ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2003
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.926.4

Л. А. АЛЬСЕВИЧ, О. А. КАСТРИЦА

ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЗА ПЕРИОД ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БЛОЧНЫМ СТРОЕНИЕМ ОТРАЖАЮЩЕЙ МАТРИЦЫ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 18.02.2002)

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $P(t)$ — непрерывная матрица.

Известно [1, с. 30], что отражающая функция линейной системы (1) является линейной, т.е. имеет вид $F(t)x$, где $F(t)$ — отражающая матрица системы (1). Известно также [2], что всякая отражающая матрица системы (1) представима в виде $F(t) = \exp Q(t)$, где $Q(t)$ — дифференцируемая нечетная $n \times n$-матрица.

Теорема 1. *Пусть для непрерывной матрицы $P(t)$ существует дифференцируемая нечетная $n \times n$-матрица $S(t)$, для которой*

$$S(t)\dot{S}(t) = \dot{S}(t)S(t), \tag{2}$$

а матрица $e^{-S(t)}(P(t)) - \dot{S}(t))e^{S(t)}$ нечетна. Тогда отражающая матрица системы (1) имеет вид

$$F(t) = e^{-2S(t)}. \tag{3}$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если для матрицы $F(t)$ выполнено основное соотношение [1, с. 30]

$$F'(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0, \quad F(0) = E_n, \tag{4}$$

где E_n — единичная $n \times n$-матрица.

Так как матрицы $S(t)$ и $B(t) = e^{-S(t)}(P(t) - \dot{S}(t))e^{S(t)}$ нечетные, а матрица $\dot{S}(t)$ четная, то справедливо равенство

$$e^{-S(t)}(P(t) - \dot{S}(t))e^{S(t)} + e^{S(t)}(P(-t) - \dot{S}(t))e^{-S(t)} = 0,$$

которое на основании (2) равносильно равенству

$$(e^{-2S(t)})' + e^{-2S(t)}P(t) + P(-t)e^{-2S(t)} = 0.$$

Последнее равенство означает, что матрица (3) удовлетворяет основному соотношению (4). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть матрица $P(t)$ 2ω-периодическая и выполнены условия теоремы 1. Тогда отображение за период системы (1) задается формулой $T(x) = e^{2S(\omega)}x$, а мультипликаторы системы (1) находятся из уравнения $\det(e^{2S(\omega)} - \rho E) = 0$.*

Доказательство. Отображение за период 2ω-периодической системы определяется формулой $T(x) = \Phi(-\omega, x)$ [1, с. 12], где $\Phi(t,x)$ — отражающая функция системы

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Используя (3), получаем первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы следует из подобия матрицы монодромии $B(2\omega)$ системы (1) и матрицы $F(-\omega)$ [3].

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \psi(t) & \varphi(t) \end{pmatrix}$ — 2×2-матрицы, a, b, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывные нечетные 2ω – периодические функции, $\lambda(t)$ — непрерывно дифференцируемая 2ω-периодическая нечетная функция. Тогда система

$$\dot{x} = (A(\gamma + \lambda'(t)) + B(t))x$$

имеет отображение за период $T(x) = e^{2\omega\gamma A}x$.

Пример 2. Пусть A — постоянная матрица, $Q(t)$ — непрерывная нечетная 2π-периодическая $n \times n$-матрица, причем $AQ(t) = Q(t)A$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда система

$$\dot{x} = (A(\beta + \alpha \cos t) + Q(t))x$$

имеет отображение за период $T(x) = e^{2\pi\beta A}x$.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = Q(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^{nm}, \tag{5}$$

где матрица $Q(t) = U(t) + V(t)$, $U(t) = \mathrm{diag}(P(t), \dots, P(t))$ (m блоков), $V(t) = [A_{kj}(t)]_1^m$, $A_{kj}(t) = \alpha_{kj}(t)E_n$, $k, j = \overline{1,m}$.

Теорема 3. *Пусть для непрерывной $n \times n$-матрицы $P(t)$ выполняются условия теоремы 1, $\alpha_{kj}(t)$, $k, j = \overline{1,n}$, — непрерывные нечетные функции. Тогда отражающая m-блочная матрица системы (5) имеет вид*

$$F(t) = \mathrm{diag}\,(e^{-2S(t)}, \dots, e^{-2S(t)}). \tag{6}$$

Если, кроме того, матрица $Q(t)$ — 2ω-периодическая, то отображение за период системы (5)задается формулой $T(x) = \mathrm{diag}\,(e^{2S(\omega)}, \dots, e^{2S(\omega)})x$, а мультипликаторы системы (5) находятся из уравнения $\det(e^{2S(\omega)} - \rho E) = 0$.

Доказательство теоремы следует из свойств блочных матриц и аналогично доказательству теорем 1, 2.

Отметим, что приведенный результат является развитием результата [4].

Пусть $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу отыскания решений системы (1), удовлетворяющих условию

$$\Psi(x(\alpha), x(-\alpha)) = 0. \tag{7}$$

Если $F(t)$ — отражающая матрица системы (1), то, согласно [5, 6], условие (7) равносильно условию

$$\Psi(x(\alpha), F(\alpha)x(\alpha)) = 0. \tag{8}$$

Нахождение решений двухточечной краевой задачи (1), (7) свелось к решению системы (8). Если условие (7) является линейным, т. е. имеет вид

$$Cx(\alpha) + Bx(-\alpha) = 0, \tag{9}$$

где C, B — заданные $n \times n$-постоянные матрицы, то решение задачи (1), (9) сводится к решению линейной алгебраической системы $(C + BF(\alpha))x(\alpha) = 0$.

При этом решение $\varphi(t;\alpha,x_0)$ будет решением краевой задачи (1), (7) тогда и только тогда, когда $\Psi(x_0,F(\alpha)x_0)=0$, а решением краевой задачи (1), (9) – когда $(C+BF(\alpha))x_0=0$, (здесь $\varphi(t;t_0,x_0)$ — общее решение системы (1) в форме Коши).

Из приведенных рассуждений следуют

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение $\varphi(t;\alpha,x_0)$ будет решением двухточечной краевой задачи (1), (7) в том и только в том случае, когда x_0 является решением системы $\Psi(x_0,e^{-2S(\alpha)}x_0)=0$.*

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение $\varphi(t;\alpha,x_0)$ будет решением двухточечной краевой задачи (1), (9) в том и только в том случае, когда x_0 будет решением линейной однородной алгебраической системы $(C+Be^{-2S(\alpha)})x=0$.*

Пример 3. Решение $\varphi(t;\pi,x_0)$ системы примера 2 удовлетворяет краевым условиям $Cx(\pi)+Bx(-\pi)=0$ с постоянными $n\times n$-матрицами C и B тогда и только тогда, когда x_0 является решением линейной однородной алгебраической системы $(C+Be^{-2\pi\beta A})x=0$.

Решение $\varphi(t;\pi/2,x_0)$ системы примера 2 удовлетворяет краевым условиям $Cx(\pi/2)+Bx(-\pi/2)=0$ тогда и только тогда, когда x_0 удовлетворяет системе $(C+Be^{-A(2\alpha+\beta\pi)})x=0$.

Литература

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.
2. Альсевич Л. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1982. № 3. С. 50 – 51.
3. Альсевич Л. А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 882 – 884.
4. Кастрица О. А., Мироненко В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 1. С. 67 – 70.
5. Мироненко В. И. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 774 – 779.
6. Альсевич Л. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2. С. 82 – 86.

L. A. ALSEVICH, O. A. KASTRITSA

EXPLICIT CALCULATION OF SHIFT-PERIOD-MAPPING FOR LINEAR SYSTEMS WITH BLOCK-REFLECTIVE-MATRIX

Summary

The set of linear systems with block-reflective-function is constructed. For such systems a shift-period-mapping is given. The results apply to two-point boundary problem.