Казачёнок В.В.
с. 128-134

ISSN 0132—15302

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСК

65

Вильнюс, 1984

LTSR MA MATEMATIKOS IR KIBERNETIKOS INSTITUTAS
LTSR MA FIZIKINIŲ TECHNINIŲ ENERGETIKOS PROBLEMŲ INSTITUTAS
TARPTAUTINĖS AUTOMATINIO VALDYMO FEDERACIJOS TSRS AVNK
LIETUVOS TERITORINĖ GRUPĖ

STATISTINĖS VALDYMO PROBLEMOS

65 leidinys

ATSITIKTINIŲ PROCESŲ SAVYBIŲ PASIKEITIMO SURADIMAS

Medžiaga seminarui

Redagavo L. Telksnys

Lietuvos TSR MA Matematikos ir kibernetikos institutas,
Vilnius, 1984

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND CYBERNETICS OF THE ACADEMY
OF SCIENCES OF THE LITHUANIAN SSR

INSTITUTE OF PHYSICAL AND TECHNICAL PROBLEMS OF POWER OF THE
ACADEMY OF SCIENCES OF THE LITHUANIAN SSR

LITHUANIAN TERRITORIAL GROUP OF THE USSR NCAC
OF THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL

STATISTICAL PROBLEMS OF CONTROL

Issue 65

DETECTION OF CHANGES IN THE PROPERTIES OF RANDOM PROCESSES

Papers for the seminar

Edited by L. Telksnys

Institute of Mathematics and Cybernetics of the Academy of
Sciences of the Lithuanian SSR, Vilnius, 1984

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ АН ЛИТОВСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ЭНЕРГЕТИКИ АН ЛИТССР
ЛИТОВСКАЯ ТЕРРИТОРИАЛЬНАЯ ГРУППА НКАУ СССР
МЕЖДУНАРОДНОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО АВТОМАТИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Выпуск 65

ОБНАРУЖЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ СВОЙСТВ СЛУЧАЙНЫХ
ПРОЦЕССОВ

(Материалы к семинару при Институте математики и
кибернетики АН Литовской ССР "Статистические
проблемы управления")

Под редакцией Л. Телькснис

Институт математики и кибернетики Академии наук Литовской ССР
Вильнюс 1984

При Институте математики и кибернетики АН Литовской ССР постоянно действует республиканский научный семинар, состоящий из следующих восьми секций:

1. Дифференциальные уравнения и их применение
2. Математические методы в социальных науках
3. Автоматизация процессов планирования и управления
4. Применение теории вероятностей и математической статистики
5. Статистические проблемы управления
6. Теория оптимальных решений
7. Программирование ЭВМ
8. Математическая логика и ее применения.

Материалы каждой секции издаются в виде отдельной серии выпусков, нумерируемых продолжающейся порядковой нумерацией в пределе этой секции. Издаются не периодически, а по мере отбора материалов по данной целевой тематике.

Для приобретения изданий обращаться по адресу:
232600, г. Вильнюс,
ул. К. Пожелос, 54,
Институт математики и кибернетики АН ЛитССР
Отдел информации и патентов

С $\frac{30501-4}{M861-84}$ 159-Ž-84

Представляются работы, в которых рассматриваются проблемы обнаружения изменений свойств случайных процессов. Они обсуждались специалистами СССР на Первом семинаре по обнаружению изменений свойств случайных процессов. Семинар организован Отделом процессов распознавания Института математики и кибернетики Академии наук Литовской ССР и проходил в г. Паланга 24-26 апреля 1984 г.

Pateikti darbai, kuriuose nagrinėjamos atsitiktinių procesų savybių pasikeitimų nustatymo problemos. Jas aptarė TSRS specialistai Pirmame atsitiktinių procesų savybių pasikeitimo seminare. Seminarą paruošė Lietuvos TSR Mokslų Akademijos Matematikos ir kibernetikos instituto Atpažinimo procesų skyrius. Jis vyko Palangoje 1984 m. balandžio 24-26 dienomis.

The issue deals with the works analysing the problems of detection of changes in the properties of random processes. They were discussed by the USSR specialists at the First seminar on the detection of changes in the properties of random processes. The seminar was organised by the Recognition Processes department of the Institute of Mathematics and Cybernetics of the Academy of Sciences of the Lithuanian SSR and took place in Palanga, April 24-26, 1984.

СОДЕРЖАНИЕ

TURINYS

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
1984 ВЫПУСК 65

УДК 519.23

ОЦЕНИВАНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ

Геннадий МЕДВЕДЕВ, Виктор КАЗАЧЕНОК

Исследуется алгоритм оценивания момента изменения свойств случайного процесса, оптимальный в среднеквадратическом смысле.

Ключевые слова: случайный процесс, разладка, регрессия.

Рассмотрим следующую задачу. На интервале $[0,T]$ наблюдается случайный процесс

$$x(t) = c^* \varphi(t) + \xi(t), \qquad (1)$$

где c - вектор неизвестных коэффициентов, $\varphi(t)$ - вектор-функция, компоненты которой являются известными линейно независимыми функциями, $\xi(t)$ - случайный процесс с заданными свойствами. В неизвестный момент времени τ, $0<\tau<T$, происходит изменение свойств случайного процесса $x(t)$, заключающееся в следующем: до момента времени τ вектор $c=c'$, после момента τ вектор $c=c''$, $c'\neq c''$. Необходимо по реализации $x(t)$, $t\in[0,T]$, оценить τ, c' и c''.

Предположим, что на интервале наблюдения сделано N отсчетов случайного процесса $x(t)$ в моменты времени t_k, $1\leqslant k\leqslant N$. Для простоты положим, что $t_k<t_{k+1}$ и $t_{k+1}-t_k=\Delta$, $t_1=0$, $t_N=T$. Обозначим через x вектор-столбец с компонентами $x_k=x(t_k)$. Через Φ обозначим $(N\times m)$-матрицу с

компонентами $\Phi_{ik}=\varphi_k(t_i)$, $1\leqslant i\leqslant N$, $1\leqslant k\leqslant m$. Здесь m - размерность векторов c и $\varphi(t)$. Пусть R - $(N\times N)$-матрица с компонентами $R_{ik}=M\{\xi(t_i)\xi(t_k)\}$. R - корреляционная матрица процесса $\xi(t)$. Будем предполагать, что $\xi(t)$ - процесс с нулевым средним. Если бы вектор c на интервале $[0,T]$ не изменялся, то его компоненты можно было бы оценить по обычному методу наименьших квадратов, то есть принять в качестве оценки вектора c такой вектор, который минимизировал бы квадратическую форму (относительно компонент c)

$$Q=(x-\Phi c)^* R^{-1}(x-\Phi c). \qquad (2)$$

Такой вектор находится из нормального уравнения [1]

$$(\Phi^* R^{-1}\Phi)c=\Phi^* R^{-1}x$$

в виде

$$\hat{c}(N)=(\Phi^* R^{-1}\Phi)^{-1}\Phi^* R^{-1}x.$$

Предположим теперь, что вектор c меняет значения своих компонент в известный момент времени τ. Тогда вместо (1) мы будем иметь

$$x(t)=(c')^*\varphi(t)+\xi(t), \quad 0\leqslant t<\tau, \qquad (3а)$$

$$x(t)=(c'')^*\varphi(t)+\xi(t), \quad \tau<t\leqslant T. \qquad (3в)$$

Таким образом среди N отсчетов первые n будут соответствовать соотношению (3а), а последние $(N-n)$ - соотношению (3в). Число n будет определяться положением τ в интервале $[0,T]$ и равно увеличенной на единицу целой части отношения $\tau/\Delta=\tau(N-1)/T$. В этом случае квадратическая форма относительно неизвестных компонент векторов c' и c'', подобная (2), приобретает вид

$$Q(n)=\begin{pmatrix} x_1-\Phi_1 c' \\ x_2-\Phi_2 c'' \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} R^{-1}_{11} & R^{-1}_{12} \\ R^{-1}_{21} & R^{-1}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-\Phi_1 c' \\ x_2-\Phi_2 c'' \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Здесь x_1 - вектор, составленный из первых n компонент вектора x, Φ_1 - матрица, составленная из первых n строк матрицы Φ, R^{-1}_{11} - матрица, составленная из элементов, стоящих на пересечении первых n столбцов и первых n строк матрицы R^{-1}, R_{22} - матрица, составленная из элементов, стоящих на пересечении последних $(N-n)$ столбцов и последних $(N-n)$ строк, а остальные обозначения понимаются из сравнения (4) и (2).

Нормальное уравнение, соответствующее (4), имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^* R_{11}^{-1}\Phi_1 & \Phi_1^* R_{12}^{-1}\Phi_2 \\ \Phi_2^* R_{21}^{-1}\Phi_1 & \Phi_2^* R_{22}^{-1}\Phi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c' \\ c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^* R_{11}^{-1} & \Phi_1^* R_{12}^{-1} \\ \Phi_2^* R_{21}^{-1} & \Phi_2^* R_{22}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Из уравнения (5) находятся оценки векторов c' и c''. Блоки $\Phi_i^* R_{ik}^{-1}\Phi_k$ являются квадратными $(m\times m)$ матрицами. Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^* R_{11}^{-1}\Phi_1 & \Phi_1^* R_{12}^{-1}\Phi_2 \\ \Phi_2^* R_{21}^{-1}\Phi_1 & \Phi_2^* R_{22}^{-1}\Phi_2 \end{pmatrix} = A^{-1}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^* R_{11}^{-1} & \Phi_1^* R_{12}^{-1} \\ \Phi_2^* R_{21}^{-1} & \Phi_2^* R_{22}^{-1} \end{pmatrix} = B.$$

A_{ik} - квадратные $(m\times m)$ блоки матрицы A. Пусть далее R_1^{-1} - $(n\times N)$ - матрица, составленная из первых n строк матрицы R^{-1}, R_2^{-1} - матрица, составленная из последних $(N-n)$ строк матрицы R^{-1}. Тогда оптимальные в среднеквадратическом оценки векторов c' и c'' имеют вид:

$$\hat{c}' = (A_{11}\Phi_1^* R_1^{-1} + A_{12}\Phi_2^* R_2^{-1})\,x,$$
$$\hat{c}'' = (A_{21}\Phi_1^* R_1^{-1} + A_{22}\Phi_2^* R_2^{-1})\,x. \quad (6)$$

Подставим оценки (6) в квадратическую форму (4). Полученное значение квадратической формы обозначим через $\hat{Q}(n)$.

Предположим теперь, что момент τ нам неизвестен. В этом случае найдем значение n, которое минимизирует величину $\hat{Q}(n)$. Обозначим его через $\hat{n}$. Тогда естественно предположить, что неизвестное значение τ лежит в интервале $[(\hat{n}-1)\Delta, \hat{n}\Delta]$, т.е.

$$\frac{\hat{n}-1}{N-1}T < \tau < \frac{\hat{n}}{N-1}T.$$

Изменяя значения N можно построить процедуру, которая более или менее быстро и точно определит момент разладки.

Обоснованием такого метода оценивания момента разладки могут быть следующие рассуждения. Математическое ожидание квадратической формы (2)

$$MQ = M\{(x-\Phi c)^* R^{-1}(x-\Phi c)\} = tr(R^{-1}M\{(x-\Phi c)(x-\Phi c)^*\}) = N.$$

Если число n определено точно, т.е. $\hat{n}=n$, а истинные значения компонент векторов c' и c'' известны, то в (4) вектор

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1-\Phi c' \\ x_2-\Phi c'' \end{pmatrix}$$

составлен из отсчетов случайного процесса $\xi(t)$.

В этом случае

$$M\hat{Q}(n) = MQ = N.$$

Если же n определено неточно, например $\hat{n} < n$, а истинные значения компонент векторов c' и c'' по прежнему известны, тогда в (4) вектор

$$\begin{pmatrix} x_1-\Phi c' \\ x_2-\Phi c'' \end{pmatrix} = \xi + \delta,$$

где δ - вектор, у которого компоненты определяются формулами

$$\delta_k = 0, \quad \text{если} \quad k \le \hat{n} \quad \text{или} \quad k > n,$$
$$\delta_k = \varphi(k)(c'-c''), \quad \text{если} \quad \hat{n} < k \le n.$$

Здесь через $\varphi(k)$ обозначена k-ая строка матрицы Φ. Поэтому

$$M\hat{Q}(n) = tr(R^{-1}M\{(\xi+\delta)(\xi+\delta)^*\}) =$$
$$= N + tr(R^{-1}\delta\delta^*) = N + \delta^* R^{-1}\delta.$$

Поскольку R^{-1} - положительно определенная матрица, то для любых ненулевых векторов δ $\delta^* R^{-1}\delta > 0$ и, следовательно, минимум $M\hat{Q}(n)$ будет достигаться только при $\hat{n}=n$, так как $\delta=0$ только в этом случае.

Обычными методами исследования оценок МНК [2] можно показать, что если число n определено верно, то оценки $\hat{c}'$ и $\hat{c}''$ являются несмещенными и их матрица вариации

$$M\left\{\begin{pmatrix} \hat{c}'-c' \\ \hat{c}''-c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{c}'-c' \\ \hat{c}''-c'' \end{pmatrix}^*\right\} = A.$$

Если число n определено неточно, т.е. момент разладки τ оценен неточно, то оценка компонент векторов c' и c'' будет смещенной

$$M\begin{Bmatrix} \hat{c}' \\ \hat{c}'' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c' \\ c'' \end{pmatrix} + AB\delta, \quad (7)$$

и матрица вариации этих оценок будет иметь вид

$$M\left\{\begin{pmatrix} \hat{c}'-c' \\ \hat{c}''-c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{c}'-c' \\ \hat{c}''-c'' \end{pmatrix}^*\right\} = A + AB\delta\delta^*B^*A. \quad (8)$$

В (7) и (8) вектор δ определяется следующим образом. Пусть значение n, соответствующее истинному моменту разладки τ, равно n_0, а его оценка, полученная по предлагаемому способу, равна $\hat{n}$.

Тогда для $n_0<\hat{n}$ компоненты вектора δ определяются формулами

$$\delta_k = \varphi(k)(c''-c'), \quad n_0<k\leq \hat{n},$$

$$\delta_k = 0, \quad k\leq n_0, \quad k>\hat{n}.$$

Для $n_0>\hat{n}$ имеем

$$\delta_k = \varphi(k)(c'-c''), \quad \hat{n}<k\leq n_0,$$

$$\delta_k = 0, \quad k\leq \hat{n}, \quad k>n_0.$$

Здесь $\varphi(k)$ – k-ая строка матрицы Φ.

Рассмотрим пример. Пусть функция регрессии является кусочно-линейной, т.е. $m=2$, $\varphi_1(t)=1$, $\varphi_2(t)=t$, а случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным марковским. Тогда $R_{ij}=M\{\xi(t_i)\xi(t_j)\} = \sigma^2 z^{|i-j|}$, где σ^2 – дисперсия процесса $\xi(t)$, $z=e^{-\alpha\Delta}$, $\alpha>0$. Элементы обратной матрицы $R^{-1}=\|R^{-1}_{ij}\|$ определяются в этом случае формулами:

$$R^{-1}_{11}=R^{-1}_{NN}=1/\sigma^2(1-z^2); \quad R_{ij}=0, \quad |j-i|>1;$$

$$R^{-1}_{ii}=(1+z^2)/\sigma^2(1-z^2), \quad 1<i<N;$$

$$R^{-1}_{i,i+1}=R^{-1}_{i+1,i}=-z/\sigma^2(1-z^2), \quad 1\leq i<N.$$

Предположим, что функция регрессии линейно возрастает до момента времени $t=\tau$, после чего остается постоянной. Тогда $c_1'=0$, $c_2'=1$; $c_1''=\tau$, $c_2''=0$.

Вычисления показывают, что в этом случае при $\hat{n}<n_0$ вектор $B\delta$ имеет вид

$$B\delta = 1/\sigma^2(1-z^2)\begin{bmatrix} (1-z)^2(n_0-\hat{n}-1)\left(-\tau+\frac{\Delta}{2}(\hat{n}+n_0-2)\right)+ \\ +(1-z+z^2)(-\tau+\Delta(n_0-1)) \\ (1-z)^2\Delta(n_0-\hat{n}-1)\left(-\frac{\tau}{2}(\hat{n}+n_0-2)\right)+G_1+ \\ +((n_0-1)(1+z^2)-(n_0-2)z)(-\tau+\Delta(n_0-1))\Delta \\ z(\tau-(n_0-1)\Delta) \\ z(\tau-\Delta(n_0-1))n_0\Delta \end{bmatrix}$$

Для $n_0<\hat{n}$ получаем

$$B\delta = 1/\sigma^2(1-z^2)\begin{bmatrix} -z(\tau-n_0\Delta) \\ -z(\tau-\Delta n_0)(n_0-1)\Delta \\ -(1-z)^2(\hat{n}-n_0-1)\left(-\tau+\frac{\Delta}{2}(n_0+\hat{n})\right)- \\ -(1-z+z^2)(-\tau+\Delta n_0) \\ -(1-z)^2\Delta(\hat{n}-n_0-1)\left(-\frac{\tau}{2}(n_0+\hat{n})\right)-G_2- \\ -(n_0(1+z^2)-(n_0+1)z)(-\tau+\Delta n_0)\Delta \end{bmatrix}$$

Здесь $G_1=\frac{\Delta}{6}((n_0-2)(n_0-1)(2n_0-3)-(\hat{n}-1)\hat{n}(2\hat{n}-1))$,
$G_2=\frac{\Delta}{6}((\hat{n}-1)\hat{n}(2\hat{n}-1)-n_0(n_0+1)(2n_0+1))$.

Матрицы $A, AB\delta\delta^*B^*A$ и вектор $AB\delta$, ввиду их громоздкости, не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. СЕБЕР Дж. Линейный регрессионный анализ.–М.:Мир, 1980.–395с.
2. КЕНДАЛЛ М., СТЬЮАРТ А. Статистические выводы и связи.–М.: Наука, 1983. – 898с.

TRŪKIOS REGRESIJOS FUNKCIJOS ĮVERTINIMAS

Genadijus MEDVEDEVAS, Viktoras KAZAČIONOKAS

Nagrinėjamas mažiausių kvadratų prasme optimalus algoritmas surasti pasikeitimui atsitiktinio proceso savybėse.

Raktažodžiai: persijungianti regresija; išsiderinimas; mažiausių kvadratų metodas.

ESTIMATION OF A DISCONTINUOUS REGRESSION FUNCTION

Genadij MEDVEDEV, Victor KASACHONOK

An optimal mean-square algorithm for the detection of a change in the properties of randon processes is investigated.

Key words: random processes; segmented regression.