды в слагаемых (7.17) по норме, получим

$$\|u - x\| \leqslant \|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\||x\| + \|\Delta y\|}{1 - \|\Delta A\|\cdot\|A^{-1}\|}. \tag{7.18}$$

Далее, разделим обе части (7.18) $\|x\|$ и, учитывая (7.5), получим

$$\frac{\|u - x\|}{\|u\|} \leqslant \frac{k(A)}{1 - k(A)\|\Delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}\right). \tag{7.19}$$

Задачи

1. Пусть $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$, $(A_n) \subset \mathscr{B}(X)$. Для того, чтобы $A \subset \mathscr{B}(X)$ был непрерывно обратим необходимо и достаточно, чтобы

a) A_n были непрерывно обратимы, начинал с некоторого номера n_0;

b) последовательность (A_n^{-1}) была ограничена.

2. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A_n, A \in \mathscr{B}(X,Y)$ и последовательность (A_n) сходится сходится к A. Пусть также $\left(A_n^{-1}\right) \in \mathscr{B}(Y,X)$, $\mathscr{R}(A) = Y$. Доказать, что решения уравнения $A_n x_n = y$ сходятся к решению уравнения $Ax = y$ для любого $y \in Y$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \|A_n^{-1}\| < \infty.$$

3.8. Применение теории обратных операторов к интегральным уравнениям

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с параметром λ, записанное в виде

$$x(t) - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s = y(t), \tag{8.1}$$

где функция $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывна на $[a,b] \times [a,b]$ и $x(t), y(t) \in C[a,b]$.

Уравнение (8.1) можно представить в виде

$$x - \lambda Ax = y, \tag{8.2}$$

обозначив через A интегральный оператор Фредгольма.

Теорема 3.8.1. *Пусть ядро интегрального оператора Фредгольма $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно в области $\Omega = [a,b] \times [a,b]$ пусть параметр λ таков, что $|\lambda|\|A\| < 1$. Тогда для любого $y(t) \in C[a,b]$ существует единственное непрерывное решение $x(t)$ уравнения* (8.1).

Доказательство. На основании теоремы 3.7.2 получаем, что если $|\lambda|\|A\| < 1$, то уравнение (8.1) имеет единственное решение, которое представляется рядом Неймана.

$$x(t) = (I - \lambda A)^{-1}y = y + \lambda Ay + \lambda^2 A^2 y + \ldots . \tag{8.3}$$

Изучим это решение подробнее. Пусть $M = \max\limits_{(t,s)\in\Omega} |\mathcal{K}(t,s)|$. На основании теоремы 3.2.1 $\|A\| \leqslant M(b-a)$. Поэтому условие $|\lambda|\|A\| < 1$ будет выполнено, если параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \tag{8.4}$$

Будем считать, что λ удовлетворяет условию (8.4). Распишем (8.3), вычислив предварительно степени интегрального оператора A

$$Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{8.5}$$

$$A^2y(t) = A(Ay) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\Big(\int\limits_a^b \mathcal{K}(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\mathcal{K}(s,\tau)\mathrm{d}s\Big)y(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Введем обозначение

$$\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\mathcal{K}(s,\tau)\mathrm{d}s = \mathcal{K}_2(t,\tau),$$

при этом будем считать, что $\mathcal{K}_1(t,\tau) = \mathcal{K}(t,\tau)$.

Функция $\mathcal{K}_2(t,\tau)$ называется *повторным ядром* или *второй итерацией ядра* $\mathcal{K}(t,s)$.

Итак,

$$A^2y(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_2(t,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

или, заменяя τ на s,

$$A^2y(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_2(t,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

Далее,

$$A^3y(t) = A(A^2y) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\Big(\int\limits_a^b \mathcal{K}_2(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\mathcal{K}_2(s,\tau)\mathrm{d}s)y(\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_a^b \mathcal{K}_3(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s,$$

где $\mathcal{K}_3(t,\tau) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)\mathcal{K}_2(s,\tau)\,\mathrm{d}s$ – третья итерация ядра $\mathcal{K}(t,s)$.

Таким образом,

$$A^n y(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s) y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{8.6}$$

$$\mathcal{K}_n(t,s) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,\tau)\mathcal{K}_{n-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau \tag{8.7}$$

Заметим, что $A^{n+m} = A^n \cdot A^m = A^m \cdot A^n$, поэтому

$$\mathcal{K}_{n+m}(t,s) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,\tau)\mathcal{K}_m(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_a^b \mathcal{K}_m(t,\tau)\mathcal{K}_n(\tau,s)\mathrm{d}\tau. \tag{8.8}$$

Кроме того, все итерированые ядра непрерывны в прямоугольнике $\Omega = [a,b] \times [a,b]$.

Запишем решение уравнения (8.1) с помощью итерированных ядер

$$\begin{gathered} x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}_1(t,s)y(s)\mathrm{d}s + \lambda^2 \int\limits_a^b \mathcal{K}_2(t,s)y(s)\mathrm{d}s + \ldots \\ +\lambda^n \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s)y(s)\mathrm{d}s + \ldots, \end{gathered} \tag{8.9}$$

где ряд справа в (8.9) сходится равномерно при условии (8.4).

Рассмотрим ряд

$$\mathcal{K}_1(t,s) + \lambda\mathcal{K}_2(t,s) + \ldots + \lambda^{n-1}\mathcal{K}_n(t,s) + \ldots. \tag{8.10}$$

Этот ряд сходится, если выполнено условие (8.4). Действительно,

$$|\mathcal{K}_2(t,s)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,\tau)||\mathcal{K}_m(\tau,s)|\mathrm{d}\tau \leqslant M^2(b-a),$$

$$\ldots$$

$$|\mathcal{K}_n(t,s)| \leqslant M^n(b-a)^{n-1}.$$

Отсюда

$$|\lambda^{n-1}\mathcal{K}_n(t,s) \leqslant |\lambda|^{n-1}M^n(b-a)^{n-1} = Mq^{n-1},$$

где $q = |\lambda|M(b-a) < 1$. Таким образом, ряд (8.10) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, $0 < q < 1$. Обозначим сумму ряда (8.10) через $R(t,s;\lambda)$:

$$R(t,s;\lambda) = \mathcal{K}(t,s) + \lambda\mathcal{K}_2(t,s) + \ldots + \lambda^{n-1}\mathcal{K}_n(t,s) + \ldots. \tag{8.11}$$

Функция $R(t,s;\lambda)$ является непрерывной по переменным t и s и аналитической по $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$. Умножим (8.11) на $y(s)$, проинтегрируем почленно и добавим $y(t)$, получим

$$y(t) + \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)y(s)\mathrm{d}s + \lambda\int\limits_a^b \mathcal{K}_2(t,s)y(s)\mathrm{d}s + \ldots.$$

Сравнивая его с (8.9), заключаем, что

$$x(t) = y(t) + \lambda\int\limits_a^b R(t,s;\lambda)y(s)\mathrm{d}s. \tag{8.12}$$

Функция $R(t,s;\lambda)$ называется *разрешающим ядром* или *резольвентой ядра* $\mathcal{K}(t,s)$. $\otimes$

Формула (8.12) верна лишь при λ, удовлетворяющих условию (8.4). Поэтому такие интегральные уравнения называются уравнениями с малыми ядрами.

Существуют ядра, для которых формула (8.12) определяет решение при любом значении λ Например, если $\mathcal{K}_2(t,s) = 0$, тогда все повторные ядра обращаются в нуль. Это случай ядра, ортогонального самому себе. Примером такого ядра служит ядро $\mathcal{K}(t,s) = = \sin(t)\cos(s)$, $0 \leqslant t,s \leqslant \pi$.

Упражнение 8. Решить с помощью резольвенты интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda\int\limits_0^1 tsx(s)\mathrm{d}s + y(t).$$

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = \lambda \int_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + y(t). \tag{8.13}$$

Уравнения (8.13) можно рассматривать как частный случай уравнения (8.1), если в нем рассмотреть ядро

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \mathcal{K}(t,s), & s \leqslant t, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Поэтому к уравнению (8.13) применима вся выше изложенная теория.

Оценим итерированные ядра

$$\begin{aligned} &|\mathcal{K}_2(t,s)| \leqslant \int_s^t |\mathcal{K}(t,\tau)||\mathcal{K}(\tau,s)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant M^2|t-s| \leqslant M^2(b-a), \\ &\dots \\ &\mathcal{K}_n(t,s) \leqslant \frac{M^n|t-s|^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{M^n(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

В этом случае ряд (8.11) будет сходится при любом λ. Решение уравнения (8.13) по аналогии с (8.12) запишется в виде

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^t R(t,s;\lambda)\,y(s)\,\mathrm{d}s. \tag{8.15}$$

Упражнение 9. Покажите, что резольвента $R(t,s;\lambda)$ уравнения Вольтерра (8.13) удовлетворяет уравнению

$$R(t,s;\lambda) = \mathcal{K}(t,s) + \lambda \int_s^t \mathcal{K}(t,\tau)R(\tau,s;\lambda)\,\mathrm{d}s.$$

Таким образом, для уравнения (8.13) доказана

Теорема 3.8.2. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s)$ *непрерывная функция по переменным* t *и* s. *Тогда для любой непрерывной функции* $y(t)$ *в пространстве* $C[a,b]$ *существует единственное решение уравнения* (8.13), *которое можно представить в виде* (8.15).

Пример 15. С помощью резольвенты решим интегральное уравнение Вольтерра вида

$$x(t) = e^t + \int_0^t e^{t-s} x(s)\, \mathrm{d}s.$$

В нашем случае $\lambda = 1$, $\mathcal{K}(t,s) = e^{t-s}$. Вычислим итерированные ядра

$$\mathcal{K}_2(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}\, \mathrm{d}\tau = e^{t-s}(t-s),$$

$$\mathcal{K}_3(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}\, \mathrm{d}\tau = e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2!},$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{K}_n(t,s) = e^{t-s}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Резольвента $R(t,s;1)$ представляет собой следующую сумму

$$R(t,s;1) = e^{t-s} + e^{t-s}\frac{t-s}{1!} + \ldots + e^{t-s}\frac{(t-s)^n}{n!} + \ldots = e^{2(t-s)}.$$

Тогда решение исходного уравнения запишется по формуле (8.15) в виде

$$x(t) = e^t + \int_0^t e^{2(t-s)} e^s \partial s = e^{2t}.$$

Задачи

1. Пользуясь представлением резольвенты ядра $R(t,s;\lambda)$ в виде (8.11), проверить так называемые соотношения Фредгольма

$$R(t,s;\lambda) = \mathcal{K}(t,s) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,\tau) R(t,\tau;\lambda) \mathrm{d}\tau,$$

$$R(t,s;\lambda) = \mathcal{K}(t,s) + \lambda \int\limits_a^b R(t,\tau;\lambda)\mathcal{K}(\tau,s)\mathrm{d}\tau.$$

Используя эти соотношения, показать, что оператор

$$x(t) + \lambda \int\limits_a^b R(t,s;\lambda)x(s)\mathrm{d}s = Bx(t)$$

будет обратным к оператору

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s = Ax(t).$$

2. С помощью резольвенты решить интегральное уравнение

$$x(t) - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\mathrm{d}s = t^2.$$

3.9. Замкнутые операторы. График оператора

Перейдем к рассмотрению замкнутых операторов, которые обладают свойствами, аналогичными свойствам непрерывных операторов, не являясь при этом ограниченными. Таким, например, является оператор дифференцирования.

Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subset X$. Множество $\{(x,Ax) : x \in \mathscr{D}(A), Ax \in \mathscr{R}(A)\}$ называется *графиком оператора* A и обозначается Gr_A. Поскольку A – линейный оператор, то Gr_A представляет собой линейное многообразие в пространстве $X \times Y$, однозначно определяемое оператором A. Если оператор A непрерывен, то линейное многообразие Gr_A замкнуто, т. е. является подпространством в $X \times Y$. Действительно, пусть последовательность $(x_n, Ax_n) \subset Gr_A$ сходится к точке (x_0, y_0). Это означает, что $x_n \to x_0$, $Ax_n \to y_0$, так как норму в декартовом проведение $X \times Y$ можно задать по формуле $(\|(x, Ay)\| = \|x\| + \|Ay\|)$.

Упражнение 10. Доказать, что формула $\|(x, Ay)\| = \|x\| + \|Ay\|$ определяет норму в $X \times Y$. Далее, если A – непрерывный оператор, то $y_0 = Ax_0$ и, следовательно, $(x_0, y_0) = (x_0, Ax_0) \in Gr_A$.

Определение 3.9.1. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *замкнутым,* если его график Gr_A является замкнутым множеством в $X \times Y$.

Лемма 3.9.1. *Пусть $A : x \to Y$, $A \in B(X,Y)$, причем $\mathscr{D}(A) = X$. Тогда A замкнут. Это было показано выше.*

Лемма 3.9.2. *Если A замкнут и обратный оператор A^{-1} существует, то A^{-1} также замкнут.*

Доказательство. Рассмотрим графики операторов A и A^{-1} :

- $Gr_A = \{(x,Ax) : x \in \mathscr{D}(A), Ax \in \mathscr{R}(A)\}$
- $Gr_A^{-1} = \{(y,A^{-1}y) : y \in \mathscr{R}(A), A^{-1}y \in \mathscr{D}(A)\}$.

Запишем Gr_A^{-1} в другом виде $Gr_A^{-1} = \{(Ax,x) : x \in \mathscr{D}(A), Ax \in \mathscr{R}(A)\}$. Это означает, что множество Gr_A^{-1} замкнуто, так как получается из замкнутого множества Gr_A перестановкой. $\otimes$

Лемма 3.9.3. *Если $A \in B(X,Y)$ и A^{-1} существует, то A^{-1} замкнут.*

Рассмотрим примеры замкнутых неограниченных операторов.

Пример 16. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dt}$, заданный на незамкнутом линейном многообразии $C^1[0,1] \subset C[0,1]$. Оператор, как показано в п.2, является неограниченным, но замкнутым. В самом деле, пусть последовательность $(x_n) \subset C^1[0,1]$ равномерно сходится к $x_0(t)$, а $Ax_n = (x_n)'$ – равномерно к y_0, тогда по известной теореме о почленном дифференцировании равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $x_0 \in C^1[0,1]$ и $y_0 = Ax_0$, т. е. $y_0 = (x_0)'$. Это означает замкнутость оператора дифференцирования.

Пример 17. В пространстве l_2 бесконечных числовых последовательностей рассмотрим оператор умножения на неограниченную последовательность. Пусть $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в l_2, тогда оператор A определяется по формуле $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n = 1,2,\dots$, где $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Данный оператор является неограниченным, так как $\|Ae_n\| = |\lambda_n|$. Предположим, что $\inf\limits_n |\lambda_n| = C_A > 0$.

Тогда существует оператор A^{-1} на элементах $y \in l_2$,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k, \quad A^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} y_k e_k,$$

который ограничен. Действительно, $\|A^{-1}y\|_{e_2} \leqslant \sup\limits_k |\lambda_k^{-1}| \cdot \|y\|_{e_2}$, т. е.

$$\|A^{-1}\| \leqslant C_A^{-1} < \infty.$$

Данное соотношение говорит о том, что A^{-1} – замкнутый оператор и соответственно, A замкнут.

Теорема 3.9.1 (о замкнутом графике). *Если линейный оператор A, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y, имеет замкнутый график, то этот оператор ограничен.*

Доказательство. Рассмотрим $Gr_A \subset X \times Y$ как самостоятельное банахово пространство с $\|(x,Ax)\| = \|x\| + \|Ax\|$. По условию теоремы Gr_A – замкнутое множество, поэтому такое рассмотрение правомочно. Рассмотрим оператор $P_1 : Gr_A \to X$, действующий по формуле $P_1(x,Ax) = x$. Оператор P_1 является линейным и ограниченным, поскольку $\|P_1(x,Ax)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|Ax\|$, т. е. $\|P_1\| \leqslant 1$. Оператор P_1 отображает Gr_A на X взаимно однозначно. По теореме Банаха об обратном операторе, существует ограниченный оператор $P_1^{-1} : X \to Gr_A$. Аналогично, оператор $P_2 : Gr_A \to Y$ такой, что $P_2(x,Ax) = Ax$. P_2 также линеен и ограничен. Тогда $A = P_2 \circ P_1^{-1}$ является линейным ограниченным как композиция ограниченных операторов. $\otimes$

Таким образом, замкнутый оператор, определенный на замкнутом линейном многообразии, т. е. на подпространстве банахова пространства ограничен. Но если он определен на незамкнутом линейном многообразии, например, как оператор дифференцирования, то в нем имеются некоторые полезные свойства, близкие к непрерывности. Для изучения замкнутых операторов целесообразно во множестве X ввести новую норму, которая называется нормой графика. Именно так мы и определили норму в $X \times Y$.

Задачи

1. Используя теорему о замкнутом графике, доказать теорему Банаха – Штейнгауза.

2. Доказать теорему об открытом отображении : "Всякое непрерывное линейное отображение $A : X \to Y$, где X и Y – банаховы пространства, переводит открытое множество пространства X в открытое множество пространства Y. "3. Пусть $A : H \to H$ – замкнутый оператор. Доказать, что

- $KerA$ – подпространство в H;
- Если $B \in B(H)$, то $A + B$ – замкнут.

4. Пусть A – замкнутый оператор в H. Верно ли, что

- $\mathscr{D}(A)$ – замкнутое множество;
- $\mathscr{R}(A)$ – замкнутое множество.

3.10. Линейные функционалы и теорема Хана-Банаха

Пусть X – нормированное векторное пространство. Рассмотрим оператор $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, который назовем *функционалом.* Обозначим его как $f(x)$, $x \in X$.

Определение 3.10.1. Функционал f называется *линейным функционалом*, если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $x,y \in X$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Линейный функционал f называется *ограниченным*, если для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant C\|x\|$ сразу для всех $x \in X$. Наименьшая из констант C, совпадающая с числом $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$ называется *нормой* функционала и обозначается $\|f\|$. Ограниченность функционала эквивалентна его непрерывности.

Все теоремы, сформулированные выше для линейных операторов, справедливы и для линейных функционалов.

Остановимся на некоторых примерах линейных ограниченных функционалов.

Пример 18. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ – его базис. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Рассмотрим линейный функционал f на элементе x, тогда

$$f(x) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x,y)_{\mathbb{R}^n},$$

где $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n)$, $y_k = f(e_k)$. Из оценки $|f(x)| = |(x,y)| \leqslant \leqslant \|y\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$ вытекает, что все линейные функционалы в пространстве $\mathbb{R}^n$ являются ограниченными и $\|f\| \leqslant \|y\|_{\mathbb{R}^n}$.

Пример 19. Пусть $X = C[a,b]$. Рассмотрим функционал $f(x) = = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k x(t_k)$, где $\{t_k\}_{k=1}^{n}$ – система точек на отрезке $[a,b]$. Примером такого функционала являются конечные разности функции $x(t) \in C[a,b]$. Данный функционал ограничен. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k||x(t_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k| \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|, \quad \|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k|.$$

Пример 20. Определим на пространстве $C[a,b]$ функционал вида

$$f(x) = \int_a^b a(t)x(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $a(t)$ – непрерывная либо суммируемая функция. Примером такого функционала служат коэффициенты Фурье. Данный функционал линеен и ограничим, причем $\|f\| \leqslant \int\limits_a^b |a(t)|\,\mathrm{d}t$.

Рассмотрим множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X, $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$. Это банахово пространство, так как пространство $\mathbb{R}^n$ банахово. Оно называется *сопряженным* пространством пространству X и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости.

Определение 3.10.2. Последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$

- *сильно*, если $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

- *слабо*, если $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ для любого $x \in X$.

С помощью сопряженного пространства в пространстве X можно ввести новый тип сходимости.

Определение 3.10.3. Последовательность $(x_n) \subset X$ сходится в пространстве X к элементу $x \in X$ *слабо*, если для любого линейного непрерывного функционала $f \in X^\star$ справедливо $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Ранее мы рассматривали теорему 3.4.4 о продолжении линейного ограниченного оператора. Теперь обратимся к вопросу о продолжении линейного ограниченного функционала. Это теорема Хана-Банаха. Она является одной из основных теорем функционального анализа и справедлива для нормированного пространства общего вида. Мы докажем ее для случая сепарабельного банахова пространства.

Теорема 3.10.1 (Хана–Банаха). *Пусть X – сепарабельное банахово пространство, X_0 – его подпространство, на котором задан линейный ограниченный функционал f_0. Тогда существует линейный ограниченный функционал $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, продолжающий f_0, и при том такой, что*

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Доказательство. Так как пространство X сепарабельно, то в X существует счетное всюду плотное множество. Обозначим его через X', тогда $(\overline{X'} = X$. Занумеруем в последовательность $x_1, x_2, \ldots$ те элементы из X', которые не попали в X_0. Тогда

$$X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad X_n = \{X_0, x_1, \ldots, x_n\}. \tag{10.1}$$

Продолжение функционала f_0, заданного на X_0, строим по индукции. Сначала продолжим f_0 на подпространство $X_1 = X_0 + \{x_1\}$. Каждый элемент из X_1 единственным образом представим в виде

$$x = x_0 + tx_1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in X_0. \tag{10.2}$$

Действительно, если существует другое его представление, например, $y_0 + t'x_1$, где $y_0 \in X_0$, $t' \in \mathbb{R}$, то $x_0 + tx_1 = y_0 + t'x_1$, или

$$x_0 - y_0 = (t - t')x_1. \tag{10.3}$$

Если $t^{'} = t$, то $x_0 = y_0$; если же $t^{'} \neq t$, то правая часть (10.3) представляет собой некоторый элемент линейной оболочки элемента x_1 в то время как левая часть определяет элемент из X_0.

Определим на X_1 функционал f_1, используя представление (10.2), по следующей формуле

$$f_1(x) = f_0(x_0) - \gamma t, \tag{10.4}$$

где γ – некоторый параметр, подлежащий определению. Зафиксируем элемент $x \in X_1$ и для произвольных элементов $z_1, z_2 \in X_0$ выпишем следующую цепочку, учитывая линейность и ограниченность функционала f_0 :

$$\begin{aligned} f_0(z_1) - f_0(z_2) =& f_0(z_1 - z_2) \leqslant \|f_0(z_1 - z_2)\| \leqslant \|f_0\| \cdot \|z_1 - z_2\| \leqslant \\ &\leqslant \|f_0\| \cdot \|z_1 + x_1\| + \|f_0\| \cdot \|z_2 + x_1\|. \end{aligned}$$

Откуда

$$f_0(z_1) - \|f_0\| \cdot \|z_1 + x_1\| \leqslant f_0(z_2) + \|f_0\| \cdot \|z_2 + x_1\|. \tag{10.5}$$

В (10.5) сначала зафиксируем z_1, а z_2 будем менять в пределах X_0. Тогда функционал $f_0(z_2)+\|f_0\|\cdot\|z_2+x_1\|$ будет ограничен снизу некоторой постоянной C, где C – значение левой части при z_1 фиксированном. Обозначим через

$$\beta = \inf_{z_2 \in x_0} \big\{ \|f_0\| \cdot \|z_2 + x_1\| + f_0(z_2) \big\}. \tag{10.6}$$

Затем в (10.5) зафиксируем z_2, будем менять z_1 в пределах X_0. Получим, что $f_0(z_1) - \|f_0\| \cdot \|z_1 + x_1\| \leqslant C_1$, где C_1 – значение правой части в соотношении (10.5) при фиксированном z_2. Из ограниченности сверху вытекает, что существует

$$\alpha = \sup_{x_1 \in X_0} \big\{ f_0(z_1) - \|f_0\| \cdot \|z_1 + x_1\| \big\}. \tag{10.7}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_0(z_1) - \|f_0\| \cdot \|z_1 + x_1\| &\leqslant \sup_{x_1 \in X_0} \big\{ f_0(z_1) - \|f_0\| \cdot \|z_1 + x_1\| \big\} \leqslant \\ \leqslant \inf_{z_2 \in x_0} \big\{ \|f_0\| \cdot \|z_2 + x_1\| + f_0(z_2) \big\} &\leqslant \|f_0\| \cdot \|z_2 + x_1\| + f_0(z_2). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Из (10.5) – (10.8) следует, что найдется число γ, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta. \tag{10.9}$$

Очевидно, что для всех $z \in X_0$ выполнено неравенство вида

$$f_0(z) - \|f_0\| \cdot \|z + x_1\| \leqslant \gamma \leqslant f_0(z) + \|f_0\| \cdot \|z + x_1\|.$$

Поскольку γ удовлетворяет условию (10.9), т. е. $\gamma \in [\alpha,\beta]$, то оно выбирается произвольным образом и не единственно.

Докажем, что формула (10.4) задает продолжение функционала f_0. Если $x = x_0 \in X_0$, то из (10.2) следует, что $t = 0$. Тогда $f_1(x) = f_0(x_0)$. Линейность функционала f_1 вытекает из линейности f_0. Докажем, что $\|f_1\| = \|f_0\|$.

Исходя из определения γ, имеем

$$f_0(z_1) - \|f_0\| \cdot \|z_1 + x_1\| \leqslant \gamma.$$

Умножим обе части неравенства на $|t|$ и рассмотрим $z_1 = \frac{x_0}{t}$. Тогда при $t > 0$ будем иметь

$$f_0(x_0) - \gamma t \leqslant \|f_0\| \cdot \|x_0 + tx_1\|$$

или

$$f_1(x) \leqslant \|f_0\| \cdot \|x\|.$$

При $t < 0$ неравенство примет вид

$$f_1(x) \geqslant -\|f_0\| \cdot \|x\|.$$

Это означает, что $|f_1(x)| \leqslant \|f_0\| \cdot \|x\|$ или

$$\|f_1\| \leqslant \|f_0\|. \tag{10.10}$$

Далее,

$$\|f_0\| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|=1}} |f_0(x)| \leqslant \sup_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\|=1}} |f_0(x)| = \sup_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\|=1}} |f_1(x)| = \|f\|. \tag{10.11}$$

Из (10.10) – (10.11) следует, что $\|f_1\| = \|f_0\|$.

Затем функционал f_1 продолжаем аналогичным образом на подпространство $X_2 = X_1 + \{x_2\}$ и т. д.

В заключении функционал, построенный на X' продолжаем по непрерывности на все пространство X (смотрите теорему 3.4.4 о продолжении по непрерывности линейного оператора). $\otimes$

В случае произвольного пространства X для доказательства используется лемма Цорна [ ].

Упражнение 11. В пространстве $X = \mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ задано подпространство $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 2x_2 = 0\}$. Определим на L функционал $f_0(x) = x_1$ для всех $x \in L$. Построить его продолжение на все пространство $\mathbb{R}^2$.

Теорема Хана–Банаха представляет собой один из фундаментальных результатов функционального анализа и будет в дальнейшем часто применяться. Прежде всего она позволяет ответить на вопрос, если $X \neq 0$, то существует ли вообще на X линейные ограниченные функционалы, т. е. будет ли $X^* \neq 0$. Ответ на этот вопрос положителен.

Следствие 3.10.1 (об отделимости точек в пространстве X). Пусть X – нормированное пространство и $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует такой линейный ограниченный функционал в пространстве X, что

1) $\|f\| = 1$;
2) $f(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие X_0, порожденное элементом $x_0 = 0$. Тогда для каждого элемента $x \in X_0$, $x = tx_0$, $t \in K$, зададим функционал $f_0(x) = t\|x_0\|$. Очевидно, что функционал f_0 линеен и $\|f_0\| = 1$, так как

$$|f_0(x)| = |t| \cdot \|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|,$$

причем $f_0(x_0) = \|x_0\|$. По теореме 3.10.1 продолжим f_0 на все пространство X с сохранением нормы, получим $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. $\otimes$

Данное следствие можно сформулировать еще и так : пусть $x,y \in E$ и $x \neq y$, тогда существует такой функционал $f \in X^*$, что $f(x) \neq f(y)$, т. е. функционал f разделяет точки x и y в пространстве X. Это означает, что линейных ограниченных функционалов так много как точек в нормированном векторном пространстве, на котором данные функционалы заданы.

Упражнение 12. Выяснить геометрический смысл этого следствия в $\mathbb{R}^2$.

Следствие 3.10.2 (об отделимости точки от пространства). Пусть в нормированном пространстве X задано подпространство X_0 и элемент x_0 такой, что $\rho(x_0,X_0) = d > 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что

1) $f(x_0) = 1$;
2) $f(x) = 0$ для всех $x \in X_0$;
3) $\|f\| = \dfrac{1}{d}$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $X_1 = X_0 + \{x_0\}$, тогда каждый его элемент можно представить в виде

$$x = y + tx_0,\ y \in X_0,\ t \in \mathbb{R}.$$

На X_1 построим функционал $f_0(x) = t$, который линеен и ограничен, поскольку

$$|f_0(x)| = |t| = \frac{|t| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|\frac{x}{t}\|} \cdot \|x\| = \frac{1}{\|\frac{y}{t} + x_0\|} \cdot \|x\| \leqslant \frac{1}{d} \cdot \|x\|,$$

где

$$d = \inf_{y \in X_0} \|x_0 - y\| \leqslant \|x_0 - y\|.$$

Следовательно, $\|f\| \leqslant \frac{1}{d}$. Заметим, что для $x \in X_0$ $t = 0$, поэтому $f_0(x) = 0$. Если же $x = x_0$, то $t = 1$ и $f_0(x_0) = 1$.

Докажем неравенство $\|f_0\| \geqslant \frac{1}{d}$. Используя определение расстояния от x_0 до подпространства X_0, получим

$$d \leqslant \|x_0 - y_n\| < d + \frac{1}{n}$$

для некоторой последовательности $(y_n) \subset X_0$. Имеем

$$1 = f_0(x_0) = f_0(x_0) - f_0(y_n) = f_0(x_0 - y_n) \leqslant$$

$$\leqslant |f_0(x_0 - y_n)| \leqslant \|f_0\| \cdot \|x_0 - y_n\| < \|f_0\| \Big(d + \frac{1}{n}\Big).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ получим, что $1 \leqslant \|f_0\| \cdot d$. Откуда $\|f_0\| \geqslant \frac{1}{d}$. Затем продолжим функционал f_0 на все пространство X с сохранением нормы по теореме Хана–Банаха. $\otimes$

Следствие 3.10.3. Множество M всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ такого, что $f(x) = 0$ для всех $x \in M$ следует, что $f = 0$, т. е. $f(x) = 0$, $x \in X$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\overline{M} = X$. Тогда для любого элемента $x \in X$ найдется последовательность $(x_n) \subset M$, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $f(x_n) \to f(x)$ в силу непрерывности функционала f. Поскольку $f(x_n) = 0$, то $f(x) = 0$ для всех $x \in X$, т. е. $f = 0$.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия следствия, но $\overline{M} \neq X$. Пусть $x_0 \in X \setminus \overline{M}$ и $\rho(x_0, \overline{M}) = d > 0$. Тогда по следствию 3.10.2 найдется функционал $f \in X^\star$ такой, что $\|f\| = \frac{1}{d}$, $f(x_0) = 1$, а $f(x) = 0$ для всех $x \in \overline{M}$. Но тогда о условию теоремы функционал $f = 0$, что противоречит условию $f(x_0) = 1$. ⊗

Следствие 3.10.4. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – линейно-независимая система элементов в нормированном пространстве X. Тогда найдется система $\{f_e\}_{e=1}^n$ – линейных ограниченных функционалов на X, что

$$f_e(x_k) = \begin{cases} 1, k = e, \\ 0, k \neq e, \ k, e = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Доказательство. Возьмем x_1, а через X_1 обозначим подпространство, порожденное элементами $x_2, \cdots, x_n$. По следствию 3.1.2 существует функционал $f_1 \in X^*$ такой, что $f_1(x_1) = 1$, $f_1(x_i) = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Дальше поступим аналогично. Рассмотрим x_2 и подпространство $X_2 = \mathscr{L}\big(\{x_1, x_3, \ldots, x_n\}\big)$. Тогда найдется линейный ограниченный функционал$f_2 \in X^*$, отделяющий точку x_2 от подпространства X_2, т. е. $f_2(x_2) = 1$, $f_2(x) = 0$, если $x \in \{x_1, x_3, \ldots, x_n\}$ и так далее. ⊗

Определение 3.10.4. Система $\{x_k\}_{k=1}^1 \subset X$ и система функционалов $\{f_e\}_{e=1}^n \subset X^*$ называются *биортогональными*, если

$$f_e(x_k) = \begin{cases} 1, e = k, \\ 0, e \neq k, k, e = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Следствие 3.10.5. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ – линейно независимая система функционалов. Тогда в X найдется система элементов $\{x_e\}_{e=1}^n$, биортогональная к ней.

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n = 1$ утверждение справедливо. Если $f_1 \neq 0$, то найдется такой элемент $y_1 \in X$, что $f_1(y_1) \neq 0$. Тогда $x_1 = \frac{y_1}{f(y_1)}$. Предположим, что мы построили m элементов. Тогда для произвольного $x \in X$ рассмотрим элемент $y = x - \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)x_i$ и вычислим значения построенных функционалов на нем

$$f_k(y) = f_k(x) - \sum_{i=1}^{m} f_i(x)f_k(x_i) = f_k(x) - f_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

С другой стороны равенство $f_{m+1}(y) = 0$ не может выполняться для всех $x \in X$, в противном случае оказалось бы, что

$$f_{m+1}(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)f_m(x_k)$$

или

$$f_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} f_m(x_k)f_k.$$

Последнее равенство говорит о том, что система $\{f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}\}$ зависима. Тогда найдется элемент y_{m+1}, что

$$f_{m+1}(y_{m+1}) \neq 0,\ x_{m+1} = \frac{y_{m+1}}{f(y_{m+1})}.$$

Следствие доказано. $\otimes$

Задачи

1. Пусть $x_0(t)$ – некоторая фиксированная непрерывная функция. Рассмотрим в $C[0,1]$ подпространство, порожденное функцией $x_0(t) \in C[0,1]$, $L = \{\alpha x_0(t),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. На L определим функционал $f_0 : f_0(x) = \lambda$, $x = \lambda x_0$. Вычислить $\|f_0$. Продолжить его на все пространство $C[0,1]$ с сохранением нормы.

2. На плоскости рассмотрим гиперплоскость $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}$. На L определим линейный ограниченный (проверить!) функционал $f_0(x) = \frac{1}{2}x_1$. Продолжить его на всю плоскость с сохранением нормы. Рассмотреть случаи, когда на плоскости заданы нормы

вида:

$$\|x\|_k = \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \|x\|_c = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

3. Пусть H – гильбертово пространство, $\subset H$ – подпространство, на котором задан линейный ограниченный функционал f_0. Построить продолжение его на все H и доказать, что такое продолжение единственно.

4. Пусть X – банахово пространство, $x \in X$. Доказать, что

$$\|x\| = \{\sup |f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

3.11. Сопряженное пространство и его структура

В примере 18 п. 3.10 мы показали, что всякий линейный функционал f в пространстве $\mathbb{R}^n$ ограничен и имеет вид $f(x) = (x,y)$, где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_i = f(e_i)$, $e_1, \ldots, e_n$ – базис $\mathbb{R}^n$, причем $\|f\| \leqslant \|y\|$. С другой стороны, пусть $x_0 = (\text{sign } y_1, \text{sign } y_2, \ldots, \text{sign } y_n)$, $\|x_0\| = 1$, тогда

$$\|y\| = \sum_{k=1}^{n} |y_k = |f(x_0)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_0\| = \|f\|.$$

Следовательно, $\|f_0\| = \|y\|$.

Таким образом, мы показали, что каждому линейному ограниченному функционалу $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ поставлен в соответствие элемент $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|f\| = \|y\|$, т. е. между пространствами $(\mathbb{R}^n)^*$ и $\mathbb{R}^n$ существует гомеоморфизм с сохранением нормы. Покажем, что аналогичный результат имеет место в произвольном гильбертовом пространстве H.

Теорема 3.11.1 Ф. Рисса. *Пусть H – гильбертово пространство. Для любого линейного ограниченного функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что для всех $x \in H$*

$$f(x) = (x,y)_H, \quad \|f\| = \|y\|. \tag{11.1}$$

Доказательство. Пусть $L = Ker f = \{z \in H : f(z) = 0\}$, тогда L является подпространством в H. Если $L = H$, то по следствию 3.10.3 из теоремы Хана–Банаха $f = 0$, поэтому можно считать, что $y = 0$.

Пусть $L \subset H$, тогда $H = L \oplus L^{\perp}$. Следовательно, существует элемент $z_0 \perp L$ такой, что $f(z_0) \neq 0$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in H$ и по нему построим $z = x - \frac{z_0}{f(z_0)} \cdot f(x)$, который лежит в L. Действительно,

$$f(z) = f(x) - \frac{f(z_0)}{f(z_0)} \cdot f(x) = 0.$$

Но тогда $z \perp z_0$. Поэтому

$$(z,z_0)_H = 0 = (x,z_0)_H - \frac{(z_0,z_0)_H}{f(z_0)} \cdot f(x).$$

Откуда

$$f(x) = (x,y)_H, \quad y = \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} \cdot z_0.$$

Далее, по неравенству Коши-Буняковского

$$|f(x)| = |(x,y)_H| \leqslant \|y\| \cdot \|x\|.$$

Поэтому $\|f\| \leqslant \|y\|$. Для $x = y$ имеем

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{|(y,y)|}{\|y\|} = \|y\|.$$

Докажем единственность элемента y. Предположим, что существуют два элемента y_1 и y_2 из H такие, что $f(x) = (x,y_1) = (x,y_2)$. Тогда $(x, y_1 - y_2) = 0$ для всех $x \in H$. При $x = y_1 - y_2$ имеем $\|y_1 - y_2\| = 0$ или $y_1 = y_2$. $\otimes$

Замечание 3.11.1. В силу теоремы Рисса существует сохраняющее норму взаимно однозначное соответствие между H^* и H. Это позволяет отождествить пространства H и H^*.

Упражнение 13. Докажите теорему Рисса в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Упражнение 14. Используя теорему Рисса докажите теорему Хана-Банаха в гильбертовом пространстве. Однозначно ли в этом случае продолжение?

Рассмотрим общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $C[a,b]$.

Теорема 3.11.2 Ф. Рисс. *Каждый линейный ограниченный функционал в пространстве $C[a,b]$ задается формулой*

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t), \tag{11.2}$$

где $g(t) \in V[a,b]$. При этом

$$\|f\| = \bigvee_a^b (g). \tag{11.3}$$

Доказательство. В правой части (11.2) задан интеграл Римана–Стилтьеса. Поскольку он линеен, то и f – линеен. Из оценки интеграла получим

$$|f(x)| \leqslant \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}g(t) \leqslant \int_a^b \mathrm{d}g(t) \cdot \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)| \leqslant \bigvee_a^b (g) \cdot \|x\|_{C[a,b]},$$

где $\bigvee_a^b (g)$ – полное изменение (полная вариация) функции g. Значит, $\|f\| \leqslant \bigvee_a^b (g)$, т. е. функционал f ограничен.

Пусть теперь $f \in (C[a,b])^*$. Покажем, что функционалу f можно сопоставить некоторую функцию g с ограниченным изменением на отрезке [a,b] такую, что

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t), \quad \bigvee_a^b (g) \leqslant \|f\|.$$

Заметим, что пространство $C[a,b]$ можно рассматривать как подпространство в пространстве ограниченных функций $B[a,b]$ с $\|x\|_{B[a,b]} = \sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|$. По теореме Хана–Банаха продолжим функционал f на пространство $B[a,b]$. Пусть F – это продолжение и $\|F\| = \|f\|$. Рассмотрим семейство функций вида

$$y_a(t) = 0, \quad y_\tau(t) = \begin{cases} 1\ , t \leqslant \tau, \\ 0\ , t > \tau, \text{если } \tau > a. \end{cases}$$

Очевидно, что эти ступенчатые функции непрерывны слева и на них функционал F определен. Положим $g(\tau) = F(y_\tau)$ и покажем, что функция g является искомой.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a,b] : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ и положим $\varepsilon_k = \operatorname{sign}(g(t_k) - g(t_{k-1}))$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (g(t_k) - g(t_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(F(y_{t_k}) - F(y_{t_{k-1}})\big) = F\big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (y_{t_k}(t) - y_{t_{k-1}}(t))\big) \leqslant \|F\| \cdot \|v)\|,$$

где

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (y_{t_k}(t) - y_{t_{k-1}}(t)).$$

Заметим, что при каждом фиксированном t функция $v(t)$ принимает лишь значения $0, \pm 1$, поэтому $\|v\| = 1$. Поскольку приведенные рассуждения справедливы для любого разбиения, то

$$\bigvee_a^b (g) \leqslant \|F\| = \|f\|.$$

Таким образом, мы доказали, что $\|f\| = \bigvee\limits_a^b (g)$, т. е. (11.3) верно. Мы по функционалу F построили функцию $g \in V[a,b]$. Покажем, что с помощью этой функции функционал F и, соответственно, f записывается в виде интеграла (11.2).

Пусть $x(t)$ – произвольная непрерывная функция. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему построим $\delta > 0$ так, чтобы $|x(t^{'}) - x(t^{''}))| < \varepsilon$ как только $|t^{'} - t^{''}| < \delta$. С помощью δ разобьем отрезок $[a,b]$ на части с шагом δ. Рассмотрим ступенчатую функцию $x_\varepsilon(t)$:

$$x_\varepsilon(a) = x(a),\ x_\varepsilon(t) = x(t_k),\ \text{при } t_{k-1} < t \leqslant t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ее можно записать в виде (см. рис. 3.1)

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\big(y_{t_k}(t) - y_{t_{k-1}}(t)\big).$$

Очевидно, что $\|x_\varepsilon(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \in [a,b]$. Тогда

$$F(x_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\big(g(y_{t_k}) - g(y_{t_{k-1}})\big),$$

т. е. представляет собой интегральную сумму для интеграла $\int\limits_a^b x(t)\mathrm{d}g(t)$. Поэтому при достаточно малом δ

$$|F(x_\varepsilon) - \int\limits_a^b x(t)\mathrm{d}g(t) < \varepsilon.$$

Далее,

$$|F(x) - F(x_\varepsilon)| \leqslant \|F\| \cdot \|x - x_\varepsilon\| \leqslant \|F\| \cdot \varepsilon.$$

Поэтому, $|F(x) - \int\limits_a^b x(t)dg(t)| < \varepsilon$.

При $x \in C[a,b]$ $F(x) = f(x)$. Это означает справедливость (11.2) $\otimes$

Замечание 3.11.2. Функция g по функционалу f определяется неоднозначно. Если же потребовать от g непрерывности слева и задать значение $g(a)$, то g по f будет определяться однозначно.

Пример 21. Рассмотрим функционал $f \in (C[a-1,1])^*$, задаваемый формулой

$$f(x) = \frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt.$$

Используя теорему 3.11.2, запишем функцию с ограниченным изменением, непрерывную слева и $g(-1) = 0$. Функция $g(t)$ должна быть дифференцируемой почти всюду на $[-1,1]$, причем $g^{'}(t) = t$ почти всюду. Кроме того в точках $t = -1$ и $t = 1$ она терпит скачок величины $\frac{1}{2}$. Значит,

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ \frac{t^2}{2}, & -1 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases} \qquad \bigvee_{-1}^{1}(g) = 2.$$

Поэтому $\|f\| = 2$.

Задачи

1. Доказать, что всякий функционал $f \in (C^1[a,b])^*$ представим в виде

$$f(x) = \alpha x(a) + \int\limits_a^b x'(t)\mathrm{d}g(t),$$

где α – число, $g \in V[a,b]$.

2. Доказать, что $f \in (C[a,b])^*$ и найти $\|f\|$, если:

1) $f(x) = \alpha x(a) + \beta x(b), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

2) $f(x) = \int\limits_a^b p(t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad p(t) \in C[a,b]$;

3) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\mathrm{d}t - x(\frac{a+b}{2})$.

3. Доказать, что линейный непрерывный функционал $f(x) = x(0)$ в пространстве $C[-1,1]$ не представим в виде $f(x) = \int\limits_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

3.12. Сопряженные операторы и их применение

Сопряженные и самосопряженные операторы широко используются в высшей математике. Так, в уравнениях математической физики с их помощью обосновывается теория существования решений граничных задач. Квантовая механика описывается на языке самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве.

Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ и $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, f – линейный ограниченный функционал, определенный на пространстве Y, т. е. $f \in Y^*$. Для произвольного элемента $x \in X$ положим

$$g(x) = f(Ax). \tag{12.1}$$

Формула (12.1) определяет линейный ограниченный функционал в пространстве X. Действительно,

$$g(\alpha x + \beta y) = f\big(A(\alpha x + \beta y)\big) = f(\alpha Ax + \beta Ay) =$$

$$= \alpha f(Ax) + \beta f(Ay) = \alpha g(x) + \beta g(y),$$

$$|g(x)| = |f(Ax)| \leqslant \|f\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

т. е.

$$\|g\| \leqslant \|f\| \cdot \|A\|. \tag{12.2}$$

Таким образом, мы построили отображение, которое каждому элементу $f \in Y^*$ ставит в соответствие некоторый элемент $g \in X^*$. Оператор, осуществляющий это соответствие, обозначим через A^*.

Определение 3.12.1. *Сопряженным оператором* $A^* : Y^* \to X^*$ к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ называется оператор, действующий по формуле

$$A^* f = g \quad \text{или} \quad f(Ax) = A^* f(x) \tag{12.3}$$

для всех $x \in X$.

Покажем, что $A^* \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$.

Теорема 3.12.1. *Сопряженный оператор A^* является линейным ограниченным оператором из Y^* в X^* и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство. Покажем, что для произвольных функционалов $f_1, f_2 \in Y^*$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in K$ справедливо равенство

$$A^*(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A^* f_1 + \beta A^* f_2.$$

Действительно,

$$A^*(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(Ax) = \alpha f_1(Ax) + \beta f_2(Ax) =$$
$$= \alpha A^* f_1(x) + \beta A^* f_2(x)$$

Из формулы (12.2) вытекает ограниченность оператора A^*, так как $\|g\| = \|A^* f\| \leqslant \|A\| \cdot \|f\|$, или

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|.$$

С другой стороны, пусть $x_0 \in X$ и $Ax_0 \neq 0$. Согласно следствию 3.10.2 из теоремы Хана–Банаха существует функционал $f_0 \in Y^*$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$. Тогда

$$\|Ax_0\| = f_0(Ax_0) = |f_0(Ax_0)| = |A^* f_0(x)| \leqslant \|A^*\| \cdot \|f_0\| \cdot \|x_0\|.$$

Откуда следует неравенство $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. $\otimes$

Мы для каждого оператора $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ построили сопряженный оператор $A^* \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$, определив тем самым *операцию сопряжения.* Приведем некоторые ее свойства.

Свойство 3.12.1.

$$(A+B)^* = A^* + B^*; \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*.$$

Доказательство.

$$(A+B)^* f(x) = f(A+B)(x) = f(Ax) + f(Bx) = A^* f(x) + B^* f(x);$$

$$(\alpha A)^* f(x) = f(\alpha A)(x) = \alpha f(Ax) = \alpha A^* f(x).$$

$\otimes$

Свойство 3.12.2.

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Это свойство доказано в теореме 3.12.1.

Свойство 3.12.3. Пусть $X = Y$. Тогда

$$(AB)^* = B^* A^*; \quad I^* = I.$$

Упражнение 15. Доказать свойство 3.12.3.

Свойство 3.12.4. Если оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, то и A^* также обратим, причем

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Доказательство. Пусть $g = A^* f$ и $y = Ax$. Тогда

$$(A^*)^{-1} g(y) = f(y) = f(Ax) = A^* f(x) = g(x) = g(A^{-1}y) = (A^{-1})^* g(y),$$

т. е. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ $\otimes$

Приведем примеры сопряженных операторов.

Пример 22. Пусть пространства $X = Y = l_2$ заданы над полем $\mathbb{C}$ и пусть $x \in l_2$. Определим оператор $A : l_2 \to l_2$ следующим образом:

$$Ax = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n} \alpha_1 x_1, \ldots),$$

где $\left(\alpha_i\right)_{i=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{C}$.

Применяя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, получим

$$f(Ax) = (Ax,y)_{l_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \overline{y}_{i+k} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \alpha_i \overline{y}_{i+k} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{\overline{\alpha_i} y}_{i+k} = A^* f(x).$$

С другой стороны

$$A^* f(x) = (x,z)_{l_2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z}_i,$$

где $z = A^* y$, $z_i = \overline{\alpha}_i y_{i+k}$. Следовательно,

$$A^* y = (\overline{\alpha}_1 y_{k+1}, \overline{\alpha}_2 y_{k+2}, \ldots).$$

Здесь мы заменили пространство функционалов изоморфным ему пространством, а именно, пространством ℓ_2.

Пример 23. Пусть $X = Y = L_2[a,b]$. оператор

$$Ax(t) = \int_a^b \mathscr{K}(t,s) x(s)\,\mathrm{d}s$$

с ядром $\mathscr{K}(t,s)$ удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |\mathscr{K}(t,s)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s < \infty.$$

Поступим, как в предыдущем случае, заменим пространство $(L_2[a,b])^*$ на ему изоморфное $L_2[a,b]$. Получим

$$f(Ax) = (Ax,y)_{L_2[a,b]} = \int_a^b Ax(t) y(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(\int_a^b \mathscr{K}(t,s) x(s)\,\mathrm{d}s\Big) y(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b x(s) \Big(\int_a^b \mathscr{K}(t,s) y(t)\,\mathrm{d}t\Big) \mathrm{d}s = \int_a^b x(t) \Big(\int_a^b \mathscr{K}(s,t) y(s)\,\mathrm{d}s\Big) \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^b x(t)z(t)\,\mathrm{d}t = (x,z) = A^* f(x),$$

где

$$z(t) = A^* y(t) = \int\limits_a^b \mathscr{K}(s,t)y(s)\,\mathrm{d}s. \tag{12.4}$$

В цепочке равенств мы использовали теорему Фубини о перемене порядка интегрирования по переменным t и s в интеграле Лебега. Формула (12.4) говорит о том, что сопряженным к интегральному оператору Фредгольма является интегральный оператор с ядром $\mathscr{K}(s,t)$ – транспонированным к исходному $\mathscr{K}(t,s)$.

Пример 24. В пространстве $L_2[0,1]$ построим сопряженный оператор к интегральному оператору Вольтерра с непрерывным ядром по переменным t и s

$$Ax(t) = \int\limits_0^t t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s.$$

По определению сопряженного оператора имеем

$$f(Ax) = (Ax,y)_{L_2[0,1]} = \int\limits_0^1 Ax(t)y(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^t t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 x(s)\Big(\int\limits_s^1 t^2 s y(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_t^1 s^2 t y(s)\,\mathrm{d}s\Big)x(t)\,\mathrm{d}t = (x,A^*y)_{L_2[0,1]}.$$

Откуда $A^*y(t) = \int ts^2 y(s)\,\mathrm{d}s$.

В п. 3.5 мы исследовали на разрешимость уравнение вида $Ax = y$, где $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Теорема указывала на то, что данное уравнение разрешимо для любого $y \in Y$, если $\mathscr{R}(A) = Y$. Таким образом, нам фактически нужно уметь описать множество значений $\mathscr{R}(A)$ оператора A.

Теорема 3.12.2. *Пусть* X, Y *– банаховы пространства, оператор* $A : X \to Y$ *– линейный ограниченный оператор,* $\mathscr{R}(A) \subset Y$ *–*

множество его значений. Тогда замыкание $\mathscr{R}(A)$ совпадает с множеством таким $y \in Y$, что $f(y) = 0$ для всех функционалов $f \in Y^*$, удовлетворяющих условию $A^*f = 0$.

Доказательство. Обозначим через L – множество векторов, удовлетворяющих условию,т. е.

$$L = \bigcap_{f \in Y^*, A^*f=0} Kerf, \quad Kerf = \{y \in Y : f(y) = 0\} \subset Y.$$

$Kerf$ является подпространством в Y, поэтому $Kerf$ замкнуто и, следовательно, L замкнуто в Y. Докажем, что $\overline{\mathscr{R}(A)} = L$.

Пусть $y \in \mathscr{R}(A)$, т. е. y удовлетворяет уравнению $Ax = y$ и $f \in Y^*$ является решением уравнения $A^*f = 0$. Тогда

$$f(y) = f(Ax) = A^*f(x) = 0(x) = 0.$$

Это означает, что $y \in L$, т. е. $\mathscr{R}(A) \subset L$. Поскольку $L = \overline{L}$, то $\overline{\mathscr{R}(A)} \subset L$.

С другой стороны, пусть существует такой элемент $y_0 \in L$, который не принадлежит подпространству $\overline{R(A)}$. Тогда по следствию 3.10.2 из теоремы Хана–Банаха, он отделим от подпространства $\overline{\mathscr{R}(A)}$. Это означает, что найдется такой функционал f_0, что $f_0(y_0) = 1$, а $f_0(y) = 0$ для всех $y = Ax \in \overline{\mathscr{R}(A)}$. Тогда $A^*f_0(x) = f_0(Ax) = f_0(y) = 0$. Это означает, что функционал f_0 удовлетворяет уравнению $A^*f_0 = 0$. А в этом случае для элемента $y_0 \in L$ будет выполняется условие $f_0(y_0) = 0$, что противоречит первоначальному выбору функционала. Значит $L \subset \overline{\mathscr{R}(A)}$.

Доказанные включения означают, что $\overline{\mathscr{R}(A)} = L = \{y \in Y : f(y) = 0 \forall f \in Y^*, A^*f = 0\}$. $\otimes$

Следствие 3.12.1. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо при заданном y необходимо, а если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто, то и достаточно, чтобы любой функционал, удовлетворяющий уравнению $A^*f = 0$, на заданном y обращается в нуль.

Следствие 3.12.2. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо для любого $y \in Y$, необходимо, чтобы уравнение $A^*f = 0$ имело только нулевое решение.

Следствие 3.12.3. Уравнение $A^*f = 0$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $\overline{\mathscr{R}(A)} = Y$.

Применим приведенные результаты к исследованию на разрешимость некоторых операторных уравнений.

Пример 25. Пусть $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathscr{R}^n, A : X \to Y$ – оператор, определяемый матрицей $A = (a_{ij})$.

Упражнение 16. Доказать, что сопряженный оператор A^* определяется матрицей, транспонированной к исходной.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений $Ax = y$, записанную в виде

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = y_j, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{12.5}$$

Известно, что в конечномерном пространстве любое линейное многообразие замкнуто. Значит $\overline{\mathscr{R}(A)}$ – подпространство в $\mathscr{R}^m$. Из следствия 3.12.1 вытекает, что система (12.5) разрешима при заданном $y \in \mathscr{R}^n$ в том и только том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i = 0$$

для любого вектора $z \in \mathscr{R}^n$, являющегося решением однородной системы $A^T z = 0$ или

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i = 0, j = 1,2,\ldots,m.$$

Пример 26. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$x(t) + 3\int\limits_0^1 (2ts - 4t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = 1 - 2t.$$

Выясним, имеет ли данное уравнение решение. Рассмотрим сопряженное однородное уравнение

$$u(t) + 3\int\limits_0^1 (2ts - 4s^2)u(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

и найдем его решение, учитывая вырожденность ядра.

$$u(t) = -6t \int_0^1 su(s)\,\mathrm{d}s + 12 \int_0^1 s^2 u(s)\,\mathrm{d}s,$$

или

$$u(t) = 6(2c_1 - tc_2).$$

Для определения c_1 и c_2 решим систему уравнений

$$c_1 = \int_0^1 s^2(12c_1 - 6sc_2)\,\mathrm{d}s,$$

$$c_2 = \int_0^1 s(12c_1 - 6sc_2)\,\mathrm{d}s.$$

Имеем, $2c_1 = c_2$. Следовательно, $u(t) = 6c(1-t)$, где c – произвольная постоянная. Проверим условие разрешимости исходного уравнения

$$\int_0^1 (1-2t)(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Это означает, что уравнение не разрешимо.

Задачи

1. Пусть X, Y – банаховы пространства. Доказать, что отображение $f : \mathscr{B}(X,Y) \to \mathscr{B}(Y^*, X^*)$, $f(A) = A^*$ непрерывно.

2. Пусть H – гильбертово пространство. Найти сопряженный к оператору A, действующему по закону $Ax = (x,y)z$, где $y,z \in H$ – фиксированные элементы.

3.13. Самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах

Из теоремы Рисса 3.11.1, вытекает, что каждый линейный ограниченный функционал f в гильбертовом пространстве H задается с помощью скалярного произведения , т. е. $f(x) = (x,y)$, $x \in H$, y – единственный элемент из H. Это означает, что существует изометрическое отображение между H и H^*, поскольку $\|f\| = \|y\|$. В связи с этим возникают некоторые специфические свойства у сопряженных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H. Эти операторы широко применяются в теоретической физике.

Определение 3.13.1. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A : H \to H$, $A \in \mathscr{B}(H)$. *Сопряженным* оператором к оператору A называется оператор $A^* : H^* \to H^*$ такой, что для любых $x, y \in H$ выполняется равенство

$$(Ax,y)_H = (x, A^*y)_H. \tag{13.1}$$

Определение 3.13.2. Оператор A называется *самосопряженным,* если $A = A^*$, т. е.

$$(Ax,y)_H = (x, Ay)_H. \tag{13.2}$$

для всех $x, y \in H$.

В предыдущем пункте в примерах 22 и 23 мы рассматривали сопряженные операторы. Так, в случае когда оператор задан в пространстве $\mathbb{R}^n$ матрицей (a_{ij}), $i,j = 1,\dots,n$, условие $A = A^*$ будет выполняться, когда матрица оператора будет симметричной.

Упражнение 17. Пусть оператор $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и задается матрицей (a_{ij}), $i,j = 1,\dots,n$. Доказать, что $A = A^*$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $i,j = 1,\dots,n$.

Интегральный оператор Фредгольма в пространстве $L_2[a,b]$ будет самосопряженным в том случае, когда ядро оператора является симметричным, т. е. $\mathscr{K}(t,s) = \mathscr{K}(s,t)$.

Пример 27. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор умножения на непрерывную функцию, т. е. $Ax(t) = m(t)x(t)$, $m(t) \in C[a,b]$ – фиксированная функция. Если функция $m(t)$ действительная, то оператор A будет самосопряженным.

Сформулируем некоторые свойства самосопряженных операторов.

Теорема 3.13.1. *Пусть A и B – самосопряженные операторы, заданные в гильбертовом пространстве H. Тогда операторы $A+B$ и αA, где α – скаляр, также являются самосопряженными.*

Доказательство. Воспользуемся определением самосопряженного оператора и свойствами скалярного произведения. Имеем

$$\big((A+B)x,y\big) = \big(Ax+Bx,y\big) = \big(Ax,y\big) + \big(bx,y\big) =$$

$$= \big(x,Ay\big) + \big(x,By\big) = \big(x,Ay+By\big) = \big(x,(A+B)y\big).$$

Аналогично доказывается самосопряженность оператора αA. ⊗

Теорема 3.13.2. *Пусть A и B – самосопряженные операторы в H. Оператор AB являются самосопряженными тогда и только тогда, когда $AB = BA$.*

Доказательство. По определению самосопряженного оператора

$$\big(AB)x,y\big) = \big(Bx,Ay\big) = \big(x,BAy\big).$$

Тогда $AB = BA$. ⊗

С каждым самосопряженным оператором A можно связать билинейную эрмитову форму

$$a(x,y) = \big(Ax,y\big)_H, \tag{13.3}$$

с помощью которой в пространстве H можно ввести скалярное произведение

$$[x,y]_A = \big(Ax,y\big)_H, \tag{13.4}$$

Билинейная форма линейна по первой переменной и антилинейна по второй.

Упражнение 18. Доказать, что (13.4) задает в H скалярное произведение.

Если в (13.3) положить $x = y$, то получим соответствующую квадратичную форму

$$a(x,x) = \big(Ax,x\big)_H, \tag{13.5}$$

которая для всех x принимает лишь вещественные значения. Действительно,

$$\big(Ax,x\big) = \big(x,Ax\big) = \big(\overline{Ax,x}\big).$$

Теорема 3.13.3. *Пусть $A : H \to H$ – самосопряженный оператор. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\big(Ax,x\big)|. \tag{13.6}$$

Доказательство. Обозначим через

$$C_A = \sup_{\|x\|=1} |\big(Ax,x\big)| = \sup_{x\neq 0} \frac{|(Ax,x)|}{(x,x)}. \tag{13.7}$$

Нам требуется доказать, что $C_A = \|A\|$. Из свойств скалярного произведения и ограниченности оператора A имеем

$$|\big(Ax,x\big)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\|^2$$

или

$$\frac{|\big(Ax,x\big)|}{\|x\|^2} \leqslant \|A\|.$$

Переходя в этом неравенстве к точной верхней грани, получим $C_A \leqslant \|A\|$.

Докажем обратное неравенство. Рассмотрим произвольные элементы $x,y \in H$. Тогда

$$\big(A(x-y), x-y\big) = \big(Ax,x\big) - 2Re\big(Ax,y\big) + \big(Ay,y\big),$$

$$\big(A(x+y), x+y\big) = \big(Ax,x\big) + 2Re\big(Ax,y\big) + \big(Ay,y\big),$$

Вычтем из второго равенства первое, получим

$$4Re\,\big(Ax,x\big) = \big(A(x+y), x+y\big) - \big(A(x-y), x-y\big)$$

или

$$4\big|Re\,\big(Ax,x\big)\big| = \big|\big(A(x+y), x+y\big)\big| + \big|\big(A(x-y), x-y\big)\big|.$$

Поскольку из (13.7) следует, что $|\big(Ax,x\big)| \leqslant C_A\|x\|^2$, то последнее неравенство после применения неравенства параллелограмма можно записать в виде

$$4\big|Re\,\big(Ax,x\big)\big| \leqslant C_A\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) \leqslant 2C_A\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Пусть $y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|}$, тогда $\|x\| = \|y\|$ и

$$\left|Re\left(Ax,x\right)\right| \leqslant \left|Re\left(Ax,\frac{\|x\|}{\|Ax\|Ax}\right)\right| = \|x| \ \|Ax\|.$$

Значит, $\|Ax\| \leqslant C_A\|x\|$ или $\|A\| \leqslant C_A$. Объединяя два неравенства, получим требуемое равенства $\|A\| = C_A$. $\otimes$

С помощью формы (13.5) определим понятие нижней и верхней граней самосопряженного оператора A

$$m = \inf_{\|x\|=1}\left(Ax,x\right), \quad M = \sup_{\|x\|=1}\left(Ax,x\right) \tag{13.8}$$

Из соотношений (13.8) и теоремы 3.13.3 вытекает следующая

Теорема 3.13.4. *Пусть $A : H \to H$ – самосопряженный оператор. Тогда*

$$\|A\| = \max\{|m|, M\}. \tag{13.9}$$

Доказательство. Обозначим через $N_A = \max\{|m|, M\}$. Из теоремы 3.13.3 вытекает, что для всех x с $\|x\| = 1$

$$\left|\left(Ax,x\right)\right| \leqslant C_A, \text{ или } -C_A \leqslant \left(Ax,x\right) \leqslant C_A.$$

Тогда

$$-C_A \leqslant m \leqslant M \leqslant C_A.$$

Откуда

$$N_A \leqslant C_A = \|A\|.$$

В свою очередь из неравенств

$$\left(Ax,x\right) \leqslant M \leqslant N_A, \quad -\left(Ax,x\right) \leqslant -m \leqslant N_A$$

следует

$$\left|\left(Ax,x\right)\right| \leqslant N_A \text{ или } \|A\| = C_A \leqslant N_A.$$

$\otimes$

Определение 3.13.3. Самосопаряженный оператор A называется *положительным,* $A > 0$, если он он отличен от нулевого и его нижняя грань m неотрицательна, т. е. если

$$\left(Ax,x\right) \geqslant 0$$

для любого $x \in H$ и $\big(Ax,x\big) > 0$ хотя бы для одного $x \in H$; *неотрицательным,* если $\big(Ax,x\big) \geqslant 0$ для любого $x \in H$.

Говорят, что самосопряженный оператор A самосопряженного оператора B, если $A - B > 0$. Таким образом, между самосопряженными операторами можно ввести отношение порядка и превратить множество самосопряженных операторов в частично упорядоченное множество.

С помощью формулы (13.4) в гильбертовом пространстве H мы ввели скалярное произведение. Как известно, для обычного скалярного произведения справедливо неравенство Коши–Буняковского. Что можно сказать о скалярном произведении $[x,y]_A$?

Лемма 3.13.1. *Пусть $A > 0$ – самосопряженный оператор в H. Тогда для любых $x,y \in H$ справедливо обобщенное неравенство Коши–Буняковского*

$$\big|\big(Ax,y\big)\big|^2 \leqslant \big(Ax,x\big)\big(Ay,y\big). \tag{13.10}$$

Упражнение 19. Доказать неравенство (13.10).

В гильбертовом пространстве для самосопряженного оператора $\mathscr{D}(A) = H$. Если оператор A определен на всюду плотном в H множестве и выполняется равенство $\big(Ax,y\big) = \big(x,Ay\big)$ для всех $x,y \in \mathscr{D}(A)$, то оператор A называется *симметричным.* В общем случае симметричный оператор может и не быть ограниченным.

Пример 28. Для уравнений с частными производными хорошо известен следующий дифференциальный оператор:

$$Ax = -\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x,$$

заданный в пространстве $L_2[a,b]$, областью определения которого $\mathscr{D}(A) = \big\{x(t) \in C^2[0,\pi] \ : \ x(0) = x(\pi) = 0\big\}$. Покажем, что A – симметричный оператор. Пусть $x(t), y(t) \in \mathscr{D}(A)$, тогда используя дважды формулу интегрирования по частям, получим

$$\big(Ax,y\big) = \int\limits_0^\pi \Big(-\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + x(t)\Big) y(t)\,\mathrm{d}t = -y(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_0^\pi +$$

$$+\int_0^\pi \Big(-\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t)\Big) x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \Big(-\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + y(t)\Big) x(t)\,\mathrm{d}t = \big(x, Ay\big).$$

Оператор $A : L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi]$ является неограниченным. Так для последовательности функций $x_n(t) = \sqrt{2/\pi}\sin nt$, $n = 1,2,\ldots$, с $\|x_n\| = 1$ имеем

$$\|Ax_n\|^2_{L_2[0,\pi]} = n^2 + 1 \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

В численном анализе с положительным самосопряженным оператором связан основной вариационный принцип. Сформулируем его.

Пусть $A : H =\!\!\to H$, $A = A^\star$, $A > 0$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax = y. \tag{13.11}$$

Уравнению (13.11) поставим в соответствие экстремальную задачу, а именно, задачу отыскания минимума функционала

$$f(x) = \big(Ax, y\big) - 2(y, x). \tag{13.12}$$

Теорема 3.13.5. *Пусть $A : H \to H$ – самосопряженный положительный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) = H$. Если уравнение* (13.11) *имеет решение, то на нем функционал f вида* (13.12) *принимает наименьшее значение и наоборот.*

Эквивалентность уравнений (13.11) и (13.12) лежит в основе широко используемого в вычислительной математике метода Ритца.

В заключении определим некоторые операторы, которые встречаются в литературе.

Оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ называется *нормальным,* если $AA^\star = A^\star A$. Очевидно, что A нормален тогда и только тогда, когда $A^\star$ нормален.

Оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ называется *унитарным,* если $AA^\star = A^\star A = I$, т. е. $A^\star = A^{-1}$.

Задачи

1. Пусть $A \in \mathscr{B}(H)$, $AA^* = A^*A$. Докажите, что оператор A – неотрицательный и самосопряженный.

2. Пусть $A,B \in \mathscr{B}(H)$, $A = A^*$, $B = B^*$. Пусть $(Ax,x) = (Bx,x)$ для всех $x \in H$. Докажите, что $A = B$.

3. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — фиксированный элемент пространства m. Оператор $A \in \mathscr{B}(l_2)$ задается формулой $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$. Выразить в терминах чисел $\alpha_n (n \in \mathbb{N})$ следующие свойства оператора A :

а) $A = A^*$,

б) $A \geqslant 0$;

в) $A^* = A^{-1}$.

4. Пусть $A \in \mathscr{B}(H)$ – обратимый самосопряженный оператор. Доказать, что A^{-1} самосопряжен.

5. Пусть $A \in \mathscr{B}(H)$ — неотрицательный оператор. Доказать, что

а) для любых $x,y \in H$ $|(Ax,y)| \leqslant (Ax,x) \cdot (Ay,y)$;

б) для любого $x \in H$ $\|Ax\|^2 \leqslant \|A\| \cdot (Ax,x)$.

3.14. Операторы ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве

Рассмотрим частный случай сомосопряженного оператора в гильбертовом пространстве – оператор ортогонального проектирования или ортопроектор.

Пусть в H задано подпространство $L \subset H$. Согласно теореме о разложении в прямую сумму гильбертова пространства имеем $H = L \oplus L^\perp$ или $x = y + z, y \in L, Z \in L^\perp$. Тогда каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in L$ – проекцию элемента x на подпространство L. Тем самым определяется отображение отображение или оператор, который называется *ортопроектором* и $y = Px$. Если H является сепарабельным пространством, то по теореме **??** в нем существует полная ортонормированная система $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$. Выберем в ней некоторую подсистему $\{\varphi_{jk}\} \subset \{\varphi_j\}$. Рассмотрим подпространство L, порожденное этой подсистемой. Согласно теореме о разложении в ряд Фурье каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in L$, который является его проекцией, при этом $y = \sum\limits_{k=1}^\infty c_{jk}\varphi_{jk}, c_{jk} = (x,\varphi_{jk})$. Обозначим через $\{\varphi_{ik}\}$ – подсистему, дополнительную к $\{\varphi_{jk}\}$. Тогда подпространство, порожденное этой подсистемой, представляет собой $L^\perp$ и каждый элемент $z \in L^\perp$ можно записать так $z = \sum\limits_k c_{ik}\varphi_{ik}$, $c_{ik} = (x,\varphi_{ik})$. В этом случае z является проекцией вектора $x \in H$ на $L^\perp$.Если P – ортопроектор на

$L^{\perp}$, то $I-P$ – ортопроектор на $L^{\perp}$. Операторы P и $I-P$ еще называют *проекционными операторами.*

Упражнение 20. Покажите, что $x \in L$ тогда и только тогда, когда $Px = x$, соответственно $x \in L^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $Px = 0$.

Рассмотрим основные свойства ортопроекторов.

Свойство 3.14.1. Каждый ортопроектор определен на всем H и является линейным оператором.

Доказательство. Пусть $x \in H$ и $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, где $x_1, x_2 \in H$, $\alpha, \beta \in K$.Поскольку $H = L \oplus L^{\perp}$, то $x = y + z$ и соответственно $x_1 = y_1 + z_1, x_2 = y_2 + z_2$, где y,$y_1, y_2 \in L$, $z, z_1, z_2, \in L^{\perp}$. Рассмотрим $y + z = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)$, где $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L$, $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L^{\perp}$. Следовательно, $P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2$. $\otimes$

Свойство 3.14.2. $P \in \mathscr{B}(H)$, $\|P\| = 1$, если $L \neq \{0\}$.

Доказательство. Представим $x \in H$ в виде $Ix = Px + (I-P)x$ и воспользуемся теоремой Пифагора. Тогда $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$. Откуда $\|x\|^2 \geqslant \|Px\|^2$ или $\|P\| \leqslant 1$.

Пусть теперь $L \neq \{0\}$ и $x_0 \in L$, тогда $Px_0 = x_0$, а это означает, что $\|P\| \geqslant \frac{\|Px_0\|}{\|x_0\|} = 1$. Значит, $\|P\| = 1$. $\otimes$

Свойство 3.14.3. $P^2 = P$.

Доказательство. Пусть $x \in H$, тогда $Px \in L$, а $P(Px) = P^2 x = Px$. Это означает, что $P = P^2$. $\otimes$

Свойство 3.14.4. $P = P^*$.

Доказательство. Пусть x_1,$x_2 \in H$ и $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, где y_1,$y_2 \in L$, z_1,$z_2 \perp L$. Тогда

$$(Px_1,x_2) = (y_1,y_2 + z_2) = (y_1,y_2) = (y_1 + z_1,y_2) = (x_1,Px_2).$$

Здесь использовано то, что $(z_1,y_2) = 0$ и $(y_1,z_2) = 0$. $\otimes$

Свойство 3.14.5. Оператор проектирования неотрицателен, т. е. $(Px,x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$.

Доказательство. Для любого $x \in H$, справедлива цепочка равенств $(Px,x) = (P^2x,x) = (Px,Px) = \|Px\|^2$. Откуда следует, что $(Px,x) \geqslant 0$. $\otimes$

Свойство 3.14.6. $x \in L$ тогда и только тогда, когда

$$\|Px\| = \|x\|.$$

Данное свойство вытекает из теоремы Пифагора.

Свойство 3.14.7. $(Px,x) \leqslant \|x\|^2$ для всех $x \in H$, $(Px,x) = \|x^2\|$ тогда и только тогда, когда $x \in L$.

Доказательство. Действительно, $(Px,x) \leqslant |(Px,x)| \leqslant \|Px\|\|x\| \leqslant \|P\| \cdot \|x\|^2 = \|x\|^2$, так как $\|P\| = 1$. Если же $(Px,x) = (x,x)$, то из свойства (3.14.5) вытекает, что $\|Px\|^2 = \|x\|^2$, а из свойства (3.14.6) следует, что $x \in L$. $\otimes$

Учитывая доказанные свойства, можно среди всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве выделить оператор ортогонального проектирования.

Теорема 3.14.1. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ такой, что $A = A^*$ и $A^2 = A$. Тогда A является проектором на некоторое подпространство $L \subset H$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $L = \{x \in H : Ax = x\}$. Докажем, что L является подпространством в H. Действительно, для любых $x,y \in L$ и любых скаляров $\alpha,\beta \in K$ выполняется равенство $A(\alpha x+\beta y) = \alpha x+\beta y$, так как $Ax = x$, $Ay = y$. Замкнутость множества L вытекает из непрерывности оператора A.

Покажем теперь, что A – оператор ортогонального проектирования. Возьмем любой элемент $x \in H$ и представим его в виде $x = Ax+(x-Ax)$. Если мы докажем, что $Ax \in L$, а $x-Ax\perp L$, то это будет означать, что элемент Ax является проекцией элемента x на подпространство L. Докажем, что $Ax \in L$. Действительно, $A(Ax) = A^2x = Ax$. Затем для любого элемента $y \in L$ рассмотрим скалярное произведение $(x - Ax,y)$ и преобразуем его

$$(x - Ax,y) = (x,y) - (Ax,y) = (x,y) - (x,Ay) = (x,y) - (x,y) = 0,$$

так как $Ay = y$. Следовательно, $x - Ax\perp L$. $\otimes$

Замечание 3.14.1. В банаховом пространстве X можно также определить понятие *оператора проектирования.* В этом случае оператор $A \in \mathscr{B}(X)$ называется оператором проектирования, если $A^2 = A$.

3.15. Компактные операторы

Компактные или вполне непрерывные операторы интересны тем, что они наследуют многие свойства линейных операторов в конечномерных подпространствах и допускают детальное описание. кроме того, они широко используются при исследовании разрешимости операторных уравнений и в частности – интегральных уравнений.

Определение 3.15.1. Пусть X и Y – банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \in Y$ называются *компактным*, если он отражает всякое ограниченное множество пространства X в предкомпактное множество пространства Y.

Совокупность всех компактных операторов, действующих из X в Y, обозначим символом $\mathscr{K}(X,Y)$. Очевидно, что всякий компактный оператор является ограниченным в силу ограниченности предкомпактного множества, поэтому $\mathscr{K}(X,Y) \subset \mathscr{B}(X,Y)$. С учетом свойств ограниченных и предкомпактных (вполне ограниченных) множеств можно сформулировать другие определения, эквивалентные определению 3.15.1, которыми удобно пользоваться на практике.

Определение 3.15.2. Линейный оператор $A : X \in Y$ называется *компактным*, если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B[0,r] \subset X$ последовательность образов $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ содержит фундаментальную подпоследовательность.

Определение 3.15.3. Линейный оператор $A : X \in Y$ называются *компактным*, если образ $A(B)$ любого шара $B[0,r] \subset X$ является вполне ограниченным в Y множеством.

Рассмотрим несколько примеров компактных операторов.

Пример 29. Пусть Y – конечномерное банахово пространство, $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Тогда, $A(B)$ – образ шара $B[0,r]$ пространства X будет ограниченным в Y множеством, и, следовательно, вполне ограниченным.

Пример 30. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *оператором конечного ранга,* если $\dim \mathscr{R}(A) < \infty$, т. е. если множество его значений

$\mathscr{R}(A)$ есть конечномерное подпространство пространства Y. В этом случае $A(B)$ является ограниченным множеством в конечномерном пространстве, поэтому предкомпактным, т. е. $A \in \mathscr{K}(X,Y)$. Таким образом, любой линейный ограниченный оператор конечного ранга компактен. Примером такого оператора служит интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром, действующий в пространстве $C[a,b]$ либо $L_p[a,b]$, $p \geqslant 1$. В этом случае ядро $\mathcal{K}(t,s)$ оператора A представимо в виде

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s), \tag{15.1}$$

где $a_i(t), b_i(s)$ $(i = \overline{1,n})$ – фиксированные линейно–независимые функции. А область значений оператора A

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s) x(s)\,\mathrm{d}s \tag{15.2}$$

содержится в линейной оболочке функций $a_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Пример 31. Рассмотрим оператор (15.2) как оператор, действующий из пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$, ядро которого $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно по совокупности переменных. Покажем, что $A(B)$ предкомпактно в $C[a,b]$. По теореме Арцела–Асколи мы должны проверить условия равномерной ограниченности и равномерной непрерывности множества функций $y(t) = Ax(t) \subset A(B)$. Итак,

$$\|y\|_C = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |Ax(t)| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)x(s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant \mathcal{M}(b-a), \text{ где } M = \max_{a\leqslant t,s\leqslant b} |\mathcal{K}(t,s)|.$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

так как в силу равномерной непрерывности функции $\mathcal{K}(t,s)$ на компакте $[a,b] \times [a,b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t_1,t_2 \in [a,b] : |t_1 - t_2| < \delta$ следует, что

$$|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)| < \varepsilon.$$

Таким образом, интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром компактен.

Упражнение 21. Доказать, что оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a,b]$ не является компактным.

Пример 32. Рассмотрим интегральный оператор (15.2) в пространстве $L_2[a,b]$ при условии, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно. В примере 31 мы показали, что образ единичного шара $A(B)$ – предкомпактное множество в $C[a,b]$. Поэтому из любой последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A(B)$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность (y_{nk}) в $C[a,b]$, т. е.

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} |y_{nk}(t) - y_{nm}(t)| \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0.$$

Далее, для любой функции $y(t) \in C[a,b]$ имеем

$$\|y\|_{L_2[a,b]} = \Big(\int\limits_a^b |y(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big) \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)| \cdot \sqrt{b-a} = \sqrt{b-a} \cdot \|x\|_{C[a,b]}.$$

Значит, любая последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ во множестве $A(B) \subset L_2[a,b]$ содержит фундаментальную подпоследовательность (y_{nk}) и множество $A(B)$ предкомпактно в $L_2[a,b]$. Случай более общего ядра будет рассмотрен позже в данном параграфе.

Пример 33. Тождественный оператор $I : X \in X$ будет компактным тогда и только тогда, когда $\dim X < \infty$. Поскольку единичный шар предкомпактен только в конечномерном пространстве (см. теорему **??**).

Теорема 3.15.1. *Пусть $A : X \to Y$ – компактный оператор. Тогда область его значений сепарабельна.*

Доказательство. Пусть $x \in B[0,n] \subset X$, т. е. $\|x\| \leqslant n$. Обозначим через K_n образ шара $B[0,n]$, $K_n = A(B) \subset Y$. По определению компактного множества K_n предкомпактно в Y и, следовательно, по теореме сепарабельно. Пусть T_n – счетно всюду плотное множество в K_n, т. е. $\overline{T_n} = K_n$. Так как область значений $\mathscr{R}(A)$ оператора A совпадает с множеством $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, то множество $T = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} T_n$, будет счетным всюду плотным в K, т. е. $\overline{T} = K$. $\otimes$

Теорема 3.15.2. *Пусть* $A_1, A_2 : X \to Y$, $A_1, A_2 \in \mathscr{K}(X,Y)$. *Тогда операторы* $A_1+ +A_2$, αA_1 *также компактны.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве X единичный шар $B[0,r] = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ и проследим за его образом при отображении $A = A_1 + A_2$. Пусть $(y_n) \subset A(B)$, тогда $y_n = A_1x_n + A_2x_n$, где $\|x_n\| = 1$. Так как оператор A_1 компактен, то $A_1(B)$ является предкомпактным множеством, т. е. из последовательности (A_1x_n) можно выделить фундаментальную подпоследовательность (A_1x_{nk}), где n_k пробегает подмножество $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Далее, так как A_2 компактен, то из (A_2x_{nk}) можно выделить фундаментальную подпоследовательность (A_2x_{nm}), причем $n_m \in \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Тогда последовательность $(Ax_{nm}) = (A_1x_{nm}) + (A_2x_{nm})$ будет фундаментальной как сумма фундаментальных подпоследовательностей. Следовательно, $A(B)$ предкомпактно в Y. $\otimes$

Теорема 3.15.3. *Пусть* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность компактных операторов, действующих из* X *в* Y, *равномерно сходится к оператору* A. *Тогда* $A \in \mathscr{K}(X,Y)$.

Доказательство. Пусть $x \in B[0,n] \subset X$ Покажем,что $A(B) \subset Y$ предкомпактно, где $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Заметим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ множество $A_n(B)$ предкомпактно и, следовательно, вполне ограниченно, т. е. допускает конечную ε_n сеть. Поскольку $A_n \rightrightarrows A$ равномерно, то найдется номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ $\|A_n - A\| < \varepsilon$. Зафиксируем n_0 и построим ε – сеть для предкомпактного множества $A_{n0}(B) : S_\varepsilon = \{s_1, \dots s_k\}$. Покажем, что S_ε является сетью и для множества $A(B)$. Пусть $y \in A(B)$, тогда найдется $x \in B[0,1]$, что $y = A_{n0}x$.

Пусть также $s_i \in S_\varepsilon$ таково, что $\|s_i - A_{n0}x\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|s_i - y\| \leqslant \|s_i - A_{n0}x\| + \|A_{n0}x - y\| \leqslant \|s_i - A_{n0}x\| + \|A_{n0} - A\| \cdot \|x\| \leqslant 2\varepsilon.$$

А это означает компактность предельного оператора A. ⊗

Упражнение 22. Показать, что в $C[0,1]$ интегральный оператор со слабо полярным ядром

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{\mathcal{K}_0(t,s)}{|t-s|^\gamma},\ < 0\gamma < 1,$$

компактен.

Пример 34. В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим оператор (15.2) с ядром вида

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{15.3}$$

Покажем, что A компактен. Рассмотрим последовательность непрерывных ядер $\big(\mathcal{K}_n(t,s)\big)_{n=1}^\infty$ таких, что

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}_n(t,s) - \mathcal{K}(t,s)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{15.4}$$

Такую последовательность можно получить, например, следующим образом. Разложим функцию $\mathcal{K}(t,s) \in L_2\big([a,b] \times [a,b]\big)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе, образованной тригонометрическими многочленами.

$$\varphi_{ij} = a_{ij} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi i(t-a)}{b-a} \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi j(s-a)}{b-a},$$

$$\varphi_{0j} = a_{0j} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi j(s-a)}{b-a},$$

$$\varphi_{i0} = a_{i0} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi i(t-a)}{b-a}, \varphi_{00} = a_{00},$$

$$a_{ij}^2 = \Big(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\varphi_{ij}(t,s)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big)^{-1},\ i,j = 1,2,\ldots.$$

Тогда

$$\mathcal{K}_n(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\varphi_{ij}(t,s), \tag{15.5}$$

где

$$c_{ij} = \Big(\mathcal{K}(t,s),\varphi_{ij}(t,s)\Big)_{L_2\Big([a,b]\times[a,b]\Big)},$$

т. е. в качестве $\mathcal{K}_n$ выбран отрезок ряда Фурье. Рассмотрим последовательность (A_n).

$$A_n x(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{15.6}$$

которая является последовательностью компактных операторов. Тогда

$$\|A_n - A\|^2 \leqslant \int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}_n(t,s) - K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Согласно теореме (3.15.3) A является компактным оператором.

Замечание 3.15.1. Если $(A_n) \subset \mathcal{K}(X,Y)$ – последовательность, сходящаяся в каждой точке $x \in X$, то предельный оператор A может оказаться не компактным. В самом деле, в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве с базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим последовательность операторов ортогонального проектирования на конечномерное подпространство, порожденное векторами $e_1, \ldots e_n$. Тогда

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i$$

Операторы P_n являются операторами конечного ранга, поэтому они компактны. Но при $n \to \infty P_n x \to x$, т. е. $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$сильно. Однако тождественный оператор в бесконечномерном пространстве не является компактным.

Пусть $X = Y$. Рассмотрим пространство $\mathscr{K}(X)$ по аналогии с $\mathscr{B}(X)$ в этом пространстве можно рассмотреть произведение операторов.

Теорема 3.15.4. *Пусть $A,B \in \mathcal{B}(X)$. Если хотя бы один из операторов является компактным, то компактным будет и произведение AB.*

Доказательство. Пусть $B[0,1] \subset X$ – единичный шар. Если оператор B ограничен, то он шар $B[0,1]$ переведет в ограниченное множество. Тогда компактный оператор A переведет его в предкомпактное множество. Произведение $A{\cdot}B$ будет компактным оператором. Если же оператор B будет компактным, то образ шара будет предкомпактным множеством, а тогда линейный непрерывный оператор A отобразит его опять в предкомпактное множество. $\otimes$

Следствие 3.15.1. В бесконечномерном банаховом пространстве X компактный оператор $A : X \to X$ не может иметь ограниченного обратного.

Действительно, иначе тождественный оператор $I = AA^{-1}$ был бы компактен в X, что невозможно.

Теорема 3.15.5. *Пусть X,Y – банаховы пространства, оператор $A \in \mathscr{K}(X,Y)$. Тогда $A^* \in \mathscr{K}(X^*,Y^*)$.*

Доказательство. Зафиксируем в пространстве Y^* шар $B^*[0,\overline{r}] = \{f \in Y^* : \|y\| \leqslant \overline{r}$. Рассмотрим последовательность $(f_n) \subset B^*[0,\overline{r}]$. Покажем, что из последовательности $(A^*f_n) \subset A^*(B^*)$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\big(f_n(y)\big)$ на множестве $A(B)$, где B – шар радиус r в X. Она равномерно ограничена, так как

$$|f_n(y)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|y\| \leqslant r\|y\|,$$

и равностепенно непрерывна, ибо

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| = |f_n(y_1 - y_2)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\|$$

Множество $A(B) \subset Y$, таким образом, предкомпактно. Поэтому по теореме Асколи-Арцела из последовательности $f_n(Ax)$ выделится фундаментальная подпоследовательность $f_{nk}(Ax), x \in B[0,\overline{r}] \subset X$. Но $f_{nk}(Ax) = A^*f_{nk}(x)$ и $(A^*f_{nk}) \subset (A^*f_n)$. Значит, оператор A^* предкомпактен. $\otimes$

Пусть теперь $X = Y = H$, где H – гильбертово пространство, $e_1,e_2,\dots e_n \dots$ – его ортонормированный базис. Обозначим через P_n

оператор ортогонального проектирования на n – мерное пространство, порожденное системой $e_1 \dots e_n$. Тогда оператор $I - P_n$ будет ортопроектором на ортогональное дополнение. В этом случае любой элемент $x \in H$ представим в виде

$$x = P_n x + (I - P_n)x, \tag{15.7}$$

причем

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i, \quad (I - P_n)x = \sum_{i=n+1}^{\infty} (x,e_i)e_i.$$

По равенству Стеклова

$$\|P_n x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2, \quad \|(I - P_n)x\|^2 = \sum_{i=n+1} |c_i|^2,$$

где $c_i = (x,e_i)$ – коэффициенты Фурье, а по теореме Пифагора

$$\|x\|2 = \|P_n x\|^2 + \|(I - P_n)x\|^2. \tag{15.8}$$

Пусть $A : H \to H$. Следующая теорема позволяет компактный оператор в некотором смысле заменить конечномерным.

Теорема 3.15.6. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A \in \mathcal{B}(H)$. Для того, чтобы $A \in \mathcal{K}(H)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n = n(\varepsilon)$и такие линейные операторы A_1 и A_2 : A_1 – n – мерный, $\|A_2\| < \varepsilon$, что*

$$A = A_1 + A_2 \tag{15.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Рассмотрим разложение (15.8) для Ax

$$Ax = P_n Ax + (I - P_n)Ax, \quad \text{т. е. } A = P_n + (I - P_n)A. \tag{15.10}$$

Покажем, что $A_1 = P_n A, A_2 = (I - P_n)A$. Действительно, оператор $P_n A$ является конечномерным, так как

$$P_n Ax = \sum_{i=1}^{n} (Ax,e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} (x,A^* e_i)e_i. \tag{15.11}$$

Оператор $(I-P_n)A$ удовлетворяет условию

$$\|(I-P_n)A\| < \varepsilon. \tag{15.12}$$

Докажем неравенство (15.12). Обозначим через $P_n^{\perp} = I - P_n$. Пусть $B[0,r]$ – шар в пространстве H, тогда его образ $A(B)$ в силу компактности оператора A будет предкомпактным в H множеством, следовательно, вполне ограниченным. Тогда для $A(B)$ в H для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε – сеть $S_\varepsilon = \{s_1, \ldots s_n(\varepsilon)\}$, причем $\|Ax - s_i\| < \varepsilon$ для $i = 1,2\ldots,n(\varepsilon)$. Из системы S_ε выберем линейно независимую подсистему и, применяя процесс ортогонализации, построим ортонормированную систему $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_{\overline{n}(\varepsilon)}}$, где $\overline{n}(\varepsilon) < n(\varepsilon)$. Тогда любой элемент $Ax \in A(B), x \in B$, представим в виде

$$Ax = \sum_{i=1}^{\overline{n}} \overline{c_i e_i} + n, \|\eta\| < \varepsilon,$$

$|\overline{c_i}| = |(Ax,\overline{e_i})| = |(x,A^*\overline{e_i})| \leqslant M$, где M – некоторая постоянная.

$$P_n^{\perp} Ax = \sum_{i=1}^{\overline{n}} \overline{c_i} P_n^{\perp}(\overline{e_i}) + P_n^{\perp}(\eta).$$

Поскольку элементов $\overline{e_i}$ конечное число, то найдется такой номер n_0, что при $n > n_0$

$$\max_i \|P_n^{\perp}\overline{e_i}\| < \frac{\varepsilon}{M\overline{n}}.$$

Тогда $\|P_n^{\perp}Ax\| \leqslant M\overline{n} \cdot \max\limits_i \|P_n^{\perp}\overline{e_i}\| + \|P_n^{\perp}\eta\| \leqslant M\overline{n} \cdot \frac{\varepsilon}{M\overline{n}} + \varepsilon < 2\varepsilon$. *Достаточность* Пусть $A = A_1 + A_2$, где A_1 – n–мерный, $\|A_2\| < \varepsilon$. Покажем, что $A \in \mathscr{K}(H)$. Рассмотрим в H шар $B[0,r]$. Докажем, что его образ $A(B)$ вполне ограниченное множество.

Действительно, если $x \in B[0,r]$, то множество $\{A_1x\}$ предкомпактно, поскольку оператор A_1 конечномерный. Значит, для множества $A_1x : x \in B$ существует конечная ε – сеть S_ε. Учитывая условие $\|A_2\| \leqslant \varepsilon$, S_ε будет сетью для всего множества $\{Ax : x \in B\}$. $\otimes$

Следствие 3.15.2. Если $A \in \mathcal{B}(H)$ – компактный оператор, то $A^* \in \mathcal{B}(H)$ также компактен.

Доказательство. Действительно, из (15.9) следует, что

$$A^* = A_1^* + A_2^*,$$

где $\|A_2^*\| \leqslant \varepsilon$, A_1^* – конечномерный оператор. $\otimes$

Задачи

1. Может ли оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a,b]$ быть компактным.

2. Пусть H – гильбертово пространство, $A \in \mathcal{B}(H)$. Доказать, что операторы AA^*, A^*A одновременно компактны или некомпактны.

3. В пространстве l_2 для $x(x_1,\ldots,x_k,\ldots) \in l_2$ рассмотрим оператор A, действующий следующим образом: $Ax_k = y_k = 0$, если k – нечетное, и $y_k = x_{k-1}$, если k – четное. Покажите, что оператор A не является компактным, а A^2 компактен в l_2.

4. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $\exists C > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant C\|x\|$. Будет ли оператор A компактен?

3.16. Теория Рисса – Шаудера для уравнений с компактным оператором

Исследуя на разрешимость интегральные уравнения второго рода, Э. Фредгольм получил результаты, которые не имели места в случае уравнения общего вида. В дальнейшем Ф.Рисс и Ю.Шаудер показали, что свойства интегральных уравнений связаны с компактностью интегрального оператора и построили общую теорию уравнений с компактными операторами.

Пусть A – компактный оператор, заданный на банаховом пространстве X, т. е. $A \in \mathscr{K}(X)$. Рассмотрим в X линейное уравнение второго рода

$$x - Ax = y \tag{16.1}$$

Наряду с уравнением (16.1) рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$z - Az = 0, \tag{16.2}$$

а также сопряженное уравнение

$$f - A^*f = g \tag{16.3}$$

и однородное сопряженное уравнение

$$h - A^*h = 0. \tag{16.4}$$

По теореме $A^* \in \mathscr{K}(X^*)$.

Предварительно докажем теорему о замкнутости области значений оператора $I - A$.

Теорема 3.16.1. *Пусть X – банахово пространство, A – компактный оператор. Тогда множество значений $\mathscr{R}(I - A)$ оператора $I - A$ замкнуто в X, и, соответственно, множество $\mathscr{R}(I - A^*)$ – в X^*.*

Доказательство. Рассмотрим доказательство замкнутости множества $\mathscr{R}(I - A)$ в X. Доказательство замкнутости множества $\mathscr{R}(I - A^*)$ в X^* проводится аналогично.

Из теоремы о замкнутом множестве вытекает, что множество $\mathscr{R}(I - A)$ замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки. Докажем это.

Пусть последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}(I - A)$ сходится к y_0 при $n \to \infty$. Покажем, что $y_0 \in \mathscr{R}(I - A)$. Так как $y_n \in \mathscr{R}(I - A)$, то найдется последовательность $x_n \in X$ такая, что $x_n - Ax = y_n$.

Возможны следующие случаи:

1). Последовательность (x_n) ограничена, тогда последовательность (Ax_n) в силу компактности оператора A содержит сходящуюся подпоследовательность (Ax_{n_k}). Рассмотрим

$$x_{n_k} = Ax_{n_k} + y_{n_k}.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, получим

$$x_0 = Ax_0 + y_0,$$

или

$$x_0 - Ax_0 = y_0.$$

Это означает, что $y_0 \in \mathscr{R}(I - A)$.

2). Пусть последовательность (x_n) неограничена. Рассмотрим подпространство

$$L = Ker(I - A) = \{z \in X : Az - z = 0\}.$$

Введем расстояние

$$d_n = \rho(x_n, L) = \inf_{z \in L} \|x_n - z\|.$$

Согласно определению нижней грани в L найдется элемент z_n такой, что

$$d_n \leqslant \|x_n - z_n\| < \big(1 + \frac{1}{n}\big) d_n.$$

Далее, $(I - A)(x_n - z_n) = y_n$. Сейчас все зависит от того, какова последовательность (d_n).

2a). Пусть (d_n) ограничена, значит последовательность $(x_n - z_n)$ ограничена. Тогда заменяя в пункте 1) x_n на $x_n - z_n$, получим, что $y_0 \in \mathscr{R}(I - A)$.

2b). Предположим, что (d_n) неограничена. Можно считать, что $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим элемент

$$u_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}, \|u_n\| = 1.$$

Тогда

$$(I - A)u_n = \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|} \to 0$$

при $n \to \infty$, поскольку (y_n) ограничена, а $\|x_n - z_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Последовательность (Au_n) содержит сходящуюся подпоследовательность (Au_{n_k}), поскольку $A \in \mathscr{K}(X)$. Но тогда последовательность $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ также сходится к некоторому элементу $x_0 \in L$.

Оценим $\|u_{n_k} - u_0\|$:

$$\|u_{n_k} - u_0\| = \|\frac{\|x_{n_k} - z_{n_k} + u_0\|x_{n_k} - z_{n_k}\|\|\|}{\|x_{n_k} - z_{n_k}\|}\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d_{n_k}}{d_{n_k}(1 + \frac{1}{n_k})} = \frac{n_k}{n_k + 1} \to 1$$

при $n_k \to \infty$.

Полученное неравенство противоречит сходимости последовательности (u_{n_k}). Это означает, что предположение о неограниченности (d_n) сделано ошибочно.

Итак, $\mathscr{R}(I - A)$ замкнуто в X. $\otimes$

Лемма 3.16.1. *Пусть x – некоторое решение уравнения* (16.1), *где $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда существует постоянная $m > 0$, зависящая лишь от A, что выполняется неравенство:*

$$\|x - Ax\| = \|y\| \geqslant m\|x\|. \tag{16.5}$$

Доказательство. Пусть $x \in X$ – решение уравнения (16.1). Тогда $x = (I - A)^{-1}y$. Предположим, что такой постоянной m не существует. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ найдется последовательность x_n с $\|x_n\| = 1$, что

$$\|x - Ax\| = \|y\| < \frac{1}{n}\|x\|. \tag{16.6}$$

Заметим, что если $\|x_n\| \neq 1$, то можно заменить ее на последовательность $\overline{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ Из (16.1) следует, что $x_n - Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Поскольку $A \in \mathscr{K}(X)$, то из последовательности (Ax_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (Ax_{n_k}). Но тогда последовательность (x_{n_k}) также будет сходиться. Поэтому $x_{n_k} \to x_0$, $Ax_{n_k} \to Ax_0$ и $x_0 - Ax_0 = 0$, т. е. $x_0 \in Ker(I - A)$. Но тогда $y_0 = 0$ и $x_0 = (I - A)^{-1}y_0 = 0$.

Но по условию $\|x_n\| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$, причем $\|x_0\| = 1$. Это противоречит тому, что $x_0 = 0$.

Таким образом, справедливо неравенство (16.5). $\otimes$

Следующие теоремы составляют содержание теории Рисса – Шаудера (в упрощенном варианте), являющейся обобщением фредгольмовской теории интегральных уравнений.

Теорема 3.16.2 (первая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$ Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) уравнение (16.1) *имеет решение при любой правой части $y \in X$;*

2) уравнение (16.2) *имеет только нулевое решение;*

3) уравнение (16.3) *разрешимо при любом $g \in X^*$;*

4) уравнение (16.4) *имеет только нулевое решение.*

Если выполнено одной из условий 1), 2), 3), 4), то операторы $I - A$ и $I - A^*$ непрерывно обратимы.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть уравнение (16.1) разрешимо при любой правой части $y \in X$. Тогда $\mathscr{R}(I - A) = X$. Предположим, что при этом условие 2) не выполнено. Это означает, что ядро оператора $I - A$ ненулевое. Обозначим его через N_1, т. е.

$$N_1 = \{x \in X : (I - A)x = 0\}$$

Пусть $x_1 \in N_1$, тогда $x_1 - Ax_1 = 0$ и $x_1 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $x - Ax = x_1$, которое по условию разрешимо. Пусть x_2 – решение, т. е. $x_2 - Ax_2 = x_1$. Применим к уравнению оператор $I - A$, тогда

$$(I - A)^2 x_2 = (I - A)x_1 = 0.$$

Обозначим через

$$N_2 = \{x \in X : (I - A)^2 x = 0\}.$$

$N_1 \subset N_2$, причем включение строгое, потому что $x_2 \in N_2$, но $x_2 \notin N_1$, в противном случае оказалось бы, что $x_1 = 0$.

Продолжая рассуждение, получим цепочку подпространств $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_n \subset \ldots$, строго включенных друг в друга. По лемме Рисса о почти перпендикуляре в каждом N_n найдется такой элемент z_n , что $\|z_n\| = 1$ и $\|x - z_n\| \geqslant \frac{1}{2}$ для всех $x \in N_{n-1}$. Рассмотрим последовательность (Az_n), где $A \in \mathscr{K}(X)$. Она должна содержать последовательность Коши. Пусть (Az_n) – это она и есть. Тогда для $n > m$ имеем

$$\|Az_n - Az_m\| = \|z_n - [(I-a)x_n - (I-A)x_m + z_m]\| = \|x_n - w\| \geqslant \frac{1}{2}, \quad (16.7)$$

где $w = (I - A)x_n - (I - A)x_m + z_n$ и $w \in N_{n-1}$. Действительно,

$$N_{n-1} = \{w \in X : (I - A)^{n-1} w = 0\}.$$

Тогда $(I-A)^n x_n = 0$; $(I-A)^n x_m = 0$, $(n > m)$, $(I-A)^{n-1} z_m = 0$, так как $n-1 \geqslant m$. (16.7) означает, что (Az_n) не является последовательностью Коши, что противоречит компактности оператора A.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть уравнение (16.2) имеет только нулевое решение, т. е. $Ker(I - A) = \{0\}$. Докажем, что уравнение (16.3) разрешимо при любой правой части. Это означает, что должно выполняется равенство $\mathscr{R}(I - A^*) = X^*$. Очевидно, что $\mathscr{R}(I - A^*) \subset X^*$. Покажем включение в другую сторону. Пусть $g \in X^*$ и x – один из прообразов элемента $y \in \mathscr{R}(I - A)$, т. е. $x - Ax = y$. Определим на $\mathscr{R}(I - A)$ функционал

$$f_0(y) = g(x). \quad (16.8)$$

Покажем, что он определен однозначно. Пусть x' – другой прообраз элемента y. Тогда $x - Ax = x' - Ax'$ или $(x - x') - A(x - x') = 0$. Это означает, что $x - x' \in Ker(I - A) = \{0\}$. Таким образом, $g(x - x') = 0$ или $g(x) = g(x')$. Это означает, что неважно, какой из прообразов выбран для определения f_0.

Проверим линейность f_0. Пусть $y_1, y_2 \in \mathscr{R}(I-A)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathscr{R}(I-A.)$ Пусть x_1, x_2 – прообразы y_1 и y_2, соответственно. Имеем

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = (I - A)^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

и

$$f_0(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) = \\ = \alpha_1 f_0(y_1)\alpha_2 f_0(y_2).$$

Докажем, что f_0 ограничен.

В лемме 3.16.1 мы показали, что справедлива оценка $\|y\| \geqslant m\|x\|$ для одного из решений x уравнения (16.1). Но тогда

$$\|f_0(y)\| = \|g(x)\| \leqslant \|g\|\|x\| \leqslant \|g\|m^{-1}\|y\|.$$

Это означает, что

$$\|f_0\| \leqslant \|g\|m^{-1},$$

и $f_0 \in \mathscr{R}(I - A^*)$.

3) $\Rightarrow$ 4). Доказательство этой части теоремы аналогично доказательству 1) $\Rightarrow$ 2).

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $Ker(I - A^*) = \{0\}$. Предположим, что существует такое y_0, при котором уравнение (16.1) не разрешимо. Это означает, что $y \notin \mathscr{R}(I - A)$. Так как по теореме 3.16.1 $\mathscr{R}(I - A)$ – замкнутое множество, то y_0 по следствию 3.10.2 из теоремы Хана–Банаха должно быть отделено от подпространства $\mathscr{R}(I-A)$. Пусть $f_0 \in X^*$ – это такой функционал, что $f_0(y_0) = 1$, а $f_0(y) = 0$ для всех $y \in \mathscr{R}(I - A)$. Но тогда

$$f_0(y) = f_0(x - Ax) = f_0(I - A)(x) = (I - A^*)f_0(x) = 0$$

для всех $x \in X$. Это означает, что

$$(I - A^*)f_0 = 0 \text{ или } f_0 \in Ker(I - A^*) = \{0\}.$$

Итак, $f_0 = 0$, но тогда $f_0(y_0) = 0$. Получили противоречие.

Если выполнено одно из условий 1), 2), 3), 4), то будут выполняться и все остальные. А это означает, что выполняются условия теоремы Банаха об обратном операторе. Следовательно, операторы $I-A$ и $I-A^*$ непрерывно обратимы. $\otimes$

Теорема 3.16.3 (вторая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда уравнения* (16.2) *и* (16.4) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Доказательство. В первой теореме Фредгольма мы доказали, что если $Ker(I-A) = \{0\}$, то $Ker(I-A^*) = \{0\}$. Пусть теперь эти подпространства не нулевые. Докажем предварительно, что они конечномерны. Пусть $B[0{,}1]$ – шар в пространстве $Ker(I-A)$. Тогда образ шара $A(B)$ совпадает с шаром B. Значит, $B[0{,}1]$ – предкомпактное множество в X. По критерию конечномерности это равносильно конечномерности пространства $Ker(I-A)$. Аналогично доказывается конечномерность пространства $Ker(I-A^*)$.

Обозначим через $n = \dim Ker(I-A)$, $m = \dim Ker(I-A^*)$. Докажем, что $n = m$. Предположим, например, что $n < m$.

Пусть $\{v_i\}_{i=1}^n$ – базис пространства $Ker(I-A)$. По следствию 3.10.4 из теоремы Хана–Банаха найдется система функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^n \subset X^*$, биортогональная к системе $\{v_i\}$, т. е. $\gamma_j(v_i) = \delta_{ji}, (i{,}j = 1{,}2, \ldots{,}n)$. Пусть далее $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ – базис пространства $Ker(I-A^*)$, тогда по следствию 3.10.5 из теоремы Хана–Банаха найдется система $\{z_j\}_{j=1}^m$, биортогональная к $\{\psi_i\}$.

Наряду с оператором A рассмотрим оператор $\tilde{A}$,

$$\tilde{A}x = Ax + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x) z_i. \tag{16.9}$$

Оператор $\tilde{A}$ компактен, как сумма компактного оператора и оператора конечного ранга.

Докажем, что $Ker(I-\tilde{A}) = \{0\}$. Пусть $x \in Ker(I-\tilde{A})$, тогда $(I-\tilde{A})x = 0$ или

$$x - Ax = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x) z_i. \tag{16.10}$$

Применим к обеим частям равенства функционал $\psi_k, \ = 1,2,\ldots,m$. Получим

$$\psi_k(x - Ax) = \psi_k\big((I - A)x\big) = \big(I - A^*\big)\psi_k(x) = 0(x) = 0,$$

так как $\psi_k \in Ker(I - A^*)$. Далее,

$$\psi_k\Big(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x)z_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x)\psi_k(z_i) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x)\delta_{ki} = \gamma_k(x) = 0.$$

Имеем $\gamma_k(x) = 0, k = 1,2,\ldots,m$. Из (16.10) следует, что $x - Ax = 0$, т. е. $x \in Ker(I - A)$.

Представим вектор x в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ и применим к обеим частям функционал $\gamma_k(x), k = 1,2,\ldots,m$. Имеем

$$\gamma_k(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\gamma_k(v_i) = x_k = 0.$$

Следовательно, $x = 0$. Это и означает, что $Ker(I - \tilde{A}) = \{0\}$.

Покажем теперь, что $Ker(I - \tilde{A}^*) \neq \{0\}$. А именно, что элемент базиса $\psi_{n+1} \in Ker(I - \tilde{A}^*)$.

Рассмотрим уравнение

$$(I - \tilde{A})^*\psi_{n+1}(x) = \psi_{n+1}(x) - A\psi_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\psi_{n+1}(z_i)\gamma_i(x) = 0$$

или

$$(I - \tilde{A})^*\psi_{n+1}(x) = (I - A^*)\psi_{n+1}(x) - \sum_{i=1}^{n}\psi_{n+1}(z_i)\gamma_i(x) = 0.$$

$(I - \tilde{A}^*)\psi_{n+1}(x) = 0$ по определению пространства $Ker(I - \tilde{A}^*)$, а $\psi_{n+1}(z_i) = 0, i = 1,2,\ldots,n$, исходя из свойства биортогональных систем.

Таким образом, $\psi_{n+1} \in Ker(I - \tilde{A}^*)$. Это противоречит теореме 3.16.2. Следовательно, предположение $n < m$ неверно.

Заменой A на A^* аналогично доказывается, что $n > m$ быть не может. Поэтому $n = m$. $\otimes$

Теорема 3.16.4 (третья теорема Фредгольма). *Пусть* X – *банахово пространство, оператор* $A \in \mathscr{K}(X)$. *Для того, чтобы уравнение* (16.1) *имело хотя бы одно решение при заданной правой части* $y \in X$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого решения* h *уравнения* (16.4) *выполнялось условие* $h(y) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Если $Ker(I - A) = \{0\}$, то и $Ker(I - A^*) = 0$. Поэтому $0(y) = 0$. Пусть $Ker(I - A) \neq \{0\}$ и пусть уравнение (16.1) имеет решение $x_0 : x_0 - Ax_0 = y$ или $(I - A)x_0 = y$. Пусть также $h \in Ker(I - A^*)$. Тогда

$$h(y) = h\big((I - A)x_0\big) = (I - A^*)h(x_0) = 0(x_0) = 0.$$

Условие выполнено.

Достаточность. Пусть $h(y) = 0$, где $h : (I - A^*)h = 0$. Допустим, что (16.1) тем не менее при данном y решений не имеет, т. е. $y \notin \mathscr{R}(I - A)$. Заметим, что по теореме 3.16.1 множество $\mathscr{R}(I - A)$ замкнуто. Значит по следствию 3.10.3 из теоремы Хана–Банаха существует функционал $f \in X^*$ такой, что

$$f(y) = 1, f(x - Ax) = (I - A^*)f(x) = 0.$$

Но тогда $(I - A^*)f = 0$ и $f \in Ker(I - A^*)$. Следовательно, функционал f на элементе y не может принимать значение единица. Полученное противоречие означает, что уравнение (16.1) разрешимо. $\otimes$

Определение 3.16.1. Пусть X,Y – банаховы пространства. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется фредгольмовым, если

1) $\dim Ker(A) < \infty$;
2) $\dim Ker(A^*) < \infty$;
3) образ $\mathscr{R}(A)$ замкнут в Y;

Следовательно оператор $I - A$, где $A \in \mathscr{K}(X)$, является фредгольмовым.

Число $n = \dim KerA$ называется *числом нулей оператора* A; число $m = \dim KerA^*$ – *дефектом оператора* A; число $\operatorname{ind}(A) = n - m$ – *индексом оператора* A.

Тогда для уравнения $Ax = y$, где A – фредгольмов оператор, справедливы теоремы Фредгольма.

Класс ограниченных фредгольмовых операторов полностью описывается теоремой, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 3.16.5 (С.М. Никольского). *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Для того, чтобы оператор A был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) *$A = B+P$, где $B \in \mathscr{B}(X,Y)$ – непрерывно обратим, $P \in \mathscr{B}(X,Y)$ – оператор конечного ранга;*
2) *$A = C + T$, где $C \in \mathscr{B}(X,Y)$ – непрерывно обратим, $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ – компактен;*

Задачи

1. Привести пример банахова пространства X и оператора $A \in \mathscr{B}(X)$ такого, что уравнение $x - Ax = 0$ имеет бесконечно много решений.

2. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и уравнение $x - Ax = 0$ имеет только нулевое решение. Можно ли утверждать, что уравнение $x - Ax = y$ разрешимо при любой правой части?

3. Пусть $A : X \to Y$ замкнут и существует такое $m > 0$, что для любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$. Доказать, что оператор A называется нормально разрешимым, если для разрешимости уравнения $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы $f(y) = 0$ для всех f, являющихся решениями уравнения $A^* f = 0$.

3.17. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений второго рода

Применим теорию Рисса–Шаудера к исследованию интегральных уравнений второго рода.

Рассмотрим в пространстве $L_2[a,b]$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{17.1}$$

где

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Данное уравнение можно записать в виде $x - Ax = y$, где A – компактный оператор. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$x(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{17.2}$$

Поскольку $L_2[a,b]$ – гильбертово пространство и $(L_2[a,b])^*$ линейно изоморфно $L_2[a,b]$, то соответствующие сопряженные уравнения можно записать опять же на элементах пространства $L_2[0,1]$.

$$u(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s)\,\mathrm{d}s = g(t). \tag{17.3}$$

$$u(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{17.4}$$

Теорема 3.17.1 (альтернатива Фредгольма). *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – такое ядро, при котором интегральный оператор компактен в $L_2[a,b]$. Тогда возможны лишь два случая:*

1) *Однородные уравнения* (17.2) *и* (17.4) *имеет только нулевые решения; уравнения* (17.1) *и* (17.3) *разрешимы для любой правой части и имеют единственные значения.*
2) *Уравнение* (17.2) *имеет лишь конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда уравнение* (17.4) *имеет то же количество линейно независимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Уравнение* (17.1) *разрешимо, если*

$$\int\limits_a^b u_i(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0,\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{17.5}$$

и его решение

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + x_0(t),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные; x_0 – некоторое частное уравнение уравнения (17.1).

Обратимся теперь к интегральному уравнению вида (17.1) в пространстве $C[a,b]$. В этом случае сопряженным к пространству $C[a,b]$ служит пространство $\mathbb{V}[a,b]$ функций с ограниченным изменением. Однако исследование решения сопряженного уравнения в этом пространстве сопряжено с рядом трудностей.

Заметим, что альтернатива Фредгольма, сформированная в пространстве $L[a,b]$, получена из общей теории Рисса–Шаудера, в которой не фигурирует конкретный вид сопряженного оператора и решений сопряженного уравнения. Поэтому первый пункт остается в силе. В пункте 2) нам понадобятся решения сопряженного однородного уравнения.

Однако в случае непрерывного ядра $\mathcal{K}(t,s)$ можно обойтись без обращения к сопряженному пространству, а ввести в рассмотрение так называемое формально сопряженное уравнение

$$u(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s)\,\mathrm{d}s = 0 \qquad (17.6)$$

в пространстве $C[a,b]$.

Теорема 3.17.2. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$, *тогда для уравнения* (17.1) *справедлива альтернатива Фредгольма.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (17.1) в пространстве $L[a,b]$. Для него справедлива альтернатива Фредгольма. Поэтому условия разрешимости имеют вид (17.1), где $u_i(t)$ – решения уравнения (17.4). Пусть теперь $y(t) \in C[a,b]$ и $\mathcal{K}(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$. Тогда решение уравнения (17.1) $x(t)$ будет непрерывной функцией. Действительно, $x(t) = y(t) + z(t)$.

$$z(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Если $x(t) \in L_2[a,b]$, то $z(t) \in C[a,b]$. Это мы показывали в примере пункта **??** То же самое можно сказать и о решениях уравнений (17.3) и (17.4). Следовательно, уравнения(17.2) и (17.4) имеют одинаковое число непрерывных линейно независимых решений

$$x_1(t), \ldots, x_n(t) \in C[a,b],\ u_1(t), \ldots, u_n(t) \in C[a,b].$$

Далее, уравнение (17.1) разрешимо в $L_2[a,b]$ для тех и только тех $y(t) \in C[a,b]$, для которых выполняется (17.5).

Таким образом, все сказанное в теореме 3.17.1 об уравнениях (17.1) – (17.5) в пространстве $L_2[a,b]$, справедливо и в пространстве $C[a,b]$. Теорема доказана. $\otimes$

Пример 35. При любых $\lambda, a,b \in \mathbb{R}$ исследовать на разрешимость и найти решение интегрального уравнения

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+ts}{1+s^2} x(s)\,\mathrm{d}s. \tag{17.7}$$

Применим теорему (17.1). Рассмотрим однородное уравнение и найдем его решение

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(s)}{1+s^2} x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda t \int\limits_{-1}^{1} \frac{sx(s)}{1+s^2} x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Имеем

$$x(t) = \lambda c_1 + \lambda t c_2,$$

где

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\lambda c_1 + \lambda s c_2}{1+s^2} x(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{s(\lambda c_1 + \lambda s c_2)}{1+s^2} x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Откуда для определения c_1 и c_2 получим следующую однородную систему:

$$\begin{cases} c_1(1 - \lambda\frac{\pi}{2}) + c_2 \cdot 0 = 0, \\ c_1 \cdot 0 + (\lambda(2 - \frac{\pi}{2}) - 1)c_2 = 0. \end{cases}$$

Вычислим ее определитель и приравняем к нулю

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \lambda(2 - \frac{\pi}{2}) - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = \frac{2}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{4-\pi}.$$

1) Если $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$ и $\lambda \neq \frac{2}{4-\pi}$, то однородное уравнение имеет только нулевое решение, т. е. $c_1 = c_2 = 0$. Согласно альтернативе Фредгольма неоднородное уравнение (17.7) будет разрешимо при любой правой части, т. е. при любых a и b, и будет иметь единственное решение. Найдем его. Решение будем искать в виде:

$$x(t) = \lambda c_1 + \lambda t c_2 + a + t + bt^2,$$

где

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(s)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\lambda c_1 + \lambda s c_2 + a + s + bs^2}{1+s^2} x(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lambda c_1 + \frac{\pi}{2}a + b(2 - \frac{\pi}{2}),$$

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{sx(s)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-1}^{1} \frac{s(\lambda c_1 + \lambda s c_2 + a + s + bs^2)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \lambda c_2(2 - \frac{\pi}{2}) + (2 - \frac{\pi}{2}) + b.$$

Откуда

$$c_1 = \frac{\pi a + b(4-\pi)}{2 - \pi\lambda}, \quad c_2 = \frac{4-\pi}{2 - \lambda(4-\pi)}.$$

Тогда

$$x(t) = \frac{2a + \lambda b(4-\pi)}{2 - \lambda\pi} + \frac{2}{2 - \lambda(4-\pi)} + bt^2.$$

2) Пусть $\lambda = \frac{2}{\pi}$, тогда однородное уравнение имеет ненулевое решение $x(t) = c$. Рассмотрим соответствующее сопряженное однородное уравнение

$$u(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+st}{1+t^2}\,u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Оно также имеет одно линейно независимое решение

$$u_1(t) = \frac{1}{1+t^2}. \tag{17.8}$$

Условие разрешимости запишется в виде

$$\int_{-1}^{1} \frac{a+t+bt^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

или $a\pi + b(4-\pi) = 0$. Исходное решение при таком условии на правую часть $y(t) = a + t + bt^2 + c$ примет вид

$$x(t) = \frac{\pi}{2(\pi-2)}t + bt^2 + c,$$

где c – произвольная постоянная.

Аналогично рассматривается уравнение при $\lambda = \frac{2}{4-\pi}$, тогда $u_2(t) = \frac{t}{1+t^2}$ и условие разрешимости

$$\int_{-1}^{1} (a+t+bt^2)\cdot\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

или $a\cdot 0 + (2-\frac{\pi}{2}) + b\cdot 0 = 0$. Очевидно, что таких a и b нет. Это означает, что при $\lambda = \frac{2}{4-\pi}$ уравнение (17.8) решений не имеет.

Пример 36. Показать, что уравнение

$$x(t) - \lambda\int_{0}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s = y(t) \tag{17.9}$$

разрешимо при любой правой части $y(t) \in C[0,1]$ и найти его решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$x(t) - \lambda\int_{0}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

или

$$x(t) = \lambda\int_{0}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Тогда $x(t) = \lambda c(t)$, где $c(t) = \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$. Проинтегрируем полученное равенство в пределах от 0 до t :

$$\int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Имеем

$$c(t) = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Это означает, $c(t)$ – непрерывно дифференцируема. Поэтому продифференцируем обе части равенства, получим дифференциальное уравнение

$$c'(t) = \lambda c(t),$$

к которому добавим условие $c(0) = 0$. Таким образом, мы пришли к задаче Коши для функции $c(t)$. Задача Коши имеет единственное нулевое решение. Поэтому уравнение (17.9) имеет единственное решение при $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ и при $\forall y \in C[0,1]$. Найдем его решение по изложенной выше схеме.

$$x(t) = \lambda c(t) + y(t),$$

$$\int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$c(t) = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} - \lambda c(t) = y(t), \\ c(0) = 0. \end{cases}$$

Решение полученной задачи Коши можно записать в явном виде

$$c(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Возвращаясь к исходному уравнению (17.9), получим:

$$c(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau + y(t).$$

Задачи

1. Найти решение уравнения

$$x(t) = -\lambda \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t),$$

если $y(t) = t$,

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ s(t-1), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

2. Доказать, что уравнение

$$x(t) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin(t-2s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t)$$

разрешимо при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ и любой функции $y(t) \in L_2[0, 2\pi]$. Найти его решение.

3.18. Линейные уравнения первого рода с компактным оператором

Пусть X, Y – банаховы пространства. Рассмотрим уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{18.1}$$

где $A \in \mathscr{K}(X,Y)$. Пусть $\mathscr{D}(A) = X$. Теоремы Фредгольма для разрешимости уравнений второго рода опирались на замкнутость множества значений оператора $I - A$. Для уравнения (18.1) $\mathscr{R}(A)$ как правило, не замкнутое множество в Y.

Теорема 3.18.1. *Пусть X,Y – бесконечномерные банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X,Y)$ и не является оператором конечного ранга. Тогда область значений $\mathscr{R}(A)$ оператора A не является замкнутым множеством в Y.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, но $\mathscr{R}(A) = \overline{\mathscr{R}(A)} \subset Y$. Так как Y – банахово пространство, то $\mathscr{R}(A)$ можно рассматривать как подпространство в пространстве Y, т. е. $\mathscr{R}(A)$ будет банаховым пространством. Пусть $B[0,n] = \{x \in X : \|x\| \leqslant n\}$ – шар в X радиуса n в банаховом пространстве X. Тогда $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B[0,n]$, а $\mathscr{R}(A) = A(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(B)$.

Шар B – ограниченное множество в X, $A \in \mathscr{K}(X,Y)$, поэтому его образ $A(B)$ предкомпактное множество, а значит, $A(B)$ нигде не плотно в $\mathscr{R}(A)$, так как $\mathscr{R}(A)$ бесконечномерно.

Таким образом, мы показали, что банахово пространство $\mathscr{R}(A)$ является счетным объединением нигде не плотных множеств. Это противоречит теореме Бэра о категориях, согласно которой банахово пространство является множеством второй категории. Следовательно, множество $\mathbb{R}(A)$ незамкнуто. $\otimes$

Следствие 3.18.1. Пусть X, Y – конечномерные банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X,Y)$. Тогда $\mathscr{R}(A)$ замкнутое множество.

Доказательство. $\mathscr{R}(A)$ всегда является линейным многообразием в Y. Поскольку Y конечномерно, то линейное многообразие $\mathscr{R}(A)$ замкнуто в Y. $\otimes$

Таким образом, в конечномерных пространствах теряется разница между уравнениями первого и второго рода.

Теорема 3.18.2. *Пусть X, Y – бесконечномерные банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X,Y)$ и на $\mathscr{R}(A)$ существует обратный оператор A^{-1}. Тогда A^{-1} неограничен на $\mathscr{R}(A)$.*

Доказательство. Предположим, что A^{-1} ограничен. Тогда $I = AA^{-1} : X \to X$ является компактным оператором в бесконечномерном пространстве, что противоречит критерию конечномерности (см. теорему **??**). Тогда A^{-1} неограничен. Заметим, что пространство Y может быть в этом случае и конечномерным. $\otimes$

Рассмотрим интегральные уравнения первого рода – уравнение Фредгольма

$$\int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \tag{18.2}$$

и уравнение Вольтерра

$$\int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{18.3}$$

Согласно теоремам 3.18.1 и 3.18.2 при заданной правой части $y(t) \in L_2[a,b]$ уравнение (18.2) может не иметь решения, а если это решение существует, то в силу неограниченности оператора A^{-1} на $\mathscr{R}(A)$ оно не будет непрерывно зависеть от правой части. Поэтому задача (18.2) является некорректной. Учитывая, что задача нахождения решения уравнения Фредгольма второго рода (17.1) корректна можно применить так называемый *метод регуляризации* [28], который позволяет свести некорректную задачу (18.2) к корректной (17.1). В случае, когда $y \in \mathscr{R}(A)$ он основан на следующих теоремах.

Теорема 3.18.3. *Пусть H – гильбертово пространство и пусть $A \in \mathscr{K}()$. Тогда для любой $y \in H$ и любого значения параметра регуляризации $\alpha > 0$ существует единственное решение $x_\alpha \in H$, а котором реализуется*

$$\inf_{x \in H}\left\{\|Ax-y\|^2+\alpha\|x\|^2\right\}.$$

При этом x_α является решением уравнения второго рода

$$\alpha x + A^\star A x = A^\star y. \tag{18.4}$$

Теорема 3.18.4. *Пусть x_α – решение уравнения* (18.4) *и при этом $y \in \mathscr{R}(A)$. Тогда при $\alpha \to 0$ величина $\|Ax_\alpha - y\|^2$ монотонно убывает и стремится к нулю.*

Пример 37. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода (18.2), где $\mathcal{K}(t,s), y(t)$ – непрерывные функции.

Пусть, например, $\mathcal{K}(t,s)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(s)t^i$, где $a_i(s)$ – многочлены относительно s. Предположим, что уравнение (18.2) имеет решение. Тогда левая часть уравнения (18.2) для любой функции $x(t)\in C[a,b]$ имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(s)t^i$. Это означает, что и правая часть уравнения (18.2) должна иметь такой же вид.

Уравнения вида (18.2) в случае симметричного ядра будут рассмотрены позднее.

Пример 38. Рассмотрим уравнение Вольтерра первого рода (18.3) Если для разрешимости уравнения второго рода достаточно потребовать, чтобы $\mathcal{K}(t,s), y(t)\in C[a,b]$, то в данном случае этого недостаточно.

Будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ и все его частные производные непрерывные функции.

Для того, чтобы уравнение (18.3) имело непрерывное решение необходимо, чтобы $y(a)=0$. Пусть теперь $y(t)\in C^1[a,b]$. Продифференцируем обе части (18.3) по t, получим уравнение

$$\mathcal{K}(t,t)x(t)+\int\limits_a^t \frac{\partial\mathcal{K}(t,s)}{\partial t}\,x(s)\,\mathrm{d}s=f'(t). \tag{18.5}$$

Пусть теперь $\mathcal{K}(t,t)\neq 0$, тогда, разделив обе части (18.5) на $\mathcal{K}(t,t)$, получим

$$x(t)+\int\limits_a^t \frac{\mathcal{K}'_t(t,s)}{\mathcal{K}(t,t)}x(s)\,\mathrm{d}s=\frac{f'(t)}{\mathcal{K}(t,t)}. \tag{18.6}$$

Уравнение (18.6) является уравнением второго рода. К нему можно применить рассмотренную ранее теорию разрешимости.

Теорема 3.18.5. *Пусть $f(t),\mathcal{K}(t,s)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные по t, $y(a)=0$ и $\mathcal{K}(t,t)\neq 0$ для всех $t\in[a,b]$, то уравнение (18.3) имеет единственное решение.*

Замечание 3.18.1. Уравнение (18.3) при $\mathcal{K}(t,t)\neq 0$ можно свести к уравнению второго рода и с помощью интегрирования по частям.

Положим $F(t) = \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s, F(0) = 0$. Тогда

$$\int\limits_a^t x(s)\mathrm{d}s = -\int\limits_a^t \frac{\partial\mathcal{K}(t,s)}{\partial s} F(s)\,\mathrm{d}s + \mathcal{K}(t,s)F(s)\Big|_{s=a}^{s=t}$$

и уравнение (18.3) примет вид

$$\mathcal{K}(t,t)F(t) - \int\limits_a^t \frac{\partial\mathcal{K}(t,s)}{\partial s} F(s)\,\mathrm{d}s = f(t)$$

или

$$F(t) - \int\limits_a^t \frac{\partial\mathcal{K}'_s(t,s)}{\mathcal{K}(t,t)} F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{f(t)}{\mathcal{K}(t,t)}).$$

Частным случаем уравнения (18.3) является уравнение

$$\int\limits_0^t K(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t), \tag{18.7}$$

которое хорошо известно в приложениях. Пусть, например $x(\tau)$ – изучаемый радиоимпульс, $f(t)$ – сигнал, записанный на некотором расстоянии от точки излучения, $\mathcal{K}(t-\tau)$ – импульсная функция трассы распространения радиоимпульса, зависящая от свойств среды. Тогда для восстановления импульса $x(t)$ решается задача (18.7).

Можно также решать задачу: по известному входу $x(t)$ и выходу $f(t)$ определить $\mathcal{K}(t-\tau)$. Тогда мы будем знать, как влияет преобразование сигнала на входной сигнал. Такая задача относится к классу так называемых обратных задач.

Задачи

1. Найти решение уравнения Абеля

$$\int\limits_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{t-s}}\,\mathrm{d}s = y(t)$$

в предположении, что функция $y(t)$ – дифференцируема.

2. Существует ли в классе непрерывных функций решение уравнения

$$\int\limits_0^t (s-t)x(s)\,\mathrm{d}s = \sin^2 t.$$

3.19. Собственные значения и собственные векторы компактного оператора

Собственные значения и собственные векторы играют важную роль в различных областях математики. В частности, в основе метода Фурье для решения смешанных и граничных задач математической физики лежит задача на собственные векторы и собственные значения дифференциального оператора – задача Штурма–Лиувилля.

Пусть X – нормированное векторное пространство, $A : X \to X$ – линейный оператор.

Определение 3.19.1. Число λ называется *собственным значением оператора* A, если существует ненулевой элемент $x \in X$ такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Элемент $x \neq 0$ называется *собственным вектором*, отвечающим собственному значению λ оператора A.

Поскольку наряду с вектором x вектор cx (c – const, $c \neq 0$) также является собственным, то собственные векторы можно считать нормированными, например, условием $\|x\| = 1$.

Максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, называют *кратностью* этого собственного значения.

Лемма 3.19.1. *Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Проведем доказательство леммы по индукции. При $n = 1$ вектор x_1, отвечающий собственному значению λ_1, линейно независим. Предположим, что утверждение леммы справедливо для

$n = k$, т. е. любые k собственных векторов $x_1, \ldots, x_k$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы. Докажем утверждение для $n = k + 1$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что найдутся собственные векторы $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, отвечающие значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $i = \overline{1, k+1}$ и найдутся скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$, не все обращающиеся в нуль, что

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0. \tag{19.1}$$

Применим к данному равенству оператор $A - \lambda_{k+1} I$, получим

$$(A - \lambda_{k+1} I) \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \lambda_{k+1} x_i =$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = 0.$$

Поскольку векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы, то $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ для всех $i = \overline{1, k}$. Но $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ для $i = \overline{1, k}$, значит $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, k}$. А тогда из равенства (19.1) следует, что $\alpha_{k+1} = 0$. Таким образом, в (19.1) все $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, k+1}$, что противоречит предположению о зависимости векторов $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$. Лемма доказана. $\otimes$

Пример 39. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, определенный матрицей (a_{ij}), $i, j = \overline{1, n}$. Тогда для нахождения собственных значений оператора A необходимо, чтобы уравнение $(A - \lambda E)x = 0$ имело нетривиальное решение. Это равносильно тому, что

$$\det |A - \lambda E| = 0. \tag{19.2}$$

Уравнение (19.2) называется *характеристическим уравнением.*

Таким образом, в конечномерном пространстве, собственные значения линейного оператора являются корнями характеристического уравнения.

Пусть теперь X – банахово пространство, $A : X \to X$ компактный оператор. Изучим свойства собственных векторов и собственных значений оператора $A \in \mathscr{K}(X)$.

Пусть λ – собственное значение оператора A, а X_λ – собственное подпространство, состоящее из собственных векторов, отвечающих значению λ.

Теорема 3.19.1. *Пусть X – банахово пространство, $A : X \to X$, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда его собственное подпространство X_λ, отвечающее собственному значению $\lambda \neq 0$, конечномерно.*

Доказательство. Пусть последовательность $(x_n) \subset X_\lambda$ лежит в единичном шаре $B_x[0,1]$. Тогда последовательность (Ax_n) в силу компактности оператора содержит сходящуюся подпоследовательность (Ax_{n_k}). Откуда следует, что последовательность $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}Ax_{n_k}$ также будет сходиться. А это и означает, что единичный шар $B_1(0)$ в X_λ предкомпактен, т. е. X_λ конечномерно. $\otimes$

Упражнение 23. Доказать, что X_λ является в X подпространством.

Теорема 3.19.2. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вне круга $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ комплексной плоскости (вещественной оси) может содержаться лишь конечное число собственных значений оператора A.*

Доказательство. Допустим противное, найдется $\varepsilon_0 > 0$, для которого вне круга $|\lambda| \leqslant \varepsilon_0$ найдется последовательность собственных значений (λ_n) и $|\lambda_n| > \varepsilon_0$. Рассмотрим подпространства K_n, порожденные векторами $x_1, \dots, x_n$, которые по лемме являются линейно независимыми. Тогда $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n \subset \dots$, причем, $L_n \neq L_{n+1}$ ни при каком $n \in \mathbb{N}$.

Воспользуемся леммой о почти перпендикуляре и построим последовательность векторов $y_1, \dots, y_n, \dots$ что

1) $y_n \in L_n$;
2) $\|y_n\| = 1$;
3) $\rho(y_n, L_{n-1}) = \inf\limits_{l \in L_{n-1}} \|y_n - l\| > \frac{1}{2}$.

Последовательность $\frac{y_n}{\lambda_n}$ в силу неравенства $|\lambda_n| > \varepsilon_0$ ограничена. Тогда из последовательности образов $A(\frac{y_n}{\lambda_n})$, учитывая компактность оператора A, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что это не так.

Пусть $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, тогда

$$A\Big(\frac{y_n}{\lambda_n}\Big) = A\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_n} x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\Big) x_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = z_n + y_n,$$

где

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1) x_k \in L_{n-1}.$$

Поэтому при любых $n > m$

$$\|A(\frac{y_n}{\lambda_n}) - A(\frac{y_m}{\lambda_m})\| = \|(z_n + y_n) - (z_m + y_m)\| = \|y_n - (z_m + y_m - z_n)\| > \frac{1}{2},$$

так как $z_m + y_m - z_n \in A_{n-1}$. Получили противоречие. Следовательно, вне круга $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ находится лишь конечное число собственных векторов оператора A. $\otimes$

Следствие 3.19.1. Множество значений компактного оператора не более чем счетно и может быть занумеровано в порядке невозрастания модулей $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant$ и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 40. Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s \tag{19.3}$$

с непрерывным комплекснозначным ядром $K(t,s)$. Будем решать задачу на собственные значения и собственные вектора вида

$$Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s = \lambda x(t). \tag{19.4}$$

Поскольку ядро $K(t,s)$ непрерывно, то оператор A является компактным. Для (19.4) возможны следующие варианты:

1) (19.4) имеет лишь нулевое решение: $x(t) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Это означает, что интегральный оператор не имеет собственных значений отличных от нуля;
2) существует конечное число собственных значений, отличных от нуля;

3) существует последовательность собственных значений λ_n, причем $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с комплекснозначным параметром μ :

$$x(t) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{19.5}$$

Будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрального оператора таково, что уравнение (19.5) является уравнением с компактным оператором.

Определение 3.19.2. $\mu \in \mathbb{C}$ называется *характеристическим числом* оператора A, если существует ненулевой вектор $x \in L_2[a,b]$, который удовлетворяет уравнению (19.5).

Как видно из определения, характеристическое число интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{19.6}$$

– это величина обратная к его собственному значению. Тогда альтернатива Фредгольма для уравнения (19.5) может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 3.19.3. *Для того, чтобы уравнение* (19.5) *было разрешимо для любого $y \in L_2[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы μ не было характеристическим числом интегрального оператора* (19.3). *Если μ – характеристическое число, то его кратность конечна и $\overline{\mu}$ является характеристическим числом сопряженного оператора A^* к оператору* (19.3) *той же кратности. Для разрешимости уравнения* (19.5) *необходимо и достаточно, чтобы функция $y(t)$ была ортогональна всем собственным функциям оператора A^*, соответствующим собственному значению $\frac{1}{\overline{\mu}}$. При этом у уравнения* (19.5) *существует единственное решение, ортогональное всем собственным функциям оператора A, отвечающим собственному значению $\frac{1}{\mu}$.*

Задачи

1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора

$$Ax(t) = x(-t).$$

2. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Найти систему собственных значений и собственных векторов указанного оператора в следующих случаях:

- $\mathscr{D}(A) = \{x(t) \in C^1[0,1] \,|\, x(0) = 0\}$;
- $\mathscr{D}(A) = \{x(t) \in C^1[0,1]\}$;
- $\mathscr{D}(A) = \{x(t) \in C^1[0,1] \,|\, x(0) = x(1)\}$.

3.20. Собственные значения и собственные векторы компактного самосопряженного оператора

Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – самосопряженный оператор. Как следует из (13.5), квадратичная форма, порожденная таким оператором является вещественнозначной. В этом случае свойства собственных значений оператора A можно описать так.

Теорема 3.20.1. *Все собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве вещественны. Собственные подпространства H_{λ_1} и H_{λ_2}, отвечающие различным собственным значениям, λ_1 и λ_2, ортогональны.*

Доказательство. Действительно, пусть $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, тогда $(Ax,x) = \lambda(x,x)$ и

$$\lambda = \frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \frac{(x,Ax)}{(x,x)} = \frac{(x,\lambda x)}{(x,x)} = \overline{\lambda}.$$

Пусть, далее, $x \in H_{\lambda_1}$, $y \in H_{\lambda_2}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда $\lambda_1(x,y) = (Ax,y) = (x,\lambda_2 y) = \lambda_2(x,y)$ и $(x,y) = 0$, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $\otimes$

Пусть теперь рассматриваемый оператор A является самосопряженным. Тогда о нем можно сказать больше.

Теорема 3.20.2. *Компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Доказательство. Если $A = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $A \neq 0$. Рассмотрим границы оператора A

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax,x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax,x).$$

Из теоремы 3.13.3 следует, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)|. \tag{20.1}$$

Согласно формуле (20.1) $\|A\| = \max\{|m|,M\}$. Докажем, что

$$\lambda_1 = \begin{cases} m, & \text{если } \|A\| = |m|, \\ M, & \text{если } \|A\| = M. \end{cases}$$

является собственным значением оператора.

Действительно, пусть $\|A\| = M$. По определению числа M найдется такая последовательность (x_n), $\|x_n\| \leqslant 1$ и $(Ax_n,x_n) \to M = \lambda_1$.

Так как последовательность (x_n) ограничена, а оператор A компактен, то последовательность (Ax_n) содержит сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что эта последовательность уже выделена, т.е. (Ax_n) сходится. Пусть, например, $Ax_n \to y_0$.

Тогда

$$\|Ax_n - \lambda_1 x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda_1(Ax_n,x_n) + \lambda_1^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1(Ax_n,x_n) = 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1(Ax_n,x_n) \leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cdot \lambda_1 = 0.$$

Откуда $Ax_n - \lambda_1 x_n \to 0$ при $n \to \infty$, а тогда последовательнсть

$$x_n = \frac{1}{\lambda_1}\big(Ax_n - (Ax_n - \lambda_1 x_n)\big)$$

имеет предел. Следовательно, $x_n \to x_0$, $x_0 = \frac{1}{\lambda_1}y_0$, ибо $Ax_n \to y_0 = Ax_0$. Откуда $\lambda_1 x_0 = Ax_0$.

Аналогично рассматривается случай $\|A\| = m$. $\otimes$

Следствие 3.20.1. Если компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H не имеет отличных от нуля собственных значений, то $A = 0$.

Замечание 3.20.1. Найденное в теореме собственное значение оператора A $\lambda_1 = \|A\|$ является наибольшим по абсолютной величине.

В самом деле, пусть λ – некоторое собственное значение, а x – собственный вектор, $\|x\| = 1$. Тогда

$$|\lambda| = |\lambda|(x,x) = |(Ax,x)| \leqslant \|A\| = \lambda_1.$$

Очевидно, что в конечномерном пространстве любой самосопряженный оператор является компактным и для него справедливо данное замечание.

Теорема 3.20.3 . *Все собственные значения компактного самосопряженного оператора $A : H \to H$, H – Гильбертово пространство, расположены на отрезке $[m,M]$, где*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax,x),\ M = \sup_{\|x\|=1} (Ax,x). \tag{20.2}$$

Доказательство. Из определения констант m и M вытекает, что для всех x, лежащих на единичной сфере справедливо

$$m \leqslant (Ax,x) \leqslant M.$$

Поэтому, если λ – собственное значение, а x – собственный вектор с $\|x\| = 1$, то $(Ax,x) = \lambda(x,x) = \lambda$, откуда $m \leqslant \lambda \leqslant M$.

Сейчас требуется доказать, что числа m, M, если они отличны от нуля, являются собственными значениями оператора.

Пусть $M \neq 0$. Рассмотрим оператор $MI - A$, тогда $\big((MI-A)x,x\big) = M(x,x) - (Ax,x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Поэтому оператор $MI - A$ неотрицателен. Покажем, что существует вектор $x_0 \neq 0$, что $(Mx_0 - Ax_0,x_0) = 0$. Это и будет означать, что M – собственное значение оператора A.

Предположим, что такого элемента нет. Тогда $(Mx - Ax,x) = 0$, $x \in H$ лишь при $x = 0$, что в противном случае $x = x_0$. Рассмотрим в пространстве H новое скалярное произведение, порожденное оператором $MI - A$, тогда для любых $x,y \in H$ имеет место неравенство Коши-Буняковского

$$|(Mx - Ax,y)| \leqslant |(Mx - Ax,x)| \cdot |(My - Ay,y)|. \qquad (20.3)$$

Из определения M как точной верхней грани квадратичной формы (Ax,x) на единичной сфере $\|x\| = 1$ (20.2), вытекает, что существует последовательность (x_n), $\|x_n\| = 1$, $n = 1,2,\ldots$, для которой $(Ax_n,x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$ или

$$(Mx_n - Ax_n,x_n) \to 0 \qquad (20.4)$$

Полагая в неравенстве (20.3) $x = x_n$, $y = Mx_n - Ax_n$, получим

$$\|Mx_n - Ax_n\|^4 \leqslant |(Mx_n - Ax_n,x_n)| \cdot (|M| + \|A\|)^2.$$

Из(20.4) следует, что

$$\|Mx_n - Ax_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (20.5)$$

Покажем, что в (20.5) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Последовательность (x_n) ограничена, оператор A компактен, поэтому из последовательности (Ax_n) можно выделить сходящуюся. Пусть это сделано, и (Ax_n) сходится. Поступим так же, как в теореме 3.20.2. В равенстве

$$x_n = \frac{1}{m}\big(Ax_n - (Ax_n - Mx_n)\big)$$

перейдем к пределу, используя (20.5), получим

$$(Mx_0 - Ax_0,x_0) = 0, \text{ и } \|x_0\| = 1.$$

Следовательно, x_0 – собственный вектор, отвечающий собственному значению M.

Аналогично доказывается, что m также является собственным значением. $\otimes$

Пример 41. Вернемся к вычислению нормы оператора

$$Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Для этого представим оператор A как композицию двух операторов VS, где $Vy(t) = y(1-t)$, $Sx(t) = \int\limits_0^{1-t} x(s)\,\mathrm{d}s$. Заметим, что оператор V является унитарным оператором. Действительно, оператор V является оператором замены переменных, поэтому

$$(Vx,y) = \int\limits_0^1 Ax(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 x(1-t)y(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= [1-t=s] = -\int\limits_1^0 x(s)y(1-s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 x(t)y(1-t)\,\mathrm{d}t = (x,V^*y),$$

откуда $V^*y(t) = y(1-t)$.

S – самосопряженный оператор, поскольку

$$(Sx,y) = \int\limits_0^1 \biggl(\int\limits_0^{1-t} x(s)\,\mathrm{d}s\biggr) y(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 x(s) \int\limits_0^{1-s} y(t)\,\mathrm{d}t = (x,S^*y),$$

откуда $S^*y(t) = \int\limits_0^{1-t} y(s)\,\mathrm{d}s$.

Кроме того, S – компактный оператор. Поэтому

$$\|A\| = \|S\|.$$

Вычисление нормы оператора S сводится к задаче вычисления максимального по модулю собственного значения оператора S. Следовательно, ищем $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых интегральное уравнение

$$Sx = \lambda x \text{ или } \int\limits_0^{1-t} x(s)\,\mathrm{d}s = \lambda x(t).$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\lambda x'(t) + x(1-t) = 0$$

с условиями $x(1) = 0$.

Эти решения заведомо являются решениями краевой задачи Штурма – Лиувилля

$$\lambda^2 x''(t) + x(t) = 0,$$

$$x(1) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Решая ее, находим $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-1}$, $k = 1,2,\ldots$ $.\lambda = \frac{\pi}{2}$ – максимальное по модулю. Следовательно, $\|A\| = \|S\| = \frac{2}{\pi}$.

В теореме 3.20.2 мы показали, что компактный самосопряженный оператор в H имеет по крайней мере одно собственное значение и таким значением является норма оператора A.

Чтобы рассмотреть построение других собственных значений и соответствующих собственных векторов, введем новое понятие.

Подпространство $L \subset H$ назовем *инвариантным* подпространством оператора A, если для любого $x \in L$ имеем $Ax \in L$.

Обозначим через H_n подпространство пространства H, состоящее из элементов $x \in H$, ортогональных первым n собственным векторам $\{x_i\}, i = 1,2\ldots$ оператора A, $(x,x_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Для любого $x \in H_n$ вектор $Ax \in H_n$, т. е. $(Ax,x_i) = (x,Ax_i) = \lambda_i(x,x_i) = 0$. Это означает, что оператор A можно рассматривать как оператор $A : H_n \to H_n$. При этом он, естественно, является самосопряженным и компактным. Поэтому, по теореме 3.20.1,

$$|\lambda_{n+1}| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H_n}} |(Ax,x)|$$

и так далее.

Применительно к сепарабельному гильбертову пространству данная идея будет развита в следующем параграфе.

Задачи

1. Пусть H – бесконечномерное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – компактный самосопряженный оператор. Доказать, что если A имеет конечное число собственных значений, то $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A.

2. Доказать, что самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве является неотрицательным тогда и только тогда, когда все его собственные значения λ неотрицательны.

3. Пусть A – самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве и $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ единственные собственные значения этого оператора. Можно ли утверждать, что A является оператором ортогонального проектирования?

3.21. Теорема Гильберта - Шмидта и ее применение

Известно из курса линейной алгебры, что существует базис, состоящий из собственных векторов, в котором симметрическая матрица самосопряженного оператора имеет диагональный вид. Докажем теорему Гильберта о приведении к диагональному виду самосопряженного компактного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве и дадим ее применение к интегральным уравнениям с симметричными ядрами.

Теорема 3.21.1. *Пусть A – компактный самосопряженный оператор из H в H, а x — произвольный элемент из H. Тогда элемент $Ax \in H$ разлагается в сходящийся ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Пусть λ_1 наибольшее по модулю собственное значение оператора, т. е. $|\lambda_1| = |A\|$, φ_1 – отвечающий ему собственный вектор. Рассмотрим подпространство $H_1 = \{x \in H : (x,\varphi_1) = 0\}$, инвариантное относительно оператора A как было отмечено в п. 3.20. Поэтому можно рассматривать A как оператор, действующий в H_1. Заметим, что подпространство H_1 является ортогональным дополнением к подпространству L_1, порожденному собственным вектором φ_1. L_1 состоит из совокупности элементов вида $\{t\varphi_1\}$, где t – некоторый числовой параметр. L_1 также инвариантное подпространство оператора A, поскольку, если $x \in L_1$, $x = t\varphi_1$, то

$$Ax = A(t\varphi_1) = tA_1 = t\lambda_1\varphi_1 \in L_1.$$

Таким образом, $H = H_1 \oplus L_1$.

Рассмотрим H_1 как самостоятельное пространство. Тогда

$$A : H_1 \to H_1$$

и имеет в H_1 по крайней мере одно собственное значение $\lambda_2 \neq 0$, если оператор A ненулевой, и собственный вектор φ_2, причем $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$,

$A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$. Затем рассматриваем подпространство L_2, порожденное векторами φ_1 и φ_2, и ортогональное дополнение к нему

$$H_2 = \big\{x \in H_1 |\, (x,\varphi_2) = 0\big\}.$$

Продолжая данный процесс, на n-ом шаге мы построим подпространство L_n, порожденное векторами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и подпространство

$$H_n = \big\{x \in H_{n-1} |\, (x,\varphi_n) = 0\big\}, \quad H = H_n \oplus L_n.$$

Учитывая, что максимальное по модулю собственное значение оператора совпадает с нормой оператора, мы можем прийти к случаю, когда

$$\inf_{x\in H_n} \big(Ax, x\big) = \sup_{x\in H_n} \big(Ax, x\big) = 0.$$

$\big(Ax, x\big) = 0$ на H_n. Это возможно лишь в случае, когда $Ax = 0$ на H_n. В этом случае мы получаем, что

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ и } \lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

образуют систему собственных векторов и всех ненулевых собственных значений оператора A. Тогда

$$H = L_n \oplus KerA,$$

где L_n – подпространство, порожденное векторами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $KerA$ – ядро оператора A, т. е. совокупность элементов, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$.

Таким образом, любой элемент $x \in H$ можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x,\varphi_i)\varphi_i + x_0, \quad x_0 \in KerA$$

и

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (x,\varphi_i)\lambda_i\varphi_i.$$

Оператор A в этом случае конечномерный, т. е. он отображает гильбертово пространство H в его конечномерное подпространство.

В противном случае процесс построения собственных векторов может продолжаться неограниченно. Тогда

$$\left\|A\Big(x-\sum_{k=1}^{n}(x,\varphi_k)\varphi_k\Big)\right\|^2 \leqslant \|A\|^2_{H_n}\cdot\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\varphi_i\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2_{n+1}\cdot(\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,\varphi_i)|^2)^2 \leqslant \lambda^2_{n+1}\cdot\|x\|^2.$$

Поскольку $\lambda_n \to 0$ при $n\to\infty$, то $A(x-\sum\limits_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\varphi_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т. е.

$$Ax=\lim_{n\to\infty}A\Big(\sum_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\varphi_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}(x,\varphi_i)\lambda_i\varphi_i$$

и теорема доказана. ⊗

Следствие 3.21.1. Если компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H имеет обратный, то система его собственных векторов образует базис пространства H.

Доказательство. Из теоремы Гильберта–Шмидта вытекает, что

$$= 0. \tag{21.1}$$

Поэтому

$$A^{-1}A\Big(x-\sum_{i=1}^{\infty}(x,\varphi_i)\varphi_i\Big)=0$$

или

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,\varphi_i)\varphi_i.$$

Это означает, что любой вектор $x\in H$ раскладывается в сходящийся ряд Фурье. Следовательно, система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ по теореме о полных ортонормированных системах образует базис H. ⊗

Следствие 3.21.2. Для всякого компактного самосопряженного оператора $A : H \to H$, в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует ортонормированный базис пространства H, элементами которого являются собственные векторы оператора A.

Доказательство. Рассмотрим равенство (21.1). Из него вытекает, что для любого вектора $x \in H$ существует такой вектор $x_0 \in H$, что $Ax_0 = 0$, тогда

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x, \varphi_i)\varphi_i.$$

Множество элементов $y \in H$, для которых $Ay = 0$, принадлежит $KerA$. Любой ненулевой вектор подпространства $KerA \subset H$ является собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению. Если H – сепарабельно, то в этом подпространстве можно построить счетный ортонормированный базис $\varphi_1', \varphi_2', \ldots$, состоящий из собственных векторов, отвечающих нулевому собственному значению. Тогда для любого элемента $x \in H$ имеет место разложение

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, \varphi_i)\varphi_i + \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_i')\varphi_i',$$

где одна или обе суммы могут быть и конечными. $\otimes$

Задачи

1. Пусть A – компактный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $A^\star$ – сопряженный к нему. Доказать, что для оператора $AA^\star$ справедлива теорема Гильберта–Шмидта. Получить в явном виде формулу разложения.

2. Пусть φ_n $(n \in \mathbb{N})$ – ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и пусть $A : H \to H$ такой линейный ограниченный оператор, что для любого $x \in H$ справедливо разложение в ряд Фурье

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} (x,\varphi_i)\lambda_i\varphi_i.$$

Доказать, что A – компактный самосопряженный оператор.

3.22. Интегральные уравнения с симметричным ядром

В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t) \tag{22.1}$$

с симметричным ядром $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{22.2}$$

Из п.3.20 известно, что:

1) интегральное оператор

$$Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{22.3}$$

имеет по крайней мере одно характеристическое число, причем все характеристические числа действительны;

2) собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны между собой;

3) каждому характеристическому числу может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных функций.

Будем считать, что известны характеристические числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,$ $\lambda_n,\ldots$ оператора (22.3) и соответствующие им собственные функции $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$. Применим теорему Гильберта–Шмидта к исследованию на разрешимость уравнения (22.1).

Случай 1. Пусть λ не является характеристическим числом оператора (22.3). Применяя теорему Гильберта–Шмидта, разложим интегральный оператор (22.3) в ряд

$$Ax(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x,\varphi_i)}{\lambda_i}\,\varphi_i(t).$$

Подставим это выражение в уравнение (22.1), получим

$$x(t) - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x,\varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i(t) = y(t). \tag{22.4}$$

Умножая равенство (22.4) скалярно на $\varphi_m(t)$, $m = 1,2,\ldots,n,\ldots$, приходим к соотношениям

$$(x,\varphi_m) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{(x,\varphi_i)}{\lambda_i} (\varphi_n,\varphi_i) = (\varphi_m,y), \quad m = 1,2,\ldots. \tag{22.5}$$

а так как λ – не характеристическое число, то можно найти коэффициенты разложения $c_m = (x,\varphi_m)$, $m = 1,2,\ldots$, в (22.5)

$$c_m = \frac{\lambda_m (y,\varphi_m)}{\lambda_m - \lambda} = \frac{\lambda_m y_m}{\lambda_m - \lambda}.$$

Через y_m обозначены коэффициент Фурье функции $y(t)$ при разложении ее по собственным функциям $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ldots$. Подставляя эти коэффициенты в (22.4), получаем искомое решение:

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(t) + y(t). \tag{22.6}$$

Таким образом, *если λ не является характеристическим числом интегрального оператора, то уравнение* (22.1) *с симметричным ядром $\mathcal{K}(t,s)$ в пространстве $L_2[a,b]$ имеет единственное решение при любой правой части $y(t) \in L_2[a,b]$.*

Случай 2. Пусть теперь λ – характеристическое число кратности q, т. е. $\lambda = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_{p+q+1}$, $q \geqslant p$. Тогда из (22.5) можно определить коэффициенты c_m только при $m \neq p,p+1,\ldots,p+q-1$ и, следовательно,

$$c_m = \frac{\lambda_m y_m}{\lambda_m - \lambda}, \text{ если } m \neq p, p+1, \ldots, p+q-1.$$

Если же номер m таков, что $p \leqslant n \leqslant p+q+1$, о равенство (22.5) принимает вид

$$c_m\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right) = (y,\varphi_m), \text{ где } 1 - \frac{\lambda}{\lambda_m} = 0.$$

Это возможно лишь тогда, когда

$$(y,\varphi_m) = 0, \quad m = p, p+1, p+q-1. \tag{22.7}$$

Поэтому для разрешимости уравнения (22.1) необходимо, чтобы свободный член $y(t)$ был ортогонален всем собственным функциям $\varphi_m(t)$, соответствующим данному характеристическому числу λ_m. Если это условие выполнено, уравнение (22.1) имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой

$$x(t) = y(t) + \sum_{\substack{i=1\\ k\neq p,\ldots,p+q-1}}^{\infty} \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda}\,\varphi_i(t) + \sum_{i=p}^{p+q} c_i\varphi_i(t). \tag{22.8}$$

Если же функция $y(t)$ не удовлетворяет условию (22.8), то уравнение (22.1) при $\lambda = \lambda_p = \ldots = \lambda_{p+q-1}$ решений не имеет.

Продемонстрируем общие рассуждения на примере.

Пример 42. В пространстве $L_2[0,\pi/2]$ рассмотрим уравнение

$$x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = 1,$$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t\cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi/2,\\ \sin s\cos t, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi/2.\end{cases}$$

Найдем прежде всего характеристические числа и соответствующие им собственные функции интегрального оператора. Для этого решим уравнение вида

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s,$$

которое можно записать следующим образом

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^{t} \sin s\cos t\; x(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \int\limits_t^{\pi/2} \sin t\cos s\; x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Продифференцируем это равенство дважды по t :

$$x'(t) = -\lambda \sin t \int\limits_0^t \sin s \; x(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \cos t \int\limits_t^{\pi/2} \cos s \; x(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$x''(t) = -\lambda \cos t \int\limits_0^t \sin s \; x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda \sin t \sin t \; x(t) -$$

$$-\lambda \sin t \int\limits_t^{\pi/2} \cos s \; x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda \cos t \cos t \; x(t) = -x(t) - \lambda\, x(t).$$

Таким образом, получили следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} x'' + (\lambda + 1)x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \; x(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Это задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа. Решим ее.

1) Пусть $\lambda + 1 < 0$, т. е. $\lambda < -1$. Тогда общее решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{-(\lambda+1)}t} + c_2 e^{+\sqrt{-(\lambda+1)}t}.$$

Учитывая граничные условия, получаем систему уравнений для определения коэффициентов c_1 и c_2:

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1(e^{+\sqrt{-(\lambda+1)}\pi/2} - e^{-\sqrt{-(\lambda+1)}\pi/2}) = 0.$$

Данная система, очевидно, имеет только нулевое решение $c_1 = c_2 = 0$. Это означает, что все $\lambda < -1$ не являются характеристическими для интегрального оператора.

2) Пусть $\lambda = -1$. Тогда общим решением дифференциального уравнения будет функция

$$x(t) = c_1 t + c_2.$$

Из граничных условий вытекает, что

$$c_1 = c_2 = 0.$$

3) Пусть теперь $\lambda + 1 > 0$, т. е. $\lambda > -1$. Тогда дифференциальное уравнение имеет решение

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda+1}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda+1}\, t.$$

Принимая во внимание граничные условия, получаем

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 \sin\sqrt{\lambda+1}\,\frac{\pi}{2} = 0.$$

Поскольку нас интересуют ненулевые решения, то $c_2 \neq 0$ и

$$\sin\sqrt{\lambda+1}\,\frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{\lambda+1}\,\frac{\pi}{2} = \pi k,\ k = 1,2,\ldots.$$

Это означает, что если

$$\lambda_k = 4k^2 - 1, \quad k = 1,2,\ldots,$$

то

$$\varphi_k(t) = \sin 2kt, \quad k = 1,2,\ldots.$$

являются собственными функциями интегрального оператора.

Используя теперь теорему Гильберта–Шмидта, перейдем к решению интегрального уравнения.

В нашем случае $y \equiv 1$, поэтому

$$y_k = (y,\varphi_k) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} 1\cdot\sin 2kt\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{\pi}\frac{\cos 2kt}{2k}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$\begin{cases} 0, & k = 2m, \\ \dfrac{4}{\pi(2m-1)}, & k = 2m-1,\ m = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

Поэтому, применяя формулу предыдущего пункта, получаем для всех $\lambda \neq \lambda_k$ имеем

$$x(t) = 1 + \lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\sin(4m-2)t}{\pi(2m-1)[(4(2m-1)^2-1)-\lambda]} =$$

$$= 1 + \frac{4\pi}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(4m-2)t}{(2m-1)(16m^2-16m+3-\lambda)}.$$

Если же $\lambda = \lambda_{2m} = 16m^2 - 1$, то $y_{2m} = 0$ и функция $y(t) = 1$ ортогональна соответствующей собственной функции

$$\varphi_{2m}(t) = \sin 4mt.$$

Поэтому решение будет отличаться от полученного выше дополнительным слагаемым

$$C \sin 4mt, \text{ C – произвольная постоянная.}$$

В случае, когда $\lambda = \lambda_{2m-1} = 16m^2 - 16m + 3$, $m = 1,2,\ldots$, уравнение решений не имеет.

Задачи

1. В пространстве $L_2[0,1]$ найти решение уравнения

$$x(t) - \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \text{ если :}$$

а) $y(t) = t$,

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(t-1), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

б) $y(t) = \cos \pi t$,

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ (s+1)t, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Доказать, что уравнение

$$x(t) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(t-2s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t)$$

разрешимо при любом $\lambda \in C$ и любой функции $y(t) \in L_2[0,2\pi]$. Найти его решение.

3.23. Спектр оператора. Резольвента

Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A : X \to X$ – линейный непрерывный оператор. Рассмотрим оператор $A_\lambda = A - \lambda I$ изучим его свойства. Прежде всего нас будет интересовать, когда оператор A_λ не имеет обратного. Среди таких значений λ будут находиться собственные значения оператора A. Изучим также свойства обратного оператора к A_λ. Изучению такого класса задач посвящена спектральная теория операторов.

Определение 3.23.1. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой оператора*, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем пространстве X, т. е. оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим.

Множество регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A и обозначается $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой оператора* A. Очевидно, что в этом случае уравнение

$$(A - \lambda I)x = y \tag{23.1}$$

имеет единственное решение решение

$$x = (A - \lambda I)^{-1} y = R_\lambda(A) y. \tag{23.2}$$

Пусть λ и β – две регулярные точки оператора A. Тогда

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = (A - \beta I)^{-1}(A - \beta I)(A - \lambda I)^{-1} =$$

$$= R_\beta(A)(A - \beta I)R_\lambda(A),$$

$$R_\beta(A) = (A - \beta I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)(A - \beta I)^{-1} =$$

$$= R_\lambda(A)(A - \lambda I)R_\beta(A),$$

откуда

$$R_\lambda(A) - R_\beta(A) = (\lambda - \beta) R_\beta(A) R_\lambda(A). \tag{23.3}$$

Формула (23.3) называется *формулой Гильберта.*

Определение 3.23.2. Комплексное число λ, не являющееся регулярным, называется *спектральным.* Множества спектральных точек $\sigma(A)$ оператора A называется *спектром* оператора A.

Таким образом, $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$.

Из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что непрерывная обратимость оператора $A_\lambda = A - \lambda I$ эквивалентна следующим двум равенствам

$$\mathscr{R}(A_\lambda) = X, \quad Ker(A_\lambda) = 0. \tag{23.4}$$

Если нарушено хотя бы одно из условий (23.4), то λ принадлежит спектру оператора A. В зависимости о того, какое из двух условий нарушено, выделяют следующие типы точек спектра:

1) $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением оператора* A, если $Ker(A_\lambda) \neq \{0\}$, т. е. существует ненулевой вектор $x \in X$, который является решением уравнения $Ax = \lambda x$. Множество собственных значений оператора A называется *точечным или дискретным спектром.* Например, если A – компактный самосопряженный оператор, то его точечный спектр является непустым множеством и состоит только из вещественных чисел.

2) Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется точкой *непрерывного спектра* оператора A, если $Ker(A - \lambda I) = \{0\}, \mathscr{R}(A - \lambda I) \subset X$ и $\overline{R(A - \lambda I)} = X$.

3) $\lambda \in \mathbb{C}$ называется точкой *остаточного спектра* оператора A, если $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$, $\overline{\mathscr{R}(A - \lambda I)} \neq X$.

Таким образом, вся комплексная плоскость разбивается на четыре попарно непересекающихся множества: резольвентное множество, точечный, непрерывный и остаточный спектры.

Пример 43. Пусть $X = \mathbb{C}^n$, $A : X \to X$ – линейный оператор, заданный матрицей A. Рассмотрим оператор $A - \lambda I$. Он обратим тогда и только тогда, когда матрица $A - \lambda E$ невырождена, т. е. $\det |A - \lambda E| \neq 0$. Корни соответствующего уравнения (оно называется характеристическим) и образуют спектр оператора. Очевидно, то спектр состоит из собственных значений матрицы A. Непрерывный и остаточный спектры у оператора в конечномерном пространстве отсутствуют.

Пример 44. Пусть $A = I : C[0{,}1] \to C[0{,}1]$. Тогда спектр оператора A состоит из одного собственного значения $\lambda = 1$. При $\lambda \neq 1$ оператор $(1 - \lambda)I$ непрерывно обратим и

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda} I.$$

Пример 45. Пусть $X = L_2[0,1]$ и $Ax(t) = tx(t)$ – оператор умножения на независимую переменную. Рассмотрим ядро

$$KerA_\lambda = \left\{x \in L_2[0,1] | \, (A - \lambda I)x = 0\right\}.$$

Тогда $(t-\lambda)x(t) = 0$ почти всюду и поэтому $x(t) = 0$ почти всюду. Это означает, что у оператора A точечный спектр отсутствует.

Пусть $\lambda = \lambda_0 \in [0,1]$. Покажем, что λ_0 является точкой спектра. Для этого на отрезке $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0]$ из $[0,1]$ определим функцию

$$x_\varepsilon(t) \begin{cases} \sqrt{\varepsilon^{-1}}, & t \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0] \\ 0, & t \notin [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0]. \end{cases}$$

с $\|x_\varepsilon\| = 1$. Далее

$$A_{\lambda_0} x_\varepsilon(t) = (t - \lambda_0)x_\varepsilon(t),$$

$$\|A_{\lambda_0} x_\varepsilon\|^2 = \int\limits_0^1 = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon} (t-\lambda)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon^2}{3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Следовательно, функция вида x_ε принадлежит области определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ и образует в $L_2[0,1]$ всюду плотное множество. Но оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не является ограниченным на совокупности таких функций. Это означает, что $\lambda_0 \in [0,1]$относится к непрерывному спектру.

Пример 46. Пусть $X = l_2$ и оператор A задается формулой

$$A(x_1,x_2,\ldots) = (0,x_1,x_2,\ldots).$$

Число $\lambda = 0$ относится к точкам сплошного спектра, так как ядро $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$ и множество значений $\mathscr{R}(A - \lambda I)$ не является всюду плотным в l_2.

Выясним некоторые свойства множеств $\rho(A)$ и $\sigma(A)$.

Теорема 3.23.1. *Резольвентное множество $\rho(A)$ линейного ограниченного оператора A открыто в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, т. е. является регулярным значением оператора A. Покажем, что как только оператор $A - \lambda_0 I$ непрерывно обратим, то непрерывно обратимым будет и оператор $A - \lambda I$, если $|\lambda - \lambda_0| < r$, где r – некоторое положительное число. Рассмотрим представление оператора $A - \lambda I$

$$A-\lambda I = A-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I = (A-\lambda_0 I)\big(I-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\big). \quad (23.5)$$

Оператор $A-\lambda I$ будет непрерывно обратимым, если непрерывно обратимым будет оператор $I-C$, где $C = (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)$. Для обратимости этого оператора можно применить теорему 3.7.1, согласно которой норма оператора C должна быть меньше единицы или

$$\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)\| < 1 \quad (23.6)$$

Выберем в качестве $r = \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$. Тогда (23.6) будет иметь место. Следовательно, если $\lambda_0 \in \rho(A)$, то и все $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию $\|\lambda - \lambda_0\| < r$ будут принадлежать $\rho(A)$, т. е. $\rho(A)$ – открытое множество. $\otimes$

Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Рассмотрим оператор $R_{\lambda_0}(A) = (A - \lambda I)^{-1}$. Согласно формуле (23.6) и теореме 3.7.1 его можно записать в виде ряда Неймана

$$R_\lambda(A) = \big(I - (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)\big)^{-1}R_{\lambda_0}(A) = \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^i R_{\lambda_0}^{i+1}(A). \quad (23.7)$$

Ряд (23.6) сходится в круге $\|\lambda - \lambda_0\| < \|R_{\lambda_0}^{-1}(A)\|$. Это означает, что $R_{\lambda_0}(A)$ аналитическая функция по переменной $\lambda \in \rho(A)$.

Теорема 3.23.2. *Спектр $\sigma(A)$ линейного ограниченного оператора A есть непустое компактное множество в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Из теоремы 3.23.1 вытекает, что $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ является замкнутым множеством как дополнение к открытому. Докажем, что оно ограничено. Рассмотрим множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \leqslant \|A\|\}$. Тогда

$$A - \lambda I = -\lambda\Big(I - \frac{1}{\lambda}A\Big)$$

и поэтому

$$(A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{1}{\lambda}A\Big)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{A}{\lambda}\Big)^i = -\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{\lambda^{i+1}}.$$

Откуда

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{|\lambda|^{i+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \tag{23.8}$$

при $|\lambda| > \|A\|$. Следовательно, $\sigma(A) \subset$ Так как резольвентное множество $\rho(A)$ открыто, то $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|A\|\}$. Ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{C}$ является компактным.

Покажем теперь, что $\sigma(A) \neq \varnothing$. Предположим противное,что все $\lambda \in \rho(A)$. Для любого $x \in X$ и $f \in X^\star$ рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = f\bigl(R_\lambda(A)\bigr).$$

Справедлива оценка

$$\left| f\bigl(R_\lambda(A)\bigr) + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-i-1} f(A^i x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| R_\lambda(A) + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-i-1} \|A^i\| \|f\| \|x\| \right\|.$$

Следовательно, функция $g(\lambda)$ аналитична во всей комплексной плоскости, ограничена и $g(\infty) = 0$. Тогда по теореме Лиувилля [32] $g(\lambda) = 0$. Поскольку мы выбирали произвольный функционал $f \in X^\star$, то $R_\lambda(A)(x) = 0$, а теперь в силу произвольности элемента $x \in X$ имеем $R_\lambda(A) = 0$. Но тогда $(A - \lambda I)^{-1} = 0$, что невозможно. Противоречие доказывает теорему. $\otimes$

Упражнение 24. Покажите, что при $\lambda \to \infty$ справедливо разложение

$$R_\lambda(A) = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{\lambda^{i+1}},$$

т. е. бесконечно удаленная точка является регулярной точкой оператора A.

Определение 3.23.3. Величина

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \tag{23.9}$$

называется *спектральным радиусом оператора A.*

Теорема 3.23.3. *Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A : X \to X$, $A \in \mathscr{B}(X)$. Тогда существует конечный предел* (23.8) *имеет место неравенство*

$$r_\sigma(A) = \|A\|. \tag{23.10}$$

Доказательство. Докажем сначала существование предела. Пусть $n = km + l$, $0 \leqslant l \leqslant m$, $n,k,l,m \in \mathbb{N}$, тогда

$$\|A^n\| = \|A^{km+l}\| \leqslant \big(\|A^k\|\big)^m \|A^l\|.$$

Далее

$$0 \leqslant \|A^n\|^{1/n} \leqslant \|A^k\|\big)^{m/n} \|A^l\|^{1/n} = \|A^k\|^{1/k} \|A^l\|^{1/n} \|A^k\|^{-l/(kn)}.$$

Зафиксируем k и l, а m устремим к бесконечности, получим

$$0 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \|A^k\|^{1/k} \leqslant \|A\| \leqslant \infty, \tag{23.11}$$

где символом $\overline{\lim}$ обозначен верхний предел. В (23.11) устремим k к бесконечности, получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \leqslant \|A\|,$$

где $\underline{\lim}$ – нижний предел.

Таким образом, предел (23.9) существует и конечен. $\otimes$

Для спектрального радиуса справедлива формула, которую мы приводим без доказательства

$$r_\sigma(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|. \tag{23.12}$$

Обратимся к ряду Неймана

$$I + A + A^2 + \ldots \tag{23.13}$$

для $A \in \mathscr{B}(X)$. Учитывая теорему 3.7.1 и теорему 3.23.3, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 3.23.4. *Если $r_\sigma(A) < 1$, то ряд* (23.13) *сходится; если $r_\sigma(A) > 1$, то ряд* (23.13) *расходится.*

Упражнение 25. Докажите теорему 3.23.4.

Пример 47. Рассмотрим в пространстве $C[a,b]$ интегральный оператор Вольтерра

$$Ax(t) = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{23.14}$$

где $\mathcal{K}(t,s)$ – непрерывная функция двух переменных в области $\Delta = \{t,s|\, a \leqslant s \leqslant t,\ a \leqslant t \leqslant b\}$. Вычислим его спектральный радиус $r_\sigma(A)$.

Пусть $M = \max\limits_{(t,s)\in\Delta} |\mathcal{K}(t,s)|$. Рассмотрим последовательность $(x_n) \subset C[a,b]$ вида

$$x_n(t) = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s, \quad n = 1,2\ldots,\ x_0(t) = x(t.)$$

Учитывая оценки (8.14), приведенные в п. 3.8 для оператора Вольтерра, получим

$$\|x_n\| \leqslant \frac{M^n(b-a)^n}{n!}\|x_0\|.$$

Но $x_n(t) = A^n x(t)$, поэтому

$$\|A^n\| \leqslant \frac{M^n(b-a)^n}{n!}.$$

Значит,

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0.$$

Таким образом, все точки комплексной плоскости за исключением точки $\lambda = 0$ являются регулярными точками оператора Вольтерра (23.14). Точка $\lambda = 0$ является точкой остаточного спектра.

Задачи

1. Пусть $A \in \mathscr{B}(X)$. Может ли оператор $R_\lambda(A)$ быть вполне непрерывным?

3. Пусть $A \in \mathscr{B}(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$. Доказать, что $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

4. Пусть $A \in \mathscr{B}(X)$ и A непрерывно обратим. Доказать, что если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ и наоборот.

5. Докажите, что спектр сопряженного оператора $A^* : X^* \to X^*$ совпадает со спектром оператора $A : X \longrightarrow X$. Кроме того, $R_\lambda(A^*) = R_\lambda^*(A)$ для чисел $\lambda \in \rho(A) = \rho(A^*)$.

Литература

1. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск: Вышэйш.шк., 1978. – 206 с.
2. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения.- Минск: Изд-во "Университетское", 1984. – 351 с.
3. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: В 2-х т. – Х.: Выща. шкл. Изд-во Харьк. ун-те, 1977-1978. – Т.1. – 316 с.; Т.2. – 1978. – 288 с.
4. Березинский Ю.М., Ус Г.Ф, Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. – К. : Выща.шк., 1990 – 600 с.
5. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М. : Мир, 1974.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
7. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. – М. : Наука, 1967. – 416 с.
8. Гелбаум Б., Олтстед Дж. Контпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251 с.
9. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. – М.: Наука, 1969. – 475 с.
10. Дэй М. Нормированные линейные пространства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 232 с.
11. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
12. Канторович Л.В., Акимов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука. 1984. – 752 с.
13. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988. – 400 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
15. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969.
16. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. – 304 с.
17. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. – Новосибирск : Наука, 1983. – 222 с.

18. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш.шк., 1982. – 272 с.

19. Мазья В.Г. Пространства С.Л.Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.

20. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным урпавнениям. – М.: Физматизд, 1959.

21. Наймарк М.А., Мартынов В.В. Функциональный анализ. – Долгопрудный: МФТИ, 1970.

22. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций. – М.: Просвещение, 1981. – 271 с.

23. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 136 с.

24. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.

25. Рудин У. Функциональный анализ. – М. : Мир, 1975. – 448 с.

26. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

27. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112 с.

28. Тихонов Ф.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М. Ж Наука, 1974.

29. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

30. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

31. Функциональный анализ / Под. общ.ред. С.Г.Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

32. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М. : Мир. 1983. – 432 с.

33. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера, производная. - М.: Наука, 1967. - 220 с.

34. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.