Вычисление реальной наращенной суммы депозитов, индексов цен с учетом действия инфляции

Кирлица В.П.,

кандидат физико-математических наук, доцент,

Марчук Т.Н.,

Белорусский государственный университет

Как известно [1,2] наращенная сумма S финансовой операции определяется следующими заданными параметрами: P - начальная сумма, n - срок финансовой операции, измеряемый в годах, i - годовая ставка процентов. Если срок финансовой операции меньше или равен одному году, то наращение осуществляется, как правило, по ставке простых процентов, $S = P(1+ni)$, если срок финансовой операции больше года, то обычно используется годовая ставка сложных процентов и $S = P(1+i)^n$. Значения P, n и i задаются в самом начале финансовой операции и вычисление S не предоставляет трудности. Однако при вычислении номинальной суммы S не принимается во внимание снижение реальной покупательной способности денег за период, охватываемый финансовой операцией. В современных условиях инфляция в денежных отношениях играет заметную роль и без ее учета конечные результаты представляют собой весьма условную величину. Действие инфляции необходимо учитывать и при расчете реальной наращенной суммы и при измерении эффективности (доходности) финансовой операции.

Реальная наращенная сумма финансовой операции с учетом действия инфляции определяется как $C = \frac{S}{j_p}$, где j_p - индекс цен за период n наращения, а S - наращенная сумма финансовой операции, измеренная по номиналу, т.е. без учета действия инфляции.

Индекс цен j_p зависит от темпа инфляции за период n, охватываемый финансовой операцией. Пусть срок n финансовой операции разбит на m подинтервалов с длительностями $n_1, n_2, \ldots, n_m$, $n_1 + \ldots + n_m = n$, а $h_1, h_2, \ldots, h_m$ - соответствующие темпы инфляции на этих подинтервалах, измеренные в долевом отношении. Тогда, как известно [1], $j_p = (1+h_1)(1+h_2)\cdot \ldots \cdot(1+h_m)$. Если оценивается реальная эффективность i_p финансовой операции, то $i_p = \frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{j_p} - 1\right)$ для $n \le 1$; $i_p = \frac{1+i}{\sqrt[n]{j_p}} - 1$ для $n > 1$.

После того, как финансовая операция уже завершилась, вычисление указанных характеристик финансовой операции не предоставляет труда, поскольку значения темпов инфляции $h_1, h_2, ..., h_m$ известны и по ним может быть вычислен индекс цен j_p.

Однако перед инвестором уже в самом начале финансовой операции возникает вопрос, как оценить реальное значение C и реальную эффективность i_p, так как значения темпов инфляции $h_1, h_2, ..., h_m$ в предстоящие периоды не известны. Чтобы оценить значения темпов инфляции $h_1, h_2, ..., h_m$ используются различные методы математического прогнозирования, основаннные на обработке ранее полученных статистических данных и использующие сложный математический аппарат [3].

В данной статье , как нам представляется, предлагается более простой (и менее обремененный сложным математическим аппаратом) подход к оценке значения индекса j_p. Поскольку значения $h_1, h_2, ..., h_m$ темпов инфляции в самом начале финансовой операции неизвестны, будем считать их случайными величинами с заданными или спрогнозированными законами распределения вероятностей. Законы распределения вероятностей задаются либо экспертным путем, либо на основе предыдущих статистических наблюдений. В этом случае реальная наращенная сумма C, реальное значение эффективности i_p будут также случайными величинами, и исследователя в данной ситуации будет интересовать их среднее значение, дисперсия и вероятность попадания указанных значений C, i_p в наперед заданные интервалы.

В данной статье сосредоточим внимание на вычислении числовых характеристик случайной величины C реальной наращенной сумммы финансовой операциии. Указанный подход без особого труда можно распространить и на вычисление числовых характеристик случайной величины i_p реальной эффективности финансовой операции. Нами определены аналитические законы распределения вероятностей реальной нарщенной суммы C финансовой операции для определенных типов распределения вероятностей темпов инфляции $h_1, h_2, ..., h_m$ для $m = 1,2,3,4$. Зная закон распределения вероятностей C, можно легко найти и все числовые характеристики C, упомянутые выше.

В случае, когда темпы инфляции $h_1, h_2, ..., h_m$ описываются независимыммми в совокупности, дискретными случайными величинами с рядом распределения вероятностей

h_i	d_{1i}	d_{2i}	...	$d_{k_i i}$
P	p_{1i}	p_{2i}	...	$d_{k_i i}$

$$, \ i = \overline{1, m} \qquad (1)$$

вычисление числовых характеристик реальной наращенной суммы C производится довольно просто. В данном случае случайная величина C будет также дискретной случайной величиной, для которой просто можно составить соответствующий ряд распределения вероятностей. В случае, когда темпы инфляции определяются как дискретные, но зависимые случайные величины, процесс вычисления числовых характеристик случайной величины C наращенной суммы несколько усложняется, так как приходится оперировать не с рядами распределения вероятностей (1), а с совоместной таблицей распределения случайных величин $h_1, h_2, ..., h_m$. Однако и в этом случае вычисление числовых характеристик C не предоставляет принципиальной трудности.

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть на двухмесячный депозит положена сумма в 100 тыс. руб. под 12 годовых процентов. Темп инфляции в предстоящие 2 месяца эксперты оценивают следующей таблицей совместных распределений вероятностей:

$h_2 \backslash h_1$	0.012	0.014
0.015	0.11	0.17
0.017	0.16	0.22
0.018	0.15	0.19

где h_1 - темп инфляции в первом месяце, а h_2 - темп инфляции во втором месяце. Необходимо оценить числовые характеристики реальной наращенной суммы депозита C и вероятность попадания в интервал [76179, 77839].

Индекс цен j_p описывается следующим рядом распределения вероятностей

j_p	1.288	1.3104	1.311	1.3216	1.3338	1.3452
P	0.11	0.16	0.17	0.15	0.22	0.19

Используя этот ряд распределения вероятностей, получаем:

$C_{min} = 75825$, $C_{max} = 79193$, $E\{C\} = 77199$, $D\{C\} = 1148$, $P\{77839 \le C \le 76179\} = 0.48$.

Пусть теперь темпы инфляции $h_1, h_2, ..., h_m$ задаются абсолютно-непрерывными распределениями. В финансовой математике наиболее часто используются следующие типы распределений вероятностей. Равномерное распределение $R[a,b]$ на отрезке $[a,b]$. Это случай с наиболее низким уровнем априорной информации о поведении случайной величины, когда эксперты могут оценить минимальное значение a, которое может принимать случайная величина, и максимальное ее значение b. Считается, что с равной вероятностью случайная величина может принять любое значение из интервала $[a,b]$. Более высокий уровень априорной информации, это треуголное распределение $Tr[a,b]$ на отрезке $[a,b]$. Плотность такого распределения имеет вид треугольника с максимальным значением в точке $(a+b)/2$. Это означает, что случайная величина с большей вероятностью будет попадать в окрестность середины интервала $[a,b]$, чем в такую же окрестность, лежащую ближе к концам отрезка $[a,b]$. Самый высокий уровень априорной информации о поведении случайной величины – это нормальное распределение $N(a_1, \sigma^2)$. При этом надо знать математическое ожидание a_1 и дисперсию σ^2 случайной величины. Значение σ^2 должно быть достаточно малым, чтобы интервал изменения случайной величины, получаемый по правилу «3σ», лежал в положительной области. Поскольку такие требования довольно жесткие, нормальное распределение $N(a_1, \sigma^2)$ редко используется в финансовой математике.

Рассмотрим в начале простейший случай изменения темпа инфляции, когда $n_1 = n$, т.е. $j_p = 1 + h_1$, где h_1 - темп инфляции на интервале $[0,n]$ и h_1 – абсолютно-напрерывная случайная величина, имеющая распределение вероятностей одного из типов, описанных выше. Так как в этом случае случайные величины j_p и h_1 линейно связаны, то это означает, что j_p будет иметь тот же тип распределения вероятностей, что и h_1. А именно, если $h_1 \in R[a,b]$, то $j_p \in R[1+a, 1+b]$; если $h_1 \in Tr[a,b]$, то $j_p \in Tr[1+a, 1+b]$; если $h_1 \in N(a_1, \sigma^2)$, то $j_p \in N(1+a_1, \sigma^2)$.

Например, в условиях предыдущего примера темп инфляции h_1 за два месяца оценивается как случайная величина, имеющая равномерное распределение на интервале от 1.2 % до 1.8 %, то простые расчеты показывают, что

$C_{\min} = 100136$, $C_{\max} = 100791$. Среднее значение и дисперсия C равны:

$$E\{C\} = \int\limits_{1,012}^{1,018} \frac{102}{x}\frac{dx}{0.006} = \frac{102}{0.006}\ln\frac{1.018}{1.012} = 100.493 \text{ тыс.},$$

$$D\{C\} = E\{C^2\} - E^2\{C\} = \frac{102^2}{0.006}\left(\frac{1}{1.012} - \frac{1}{1.018}\right) - (100.493)^2 = 0.01$$

Вероятность попадания реальной наращенной суммы C в интервал от 100.18 тысяч до 100.65 тысяч равна: $P\{100.18 \le C \le 100.65\} = P\{100.18 \le \frac{102}{j_p} \le 100.65\} = 0.79$.

Отметим, что было бы ошибкой вычислять среднее значение C как $\frac{S}{E\{j_p\}}$. Для нашего примера это дало бы результат 100.4926 тысяч, который отличается от полученного выше.

Перейдем теперь к расссмотрению случая, когда продолжительность финансовой операции разбивается на два периода и h_1, h_2 – темпы инфляции в первом и во втором периоде. Будем также предполагать, что h_1, h_2 независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервалах $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ соответственно. В этом случае индекс цен j_p функционально зависит от темпов инфляции h_1, h_2: $j_p = (1+h_1)(1+h_2)$. Используя это функциональное преобразование и аппарат теории вероятностей [4], можно показать, что плотность распределения реальной наращенной суммы C имеет вид:

$$p_c(x) = \begin{cases} \dfrac{S}{x^2 k}\ln\left(\dfrac{(b_1+1)(b_2+1)x}{S}\right), x \in \left[\dfrac{S}{(b_1+1)(b_2+1)}, \dfrac{S}{m_2}\right], \\ \dfrac{S}{x^2 k}\ln\left(\dfrac{b_2+1)}{a_2+1}\right), x \in \left[\dfrac{S}{m_2}, \dfrac{S}{m_1}\right], \\ \dfrac{S}{x^2 k}\ln\left(\dfrac{S}{x(a_1+1)(a_2+1)}\right), x \in \left[\dfrac{S}{m_1}, \dfrac{S}{(a_1+1)(a_2+1)}\right], \end{cases}$$

где $k = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$, $m_1 = \min\{(1+a_1)(1+b_2), (1+a_2)(1+b_1)\}$,
$m_2 = \max\{(1+a_1)(1+b_2), (1+a_2)(1+b_1)\}$.

Применяя аппарат теории вероятностей, по плотности $p_C(x)$ можно найти требуемые числовые характеристики C.

Пусть теперь одна из случайных величин имеет дискретное распределение, а другая – абсолютно-непрерывное. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что темп инфляции h_1 имеет дискретное распределение

h_1	d_1	d_2	...	d_l
P	p_1	p_2	...	d_l

Темп инфляции на втором этапе определяется условными плотностями распределения вероятностей $p_{h_{2,j}}(x)$, где индекс j означает, что $h_1 = d_j, \quad j = \overline{1,l}$. Обозначим через $B_j = \{h_1 = d_j\}, \quad j = \overline{1,l}$ полную группу случайных событий, а через $A = \{C < x\}$ – случайное событие, состоящее в том, что реальная наращенная сумма не превзойдет $x, x > 0$. Используя формулу полной верояности [4], вычислим функцию распределения C:

$$F_C(x) = P(A) = \sum_{j=1}^{l} P(B_j)P(A \mid B_j) = \sum_{j=1}^{l} p_j \left(1 - F_{h_2}\left(\frac{S}{x(1+d_j)} - 1\right)\right).$$

Дифференцируя $F_C(x)$, получаем плотность распределения C:

$$p_C(x) = \sum_{j=1}^{l} p_j p_{h_{2,j}}\left(\frac{S}{x(1+d_j)} - 1\right)\frac{S}{x^2(1+d_j)} \qquad (2)$$

В частности, если темп инфляции h_2 имеет условные равномерные плотности распределения на интервалах $[a_{2j}, b_{2j}]$ при условии, что $h_1 = d_j, \quad j = \overline{1,l}$, то выражение (2) трансформируется к виду:

$$p_C(x) = \sum_{j=1}^{l} \frac{S \cdot p_j}{(b_{2j} - a_{2j})(1+d_j)x^2} \cdot \mathrm{I}_{[a_{2j}, b_{2j}]}\left(\frac{S}{x(1+d_j)} 1\right), \qquad (3)$$

где $\mathrm{I}_{[a_{2j}, b_{2j}]}(x)$ – индикаторная функция интервала $[a_{2j}, b_{2j}]$, т.е. если $x \in [a_{2j}, b_{2j}]$, то функция принимает значение 1, в противном случае – нуль.

Используя выражение для плотностей распределения (2) или (3), можно стандартным образом вычислить числовые характеристики C. Так например, если для нашего сквозного примера выполняется: $h_1 = 1.2\%$ с вероятностью 0.42 и при этом h_2 будет иметь равномерное распределение на интервале $[1.5\%, 1.9\%]$; $h_1 = 1.4\%$ с вероятностью 0.58 и при этом h_2 будет иметь равномерное распределение на интервале $[1.7\%, 2.1\%]$, то плотность распределения, согласно (3), примет вид:

$$p_C(x) = \begin{cases} \dfrac{14585798.82}{x^2}, & x \in [98522.73847, 98910.24186], \\ \dfrac{10583003.85}{x^2}, & x \in [98911.20101, 99300.99885]. \end{cases}$$

Условие нормировки для этой плотности выполняется, что указывает на корректность расчетов. Минимальное значение $C_{\min} = 98522.74$, максимальное значение $C_{max} = 99301$. Среднее значение реальной наращенной суммы равно $E\{C\} = 98879.87$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда интервал реализации финансовой операции разбит на три интервала, и h_1, h_2, h_3 соответствующие этим интервалам темпы инфляции, которые будем считать независимыми в совокупности случайными величинами, равномерно распределенными на интервалах $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3]$. Получить общую формулу для плотности распределения индекса цен j_p в этом случае не удается. Такую формулу можно получить лишь в частном случае, когда темпы инфляции h_1, h_2, h_3 равномерно распределены на одном и том же интервале $[a, b]$:

$$p_C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(b-a)^3} \ln^2 \dfrac{x}{(a+1)^3}, & x \in [(a+1)^3, (a+1)^2(b+1)], \\ \dfrac{1}{2(b-a)^3} [\ln \dfrac{x}{(a+1)^2(b+1)} \ln \dfrac{(b+1)^3}{x} + \ln \dfrac{x}{(a+1)(b+1)^2} \ln \dfrac{(a+1)^3}{x}] & x \in [(a+1)^2(b+1), (a+1)(b+1)^2], \\ \dfrac{1}{2(b-a)^3} \ln^2 \dfrac{(b+1)^3}{x}, & x \in [(a+1)(b+1)^2, (b+1)^3], \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Аналогичным образом можно получить плотность распределения индекса цен и в случае четырех интервалов разбиения периода проведения финансовой операции, когда темпы инфляции h_1, h_2, h_3, h_4 являются независимыми в совокупности случайными величинами, равномерно распределенными на одном и том же интервале. Однако аналитический вид этой плонтности значительно усложняется и в данной статье не приводится.

Если же темпы инфляции h_1, h_2, h_3 независимы и равномерно распределены на разных интервалах $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3]$, то при заданных числовых значениях их границ с помощью пакета Mathematica удается определить плотность распределения j_p и ее числовые характеристики. Если на первом интервале темп инфляции изменяется от пяти до семи процентов, на втором интервале он варьирует от восьми до девяти процентов, а на третьем интервале – от шести до восьми процентов, то плотность принимает вид:

$$p_{j_p}(y)=\begin{cases}1976.67-31437.8\cdot\ln(0.94y)+125000\cdot\ln^2(0.94y) & y\in[d_1,d_2)\\ -300.37+2304.16\ \ln(0.94y) & y\in[d_2,d_3)\\ -2277.04+31437.8\cdot\ln(0.92y)-125000\cdot\ln^2(0.92y)+2304.16\cdot\ln(0.94y) & y\in[d_3,d_4)\\ -4891.4+31437.8\cdot\ln(0.92y)-125000\cdot\ln^2(0.92y)+38459.1\cdot\ln(0.94y)-125000\cdot\ln^2(0.94y) & y\in[d_4,d_5)\\ -2614.36-2304.16\cdot\ln(0.92y)+38459.1\cdot\ln(0.94y)-125000\cdot\ln^2(0.94y) & y\in[d_5,d_6)\\ 343.846-2304.1\cdot\ln(0.92y) & y\in[d_6,d_7)\\ 2958.2-384591.1\cdot\ln(0.92)+125000\cdot\ln^2(0.92) & y\in[d_7,d_8)\\ 0, & y\notin[d_1,d_8)\end{cases}$$

где $d_1=1.20204$, $d_2=1.21317$, $d_3=1.22472$, $d_4=1.224936$, $d_5=1.23606$, $d_6=1.236278$, $d_7=1.248048$, $d_8=1.259604$.

Числовые характеристики j_p следующие: $E\{j_p\}=1.2306, D\{j_p\}=0.000998$, $P\{1.22\le j_p\le 1.24\}=0.6576$.

Следует отметить, что для $m>4$ получить аналитические результаты для вычисления числовых характеристик j_p пока не удается. В этом случае для оценки числовых характеристик j_p необходимо использовать статистическое моделирование значений темпов инфляции $h_1,h_2,...,h_m$ [5].

Рассмотрим теперь ситуацию, когда темпы инфляции $h_1,h_2,...,h_m$, связаны цепной Марковской зависимостью. Пусть интервал $[0,n]$ разбит точками $0=t_1<t_2<...<t_{m+1}=n$ на m подинтервалов. На интервале $[0,n]$ задан тренд $f(t)$, определяющий общую тенденцию изменения темпа инфляции. Инфляция h_j, принимающая постоянное значение на интервале $[t_j,t_{j+1})$, $j=\overline{1,m}$, складывается из значения $f(t_j)$ тренда в начале интервала и возмущения ε_{ξ_j}, т.е. $h_j=f(t_j)+\varepsilon_{\xi_j}$, где ξ_j, $j=\overline{1,m}$ – однородная цепь Маркова (в принципе, она может быть и неоднородной) с N состояниями $\{1,2,...,N\}$, начальным распределением вероятностей

$$P\{\xi_1=\lambda\}=\pi_\lambda\ge 0,\ \lambda=\overline{1,N},\ \sum_{\lambda=1}^{N}\pi_\lambda=1$$

и матрицей вероятностей одношаговых переходов

$$P=(p_{ks}),\ p_{ks}=P\{\xi_{j+1}=s|\xi_j=k\},$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_N$ – заданные значения возмущений.

Тогда среднее значение реальной наращенной суммы C будет равно

$$E\{C\}=\sum_{\xi_1=1}^{N}\sum_{\xi_2=1}^{N}\cdots\sum_{\xi_k=1}^{N}\frac{S}{j_p}\pi_{\xi_1}\cdot p_{\xi_1,\xi_2}\cdot\cdots\cdot p_{\xi_{m-1},\xi_m}.$$

Можно также вычислить дисперсию C и вероятность попадания C в заданный интервал.

В качестве иллюстративного примера, мы рассмотрим следующий пример. Пусть на трехмесячный депозит положена сумма в 100 тысяч рублей под 12 % годовых. Эксперты полагают, что общая динамика изменнеия инфляции за этот период определяется трендом $f(t) = 0.008t + 0.012$, где t измеряется в годах, т.е. при $t = 0$ инфляция равна 1,2%. Эта величина инвестору может быть известна на основе предыдущих наблюдений. При $t = 0.25$ значение тренда равно 1.4%. Следовательно, эксперты полагают, что общая динамика изменения темпа инфляции будет линейно возрастающей функцией и ее прирост составит 0.2%. При этом тренд в начале каждого месяца может подвергаться возмущениям: 1) $\varepsilon_1 = 0$ (первое состояние); 2) $\varepsilon_2 = 0.002$ (второе состояние); 3) $\varepsilon_3 = -0.001$ (третье состояние). Возмущения связаны цепной Марковской зависимостью с матрицей одношаговых переходов

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

и вектором начальных состояний $\pi = (0.4 \quad 0.5 \quad 0.1)$. Необходимо оценить числовые характеристики реальной наращеннной суммы C.

Расчеты показывают, что $S = 103000$, индекс цен j_p – дискретная случайная величина, принимающая 27 различных значений, причем $(j_p)_{\min} = 1.0354$ реализуется с вероятностью 0.009, а $(j_p)_{\max} = 1.0446$ реализуется с вероятностью 0.005. Следовательно $C_{\min} = 98597.8$ реализуется с вероятностью 0.005 и $C_{\max} = 99478.37$ реализуется с вероятностью 0.009. Среднее значение реальной наращенной суммы равно 99120.17.

Основные результаты данной работы были представлены на 8 Международной конференции «Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития» [6].

Л и т е р а т у р а

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело Лтд, 2002.

2. Кирлица В.П. Финансовая математика. Руководство к решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2005.

3. Малюгин В.И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа. Мн.: БГУ, 2001

4.Харин Ю.С., Зуев Н.М. Теория вероятностей: учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2004.

5. Харин Ю.С., Малюгин В.И., Кирлица В.П. и др. Основы имитационного и статистического моделирования. Мн.: Дизайн ПРО, 1997.

6 .Материалы 8 Международной конференции «Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития». Минск, 18-19 октября 2007 г., т.4, стр. 130-133.