Машинная графика
Computer Graphics

Лекция 9

«Однородные координаты»

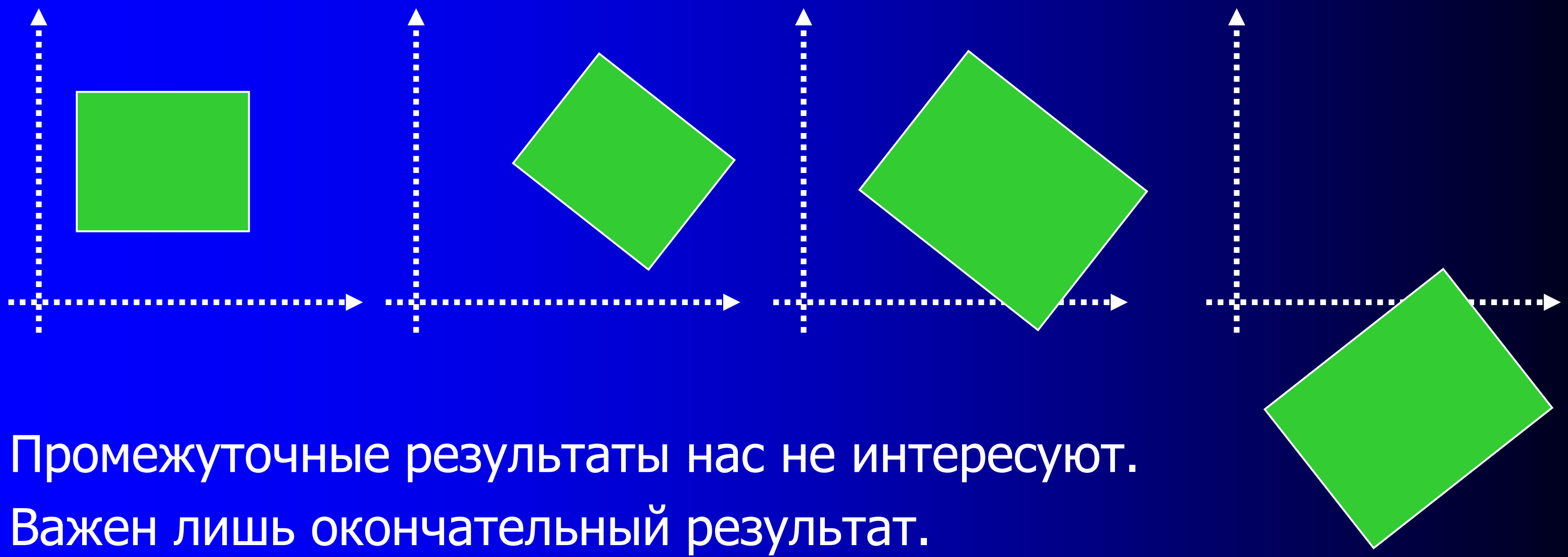
План лекции

- Однородные координаты 2D
- Общий вид матрицы 2D преобразований
- Комбинация преобразований 2D
- Однородные координаты 3D
- Общий вид матрицы 3D преобразований

Преобразования 2D
(Декартовы координаты)

Что делать, если требуется произвести цепочку преобразований над некоторым объектом?

Например: сдвиг+поворот+масштабирование+отражение...



Промежуточные результаты нас не интересуют.

Важен лишь окончательный результат.

Однородные координаты

Однородные координаты - это математический механизм, связанный с определением положения точек в пространстве. Привычный аппарат декартовых координат, не подходит для решения некоторых важных задач в силу следующих соображений:

- В декартовых координатах невозможно описать бесконечно удаленную точку. А многие математические и геометрические концепции значительно упрощаются, если в них используется понятие бесконечности. Например, "бесконечно удаленный источник света".
- С точки зрения алгебраических операций, декартовы координаты не позволяют провести различия межу точками и векторами в пространстве. Действительно, (1,-2,5) - это направление или точка?
- Невозможно использовать унифицированный механизм работы с матрицами для выражения преобразований точек. С помощью матриц 3x3 можно описать вращение и масштабирование, однако описать смещение (x=x+a) нельзя.
- Аналогично, декартовы координаты не позволяют использовать матричную запись для задания перспективного преобразования (проекции) точек.

Однородные координаты

Как видно из вышесказанного двумерные преобразования имеют различный вид. Сдвиг реализуется сложением, а масштабирование и поворот - умножением. Это различие затрудняет формирование суммарного преобразования и устраняется использованием двумерных однородных координат точки, имеющих вид: (x,y,w). Здесь *w* - произвольный множитель, не равный 0. Число *w* так же называется масштабным множителем.

Двумерные декартовые координаты точки получаются из однородных делением на множитель w:

$$X = x/w, Y = y/w$$

В иной форме записи преобразование из однородных координат в обычные: (x/w,y/w,w/w)->(X,Y,1).

Однородные координаты для 2D случая можно представить как промасштабированные с коэффициентом w значения двумерных координат, расположенные в плоскости с *Z = w*.

Однородные координаты (Homogeneous coordinates)

- Два набора чисел, представляющих однородные координаты, соответствуют одной точке Декартового пространства если они могут быть получены один из другого умножением на некоторый множитель.
  - (2,5,3) и (4,10,6) представляют одну точку.
- В силу произвольности значения w в однородных координатах не существует единственного представления точки, заданной в декартовых координатах.
- Как минимум одно число из тройки должно быть отлично от нуля – точка (0,0,0) не будет определена.
- Если $w \neq 0$, то деление на неё даст Декартовы координаты $(x/w, y/w, 1)$.
- Если $w=0$, то точка находится в бесконечности.

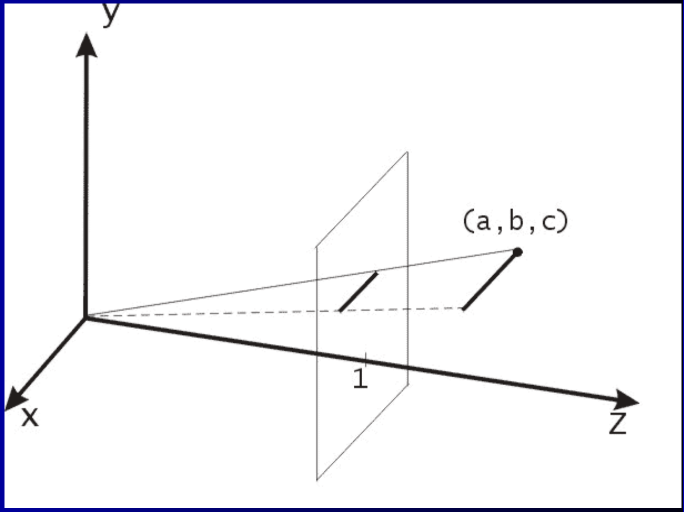
Cartesian coordinates

Однородные координаты

В общем случае осуществляется переход от n-мерного пространства к (n+1)-мерному. Обратное преобразование называется проекцией однородных координат.

Физический смысл.

Рассмотрим точку трехмерного пространства (a,b,c). Если представить эту точку как однородное представление точки двумерного пространства, то ее координаты будут (a/c,b/c). Легко заметить, что двумерное представление точки с координатами (a,b,c) выглядит как ее проекция на плоскость z=1.

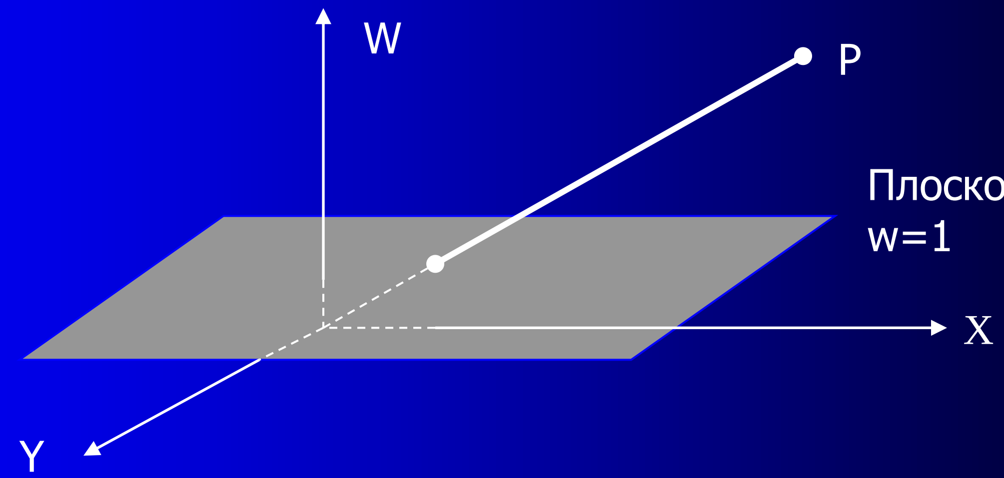


Проекция точки (a,b,c) на плоскость z=1

Homogeneous coordinates

Физический смысл трёхмерных однородных координат можно продемонстрировать так же и с помощью тройки векторов (x,y,w):

- Если представить (x,y,w) в 3-х мерном пространстве, то все тройки чисел будут представлять некоторые точки, лежащие на прямых исходящих из начала координат.
- В случае преобразования к декартовым координатам, получится точка (X,Y,1) – она соответствует перспективной проекции точки (x,y,w) на плоскость w=1.



Однородные координаты

Запись в однородных координатах точки двумерного пространства в виде трехэлементного вектор-столбца или вектор-строки позволяет все матрицы преобразований, на которые будет умножаться вектор точки, привести к одному виду- размера 3×3.

Таким образом преобразования в однородных координатах, осуществляемые относительно центра координат, имеют одинаковую форму произведения вектора исходных координат на матрицу преобразования.

Например: $$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{T}(D_x, D_y)$$

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ D_x & D_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(D_x, D_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ D_x & D_y & 1 \end{bmatrix}$$ - матрица 2D переноса

Векторы-строки и векторы-столбцы

- В сокращённом виде вектор обозначается как **v** или $\vec{v}$
- Может использоваться два формата векторов:

$$\mathbf{v} = \boxed{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}} \neq \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T \right)$$

- Каждый вектор определяется отношением с набором базовых векторов (которыми задаётся система координат)
- Кстати, базовые вектора не обязательно должны быть ортогональными!

Векторы-строки и векторы-столбцы (Row vs. Column Formats)

Не смотря на свою эквивалентность по сути, форматы вектора-строки и вектора-столбца приводят к существенным различиям в преобразованиях, в которых они используются:

column format

row format

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Mv} = \mathbf{v}^T \mathbf{M}^T$$

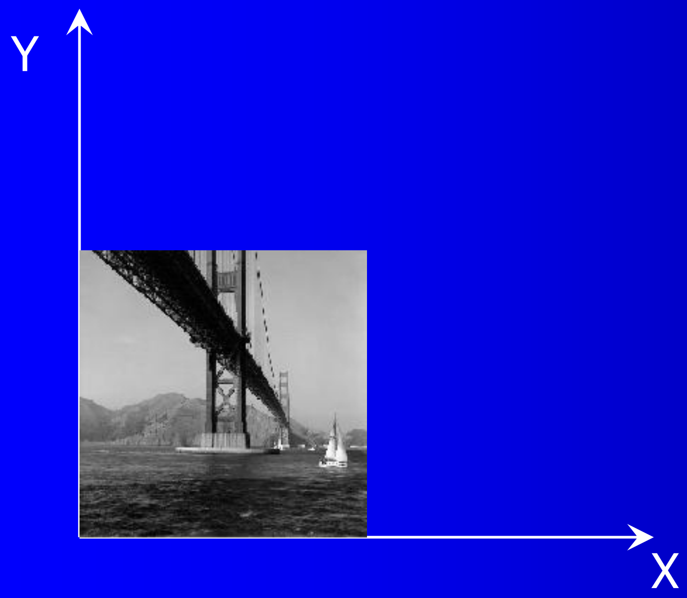
transposed

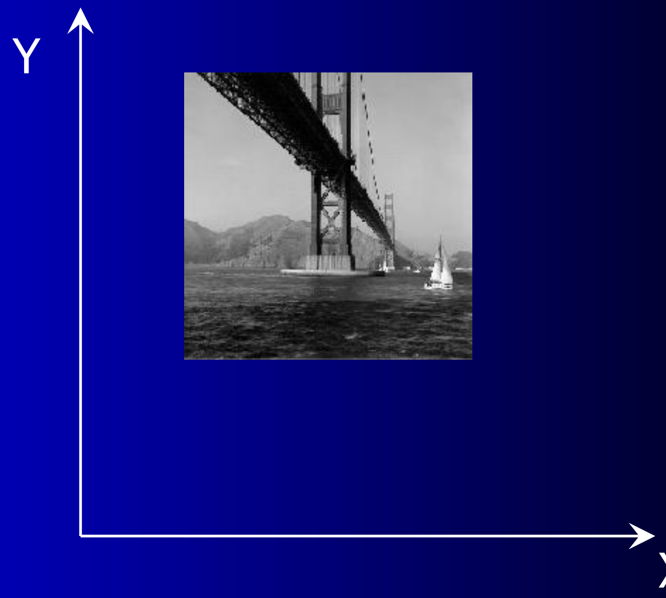
Однородные координаты

В некоторых источниках матрица переноса (и аналогично ей остальные матрицы преобразований) имеет вид:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & D_x \\ 0 & 1 & D_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & D_x \\ 0 & 1 & D_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$





Двумерные преобразования в однородных координатах

В силу произвольности значения ***w*** в однородных координатах не существует единственного представления точки, заданной в декартовых координатах.

Матрицы двухмерных преобразований в однородных координатах имеют вид:

<u>Перенос:</u>

$$[xn \quad yn \quad wn] = [x \quad y \quad w] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Растяжение (сжатие) вдоль координатных осей, задаётся в виде:

$$x' = \alpha x, \alpha > 0,$$

$$y' = \beta y, \beta > 0.$$

Растяжению вдоль соответствующей оси соответствует значение масштабного множителя большего единицы. В однородных координатах матрица растяжения (сжатия) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Растяжение (сжатие) вдоль координатных осей:

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Поворот относительно центра координат на угол φ, задаётся выражениями:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Матрица вращения (для однородных координат):

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Матрица вращения (для однородных координат):

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Отражение (относительно какой либо из осей, например оси OY) задается при помощи выражений:

$$x' = x,$$
$$y' = -y.$$

Матрица отражения, соответственно:

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Матрица отражения относительно оси OY:

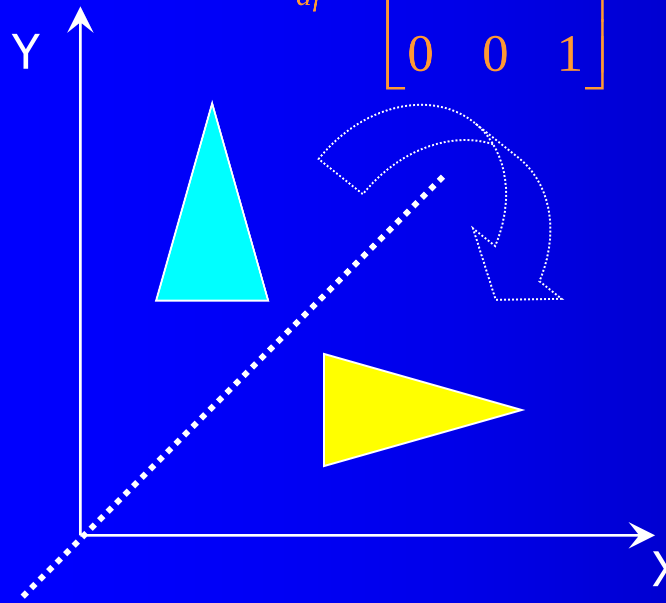
$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Матрица отражения относительно:

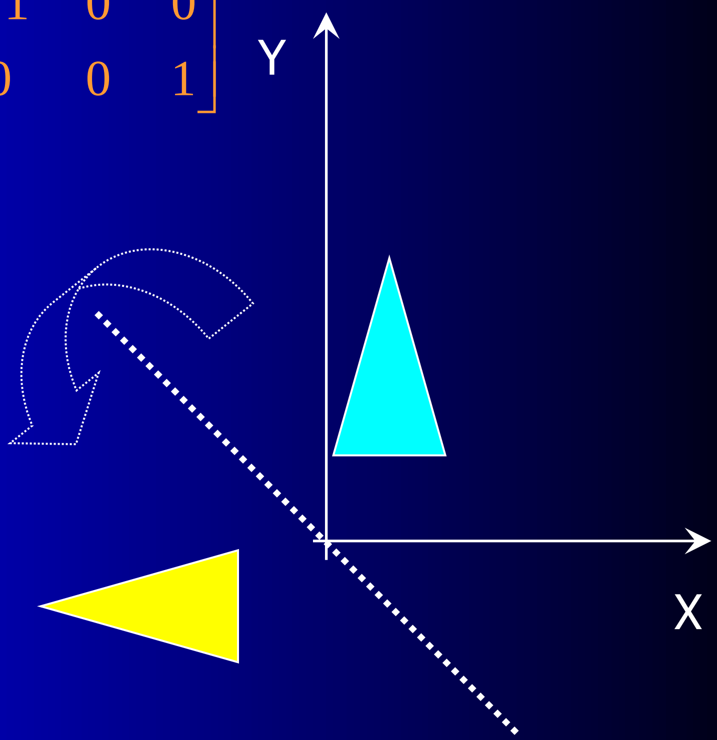
диагонали y=x:

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



диагонали y=-x:

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Двумерные преобразования в однородных координатах

Сдвиг (shear) искажает объект таким образом, что он выглядит состоящим из внутренних слоёв, скользящих относительно друг друга. Он описывается системой уравнений (например, сдвиг по оси OX):

$$x' = x + sh_x * y,$$

$$y' = y.$$

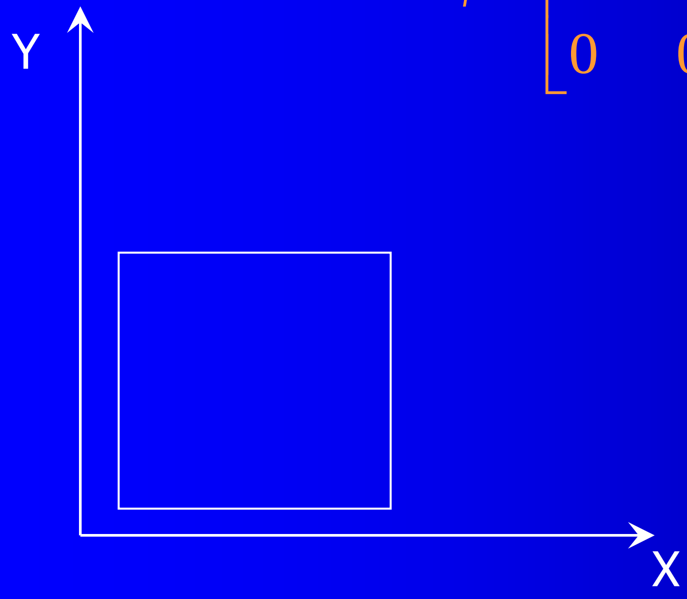
Матрица сдвига вдоль оси OX в однородных координатах:

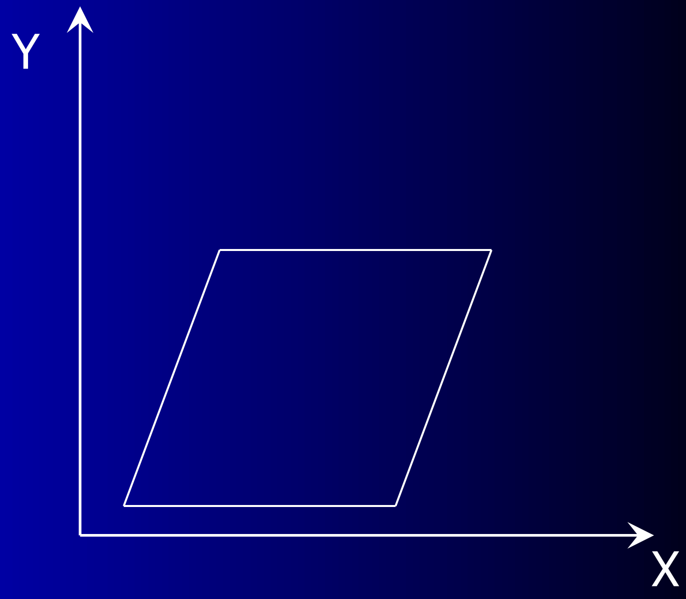
$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Двумерные преобразования в однородных координатах

Матрица сдвига вдоль оси OX в однородных координатах:

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Двумерные преобразования в однородных координатах (общий вид)

Матрица преобразования для двумерных однородных координат в общем случае имеет вид:

$$\begin{bmatrix} A & B & P \\ D & E & Q \\ L & M & S \end{bmatrix}$$

где элементы A, B, D и E определяют изменение масштаба, поворот и сдвиг, а L и M определяют перенос. Элемент S определяет общее изменение масштаба, а элементы P и Q определяют проецирование

(матрица приведена в формате для вектора строки!!!).

Двумерные преобразования в однородных координатах (общий вид)

Элемент S определяет общее изменение масштаба, а элементы P и Q определяют проецирование.

$$\begin{bmatrix} A & B & P \\ D & E & Q \\ L & M & S \end{bmatrix}$$

Рассмотрим преобразование:

$$[xn \quad yn \quad h] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

Очевидно, что $xn = x, \; yn = y, \; h = S$

Таким образом двумерные декартовые координаты преобразованной точки:

$$Xn = xn/h = x/S, \quad Yn = yn/h = y/S$$

т.е. такое преобразование задает изменение масштаба вектора положения точки. При S < 1 выполняется уменьшение масштаба, а при S > 1 - увеличение.

Двумерные преобразования в однородных координатах (общий вид)

$$\begin{bmatrix} A & B & P \\ D & E & Q \\ L & M & S \end{bmatrix}$$

Элементы P и Q определяют проецирование.

Для уяснения смысла третьего столбца матрицы преобразований выполним преобразование:

$$\begin{bmatrix} xn & yn & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & P \\ 0 & 1 & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & (Px + Qy + 1) \end{bmatrix}$$

Здесь *xn = x; yn = y; h=Px+Qy+1*, т.е. переменная h, которая определяет плоскость, содержащую преобразованные точки, представленные в однородных координатах, образует теперь уравнение плоскости в трехмерном пространстве:

$$h = Px + Qy + 1$$

Двумерные преобразования в однородных координатах (общий вид)

Элементы P и Q определяют проецирование.

$$\begin{bmatrix} A & B & P \\ D & E & Q \\ L & M & S \end{bmatrix}$$

Результирующие двумерные декартовые координаты Xn и Yn для преобразованной точки:

$$Xn = \frac{xn}{(Px + Qy + 1)}; \quad Yn = \frac{yn}{(Px + Qy + 1)};$$

Это соответствует вычислению их в плоскости $Z=1$, т.е. проецированию из плоскости $h=Px+Qy+1$ в плоскость $Z=1$. Легко показать, что центр проецирования при этом находится в начале координат.

Таким образом элементы P и Q матрицы определяют проецирование с центром проекции в начале координат.

Однородные координаты (свойства)

Однородные координаты дают возможность простого представления точек, имеющих в декартовой системе значение координаты, равное бесконечности.

Рассмотрим точку с однородными координатами (x,y,w). Ей соответствует точка с евклидовыми координатами (x/w, y/w). Зафиксируем x и y и устремим w к нулю. Точка (x/w, y/w) будет удаляться все дальше и дальше в бесконечность в направлении (x,y). Когда w станет нулем, (x/w, y/w) уходит в бесконечность. Следовательно, однородные координаты (x,y,0) - *идеальная точка* (ideal point) или, по-другому, *точка в бесконечности* (point at infinity) по направлению (x,y). Аналогично для трехмерного пространства: точка (x,y,z,0) - точка в бесконечности по направлению (x,y,z). В OpenGL для определения положения источника света используются однородные координаты. С их помощью можно определить как точечный источник света (w=1), так и параллельный источник света (w=0).

В частности, точка с однородными координатами (1, 0, 0) задает бесконечную точку на декартовой оси OX, а точка с однородными координатами (0, 1, 0) задает бесконечную точку на декартовой оси OY.

Композиция двумерных преобразований

Последовательное выполнение нескольких преобразований можно представить в виде единой матрицы суммарного преобразования. Умножение на единственную матрицу, естественно выполняется быстрее, чем последовательное умножение на несколько матриц. Рассмотрим выполнение часто используемых преобразований:

- *Перенос*
- *Масштабирование*

Свойства остальных преобразований могут быть рассмотрены по аналогии:

- *Растяжение (сжатие)* вдоль координатных осей
- *Поворот* относительно начала координат
- *Отражение* (относительно какой либо из осей)

Композиция двумерных преобразований

Последовательное выполнение нескольких преобразований можно представить в виде единой матрицы суммарного преобразования.

Последовательное выполнение переноса

Переместим точку P_0 на расстояние (Tx_1, Ty_1) в точку P_1:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 \cdot T_1.$$

Затем перенесём точку $\mathbf{P}_2$ на расстояние (Tx_2, Ty_2) в точку $\mathbf{P}_2$:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \cdot T_2 = (\mathbf{P}_0 \cdot T_1) \cdot T_2) = \mathbf{P}_0 \cdot (T_1 \cdot T_2) = \mathbf{P}_0 \cdot T.$$

Перенос аддитивен, т.е. последовательное выполнение T_1 и T_2 должно быть эквивалентно одному переносу на расстояние

$$(Tx_1+Tx_2, Ty_1+Ty_2).$$

Для доказательства этого рассмотрим произведение матриц переноса T_1 и T_2:

Композиция двумерных преобразований

Для доказательства этого рассмотрим произведение матриц переноса T_1 и T_2:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx_1 & Ty_1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx_2 & Ty_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx_1 + Tx_2 & Ty_1 + Ty_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получили результирующий перенос равным (Tx_1+Tx_2, Ty_1+Ty_2), т.е. суммарный перенос, вычисленный как произведение матриц, как и ожидалось, аддитивен.

Свойства матриц переноса

1. $T(0,0) = I$
2. $T(s_x, s_y) \cdot T(t_x, t_y) = T(s_x + t_x, s_y + t_y)$
3. $T(s_x, s_y) \cdot T(t_x, t_y) = T(t_x, t_y) \cdot T(s_x, s_y)$
4. $\mathrm{T}^{-1}(s_x, s_y) = T(-s_x, -s_y)$

Матрицы переноса коммутативны.

Композиция двумерных преобразований

<u>Последовательное выполнение сдвигов</u>

Рассмотрим последовательное выполнение масштабирований, первое с коэффициентами (Sx_1, Sy_1), второе с коэффициентами (Sx_2, Sy_2). Следует ожидать, что суммарное масштабирование будет мультипликативным. Обозначая через S_1 и S_2 матрицы масштабирования, аналогично преобразованию перемещения получим:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 \cdot S_1; \ \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \cdot S_2 = (\mathbf{P}_0 \cdot S_1) \cdot S_2) = \mathbf{P}_0 \cdot (S_1 \cdot S_2) = \mathbf{P}_0 \cdot S.$$

Композиция двумерных преобразований

Значения элементов матрицы S:

$$S = \begin{bmatrix} Sx_1 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx_1 * Sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_1 * Sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, результирующее масштабирование есть (Sx_1*Sx_2, Sy_1*Sy_2), , т.е. суммарное масштабирование, вычисленное как произведение матриц, как и ожидалось, мультипликативно.

Аналогичным образом доказывается и аддитивность двух последовательных поворотов.

Свойства матриц поворота

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для матриц поворота:

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta).$$

Матрицы поворота ортогональны, т.е.:

$$R^{-1}(\theta) = R^{T}(\theta)$$

Свойства матриц поворота

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R^T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos-\theta & -\sin-\theta & 0 \\ \sin-\theta & \cos-\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства матриц поворота

$$R(0) = I$$

$$R(\theta) \cdot R(\phi) = R(\theta + \phi)$$

и

$$R(\theta) \cdot R(\phi) = R(\phi) \cdot R(\theta)$$

только если центры вращения совпадают,

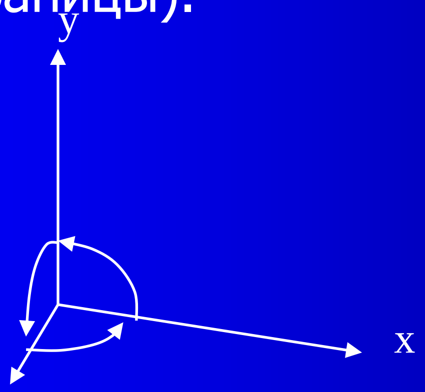
в иных случаях порядок матриц имеет значение.

Однородные координаты 3D

Аналогично, рассматривая применение однородных координат для векторов трехмерного пространства, можно представить трехмерное пространство как проекцию четырехмерного пространства на гиперплоскость w=1 , если:

$$(x, y, z) \to (wx, wy, wz, w) = (x, y, z, 1)$$

В курсе используется правая система координат (ось OZ выходит из страницы).



z (выходит из страницы)

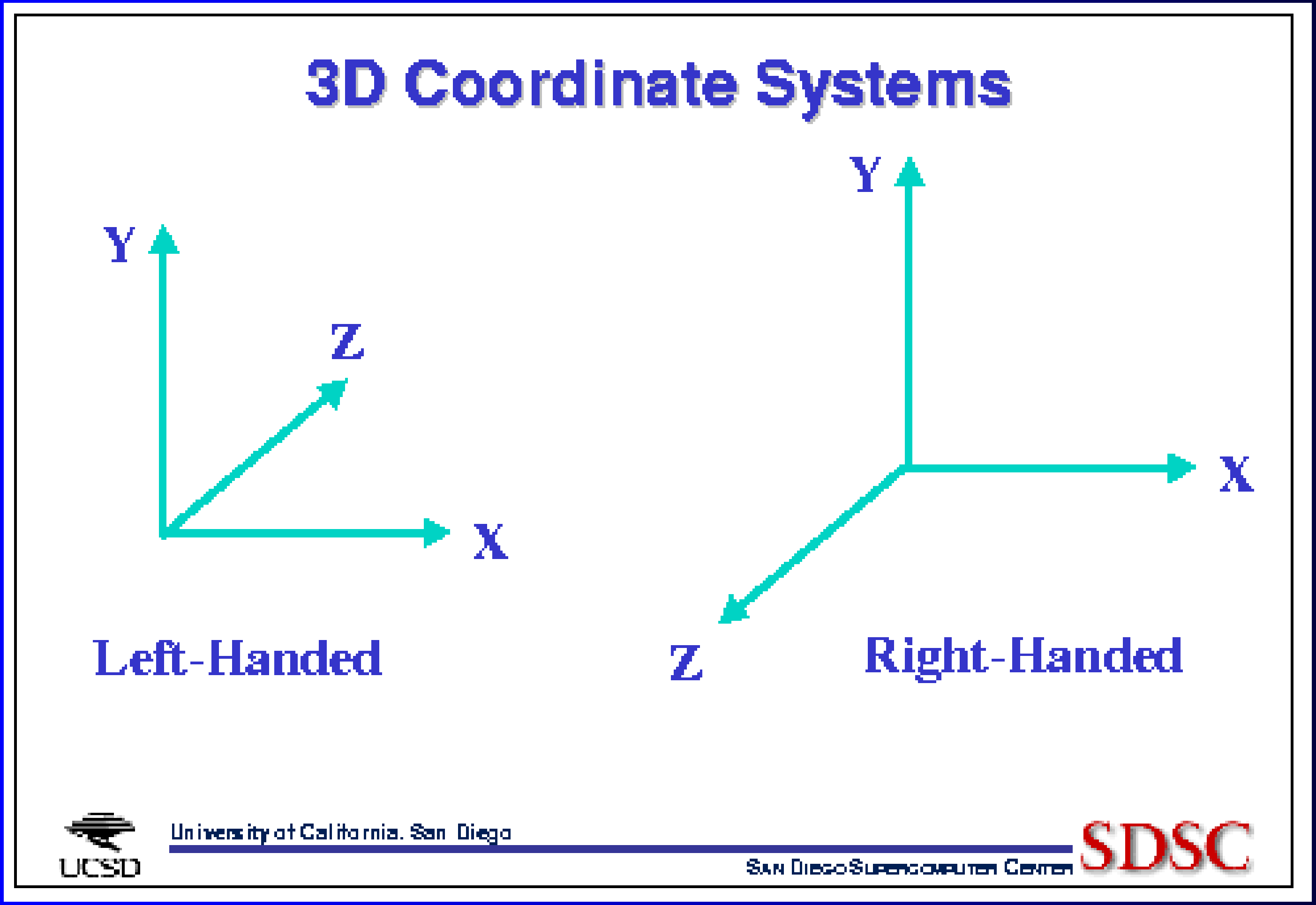
Примечание:
В МГ часто используется и левая система координат - ось OZ уходит в глубь дисплея!!!

Перевод из правой системы координат в левую

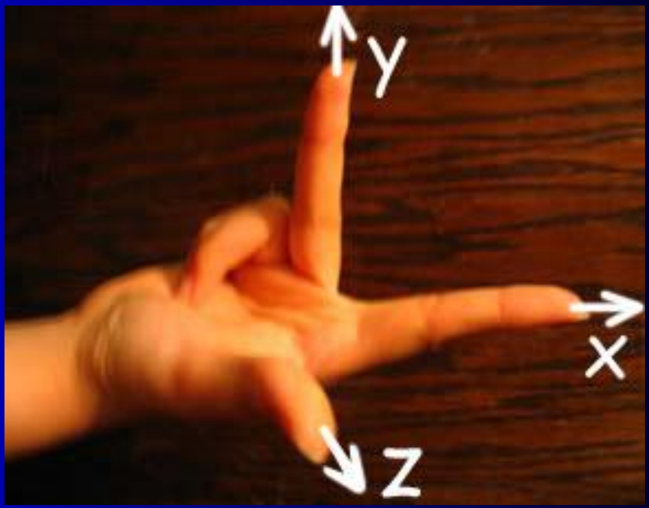
Преобразование от одной системы координат в другую производится достаточно просто – изменением знака (направления) оси OZ.

$$M_{R\leftarrow L} = M_{L\leftarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Правая и левая системы координат



Правая и левая системы координат



Левая

Правая

Однородные координаты (вектора и точки)

В общем смысле вектора не несут информации о положении, они в первую очередь предназначены для представления информации о направлении. Поэтому в однородных координатах для записи векторов используется *w = 0*, в то время, как для записи точек используется *w = 1*:

$$\vec{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n + 0$$

$$P = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n + P_o$$

- Примеры:

$$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.3 \\ 2.2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.3 \\ 2.2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Точки　　　　　　Вектора

Однородные координаты (вектора и точки)

В данном случае 1 или 0 показывают, принимает ли начало координат участие в вычислениях. Это согласуется с представлением о том, что вектор - это точка, бесконечно удаленная в некотором направлении (т.е. с w=0 в однородных координатах).

Покоординатные операции с векторами сохраняют однородную форму записи координат:

- Разность двух точек (x, y, z, 1) и (d,e,f,1) равна (x–d, y–e,z–f,0), т.е. как и ожидалось, является вектором.
- Сумма точки (x, y, z, 1) и вектора (d,e,f,0) равна другой точке (x+d, y+e, z+f, 1).
- Два вектора можно складывать, в результате получается вектор (d, e,f, 0) + (m, n, r, 0) = (d + m, e + n, f + r, 0)
- Имеет смысл масштабирование вектора 3(d, e, f, 0) = (3f, 3f, 3f, 0)
- Имеет смысл создание любой линейной комбинации векторов.

Перенос в 3D

Матрица переноса в 3D однородных координатах
(формат для вектор-столбцов):

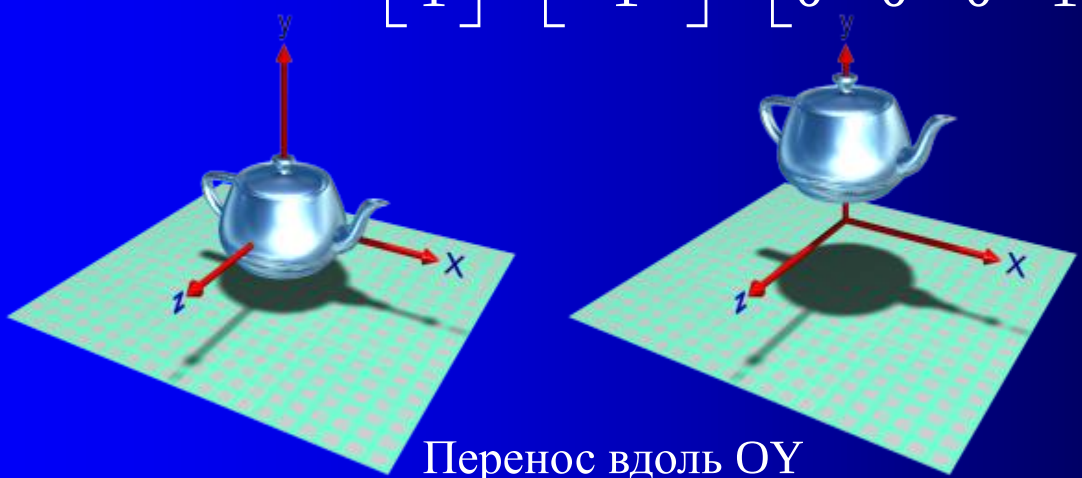
$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перенос в 3D

Перенос применяется *только к точкам* и *никогда* не применяется к векторам.

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$
$$z' = z + c$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Перенос вдоль OY

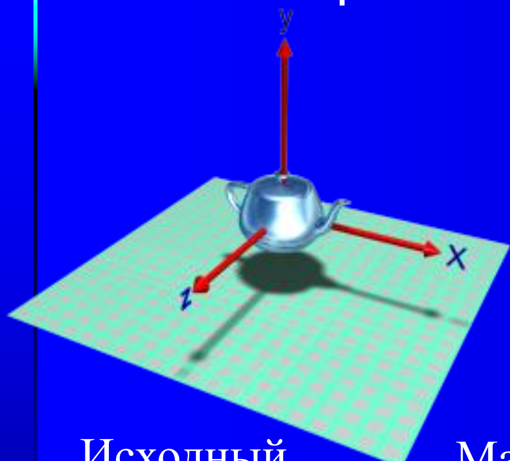
Масштабирование в 3D

Матрица масштабирования в 3D однородных координатах:

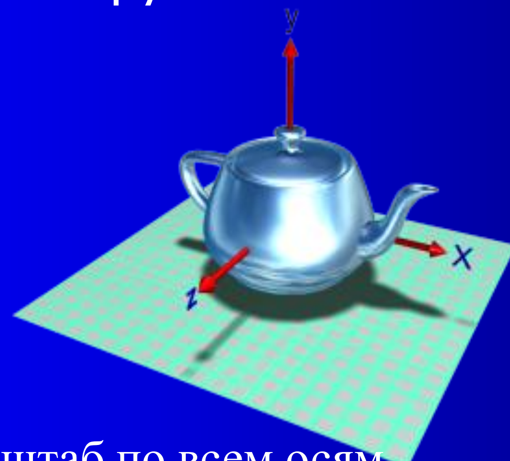
$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Масштабирование 3D

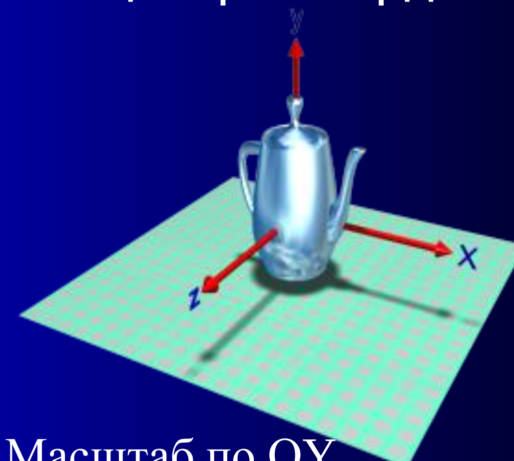
Все вектора масштабируются относительно центра координат:



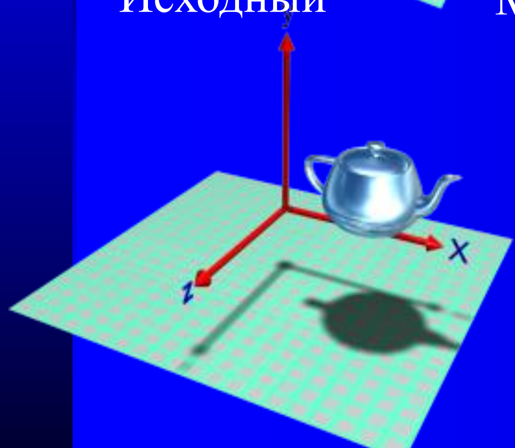
Исходный



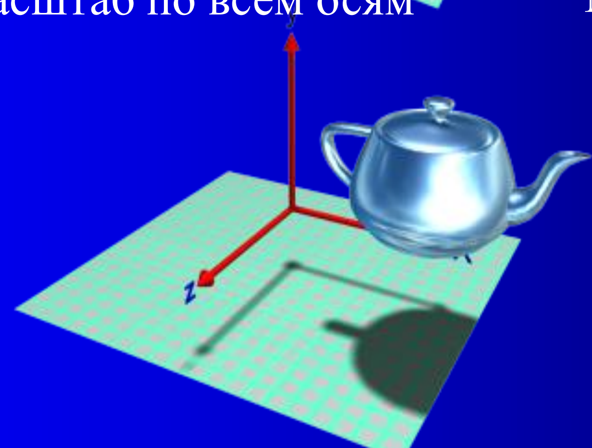
Масштаб по всем осям



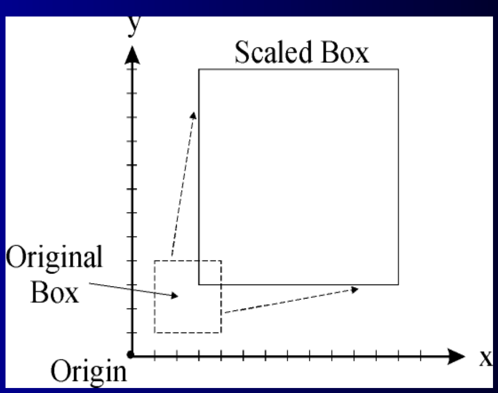
Масштаб по OY



Отступ от центра коорд.



Отступ масштабируется так же



Поворот в 3D

Поворот зависит от оси координат, относительно которой он производится.

Матрица поворота относительно оси OZ-аналогична 2D случаю:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот в 3D

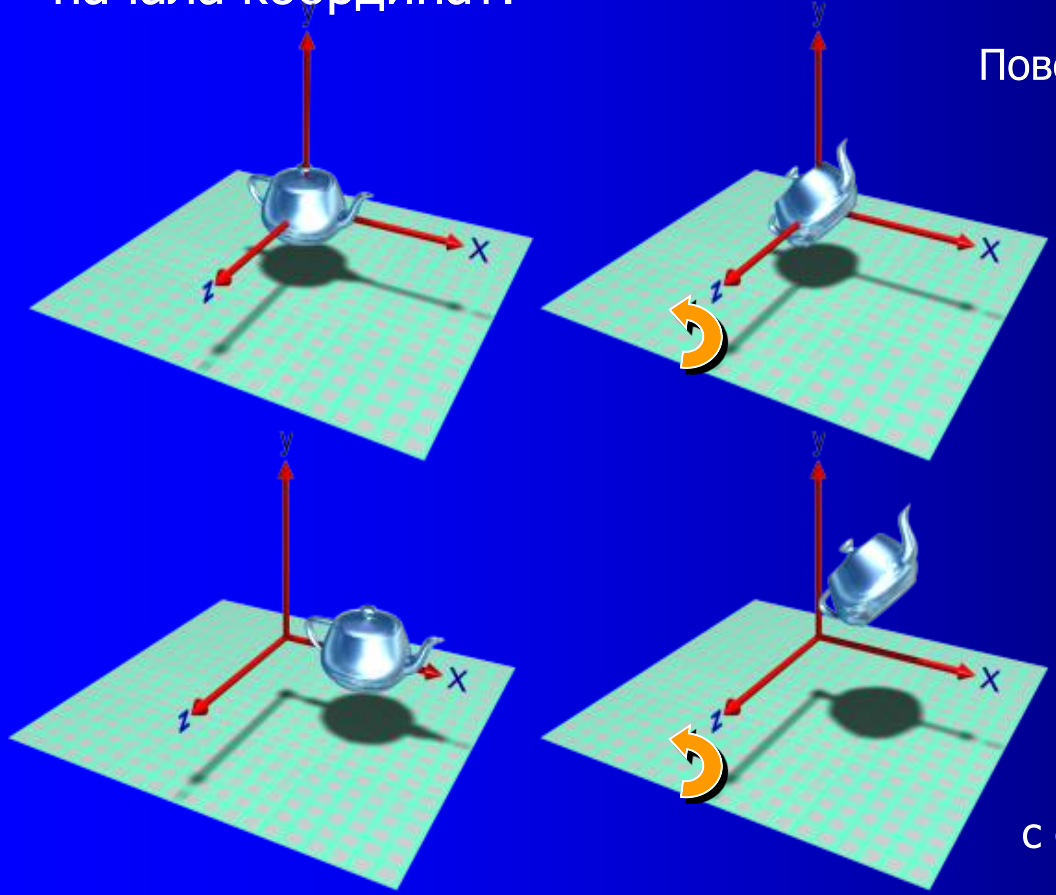
Матрицы поворота относительно осей OX и OY:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

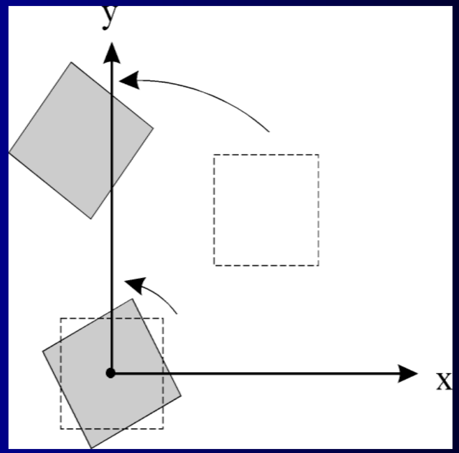
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот в 3D

Поворот осуществляется против часовой стрелки относительно начала координат:



Поворот на 45^o относительно OZ



с отступом от центра поворота

Углы Эйлера (Euler angles)

- *Углы Эйлера* представляют углы поворота относительно координатных осей для того, что бы получить требуемую ориентацию в пространстве (θ_x, θ_y, θ_z)

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\theta_x)\,\mathbf{R}(\theta_y)\,\mathbf{R}(\theta_z)$$

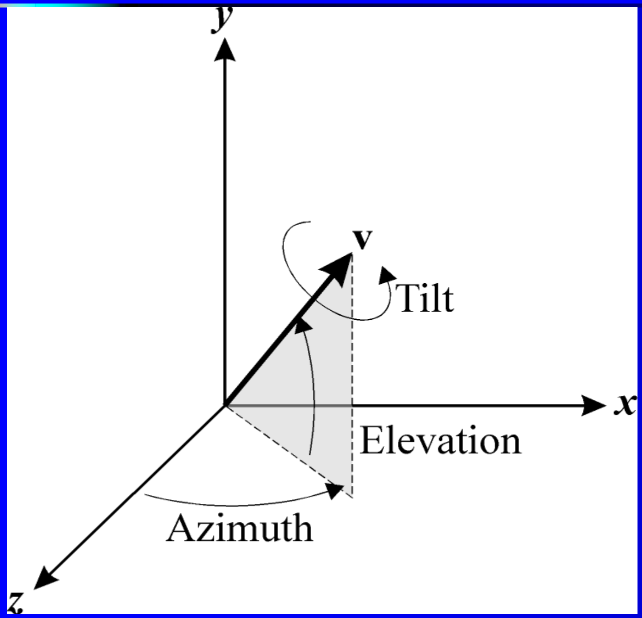
- Итоговая матрица:
- Любой необходимый поворот может быть представлен (*хотя и не единственным способом*) композицией 3-х поворотов относительно осей координат.
- Следует помнить, что поворот *не коммутативен* $\Rightarrow$ порядок важен!
- Таким образом,«углы Эйлера» - это комбинация (композиция) вращений вокруг базовых осей.

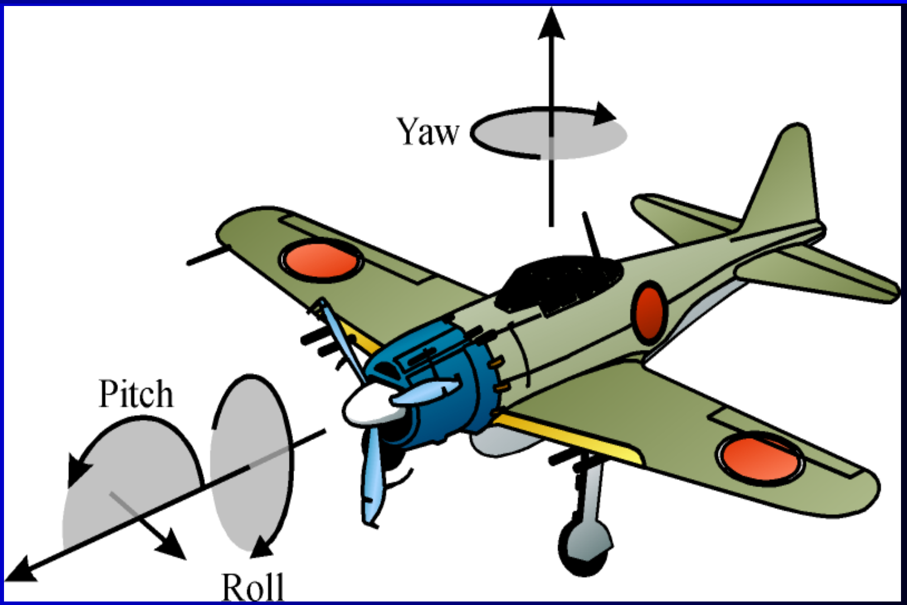
Углы Эйлера (Euler angles)

- Существует еще один, «смешанный», способ задания вращения. Этот способ можно назвать «вращение вокруг произвольной фиксированной оси».
- Такие вращения имеют 3 степени свободы (*degrees of freedom* -DOF):
  - 2 координаты для определения сферических углов, определяющих положение произвольной оси
  - 1 координата для вращения относительно данной оси.

- Три компоненты описывающие вращение образуют вектор, лежащий на оси, вокруг которой и поворачивается объект. Обычно хранят ось вращения в виде единичного вектора и угол поворота вокруг этой оси в радианах или градусах (Axis Angle). Выбрав подходящую ось и угол можно задать любую ориентацию объекта. В некоторых случаях удобно хранить угол вращения и ось в одном векторе. Направление вектора в этом случае совпадает с направлением оси вращения, а длина его равна углу поворота. В физике, таким образом, хранят угловую скорость. Вектор, совпадающий направлением с осью вращения и длиной представляющей скорость в радианах в секунду.

Способы задания поворота





Способы - смешанный (слева) и углы Эйлера (справа).
В аэродинамике углы Эйлера называют Крен, Тангаж, и Курс (рысканье) (Roll, Pitch, Yaw или Bank, Heading, Attitude). Крен (Roll) — это наклон головы вправо или влево (к плечам), поворот вокруг оси проходящей через нос и затылок. Тангаж (Pitch) — это наклон головы вверх и вниз, вокруг оси проходящей через уши. Курс (или рысканье) (Yaw) — это повороты головы вокруг шеи.

Сдвиг в 3D

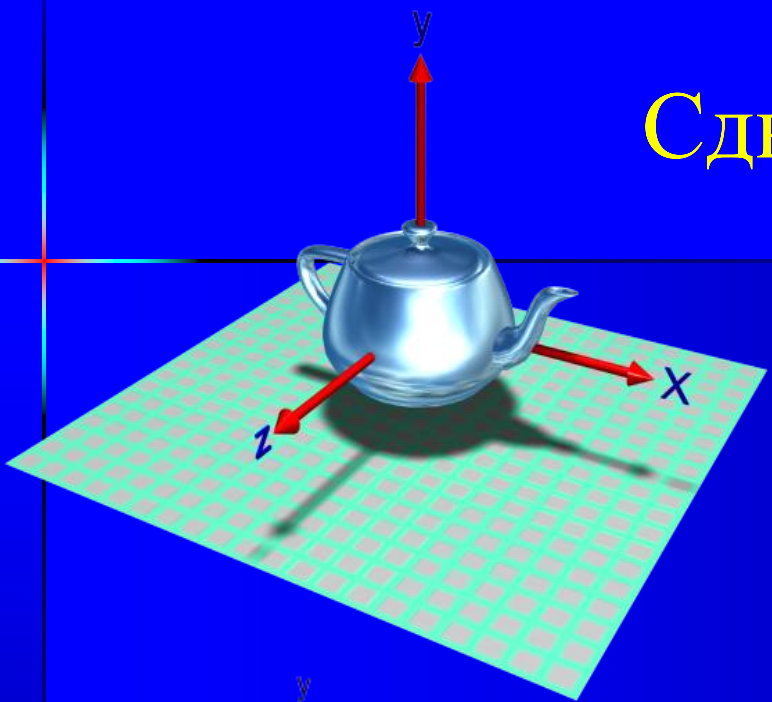
В трёхмерном пространстве сдвиг производится *вдоль* одной оси *в соответствии* с другой осью

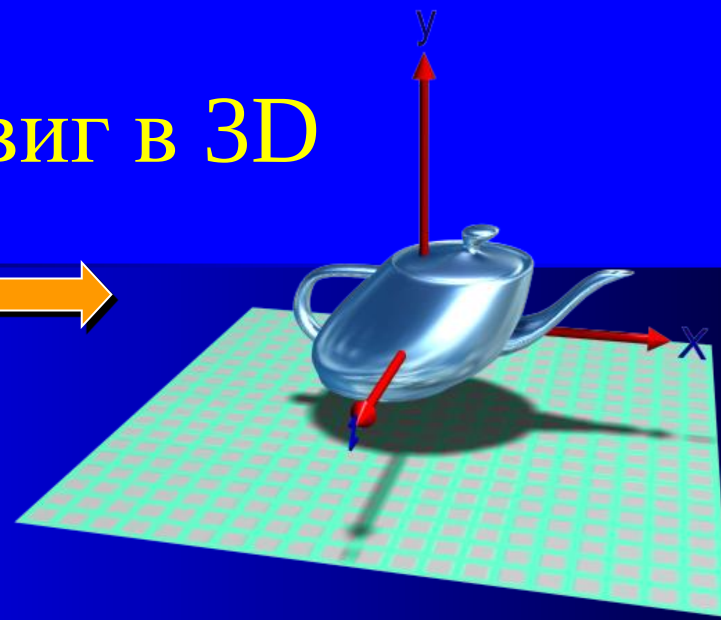
- Сдвиг вдоль OX сохраняет значения *y* and *z*
- Сдвиг вдоль OY сохраняет значения x and *z*
- Сдвиг вдоль OZ сохраняет значения *x* and *y*

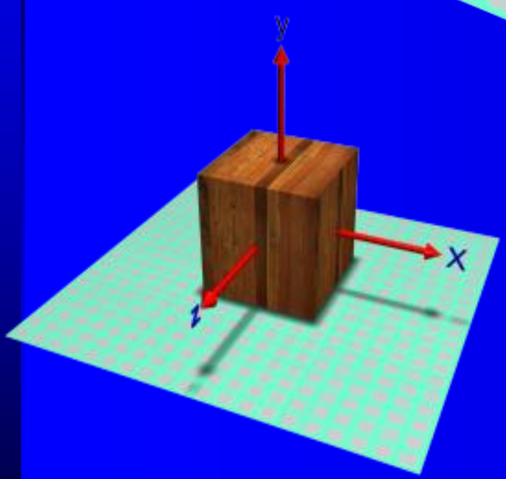
- Сдвиг точки вдоль оси сдвига пропорционален координате данной точки по другой оси (той, в соответствии с которой производится сдвиг).
- Пример: сдвиг вдоль OX (в соответствии с OY)

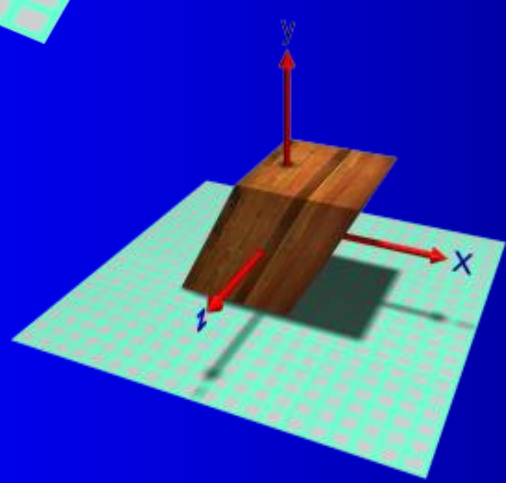
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

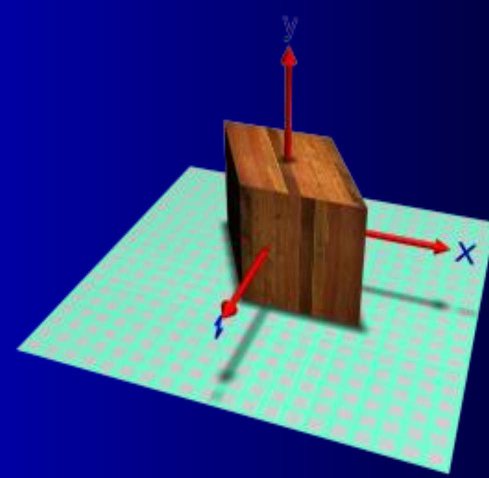
Сдвиг в 3D











исходное

Сдвиг вдоль OX (по OY)

Сдвиг вдоль OX (по OZ)

Композиция преобразований 3D

- Более сложные преобразования могут быть получены путём *конкатенации* или *композиции* отдельных преобразований.

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{T} = \mathbf{TRST} \qquad \mathbf{v}' = \mathbf{T}\left[\mathbf{R}\left[\mathbf{S}\left[\mathbf{T}\mathbf{v}\right]\right]\right] = \mathbf{Mv}$$

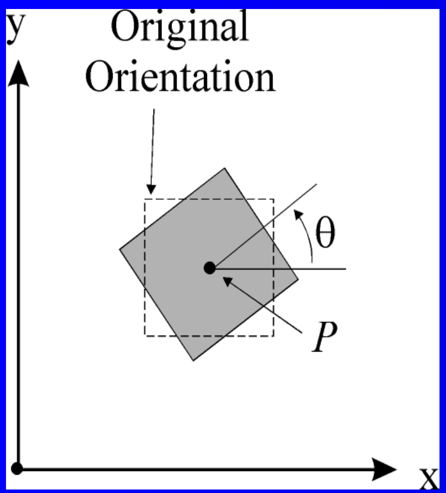
- Матрица преобразований *не коммутативна* $\Rightarrow$ **порядок очень важен!** (**order is vital)**

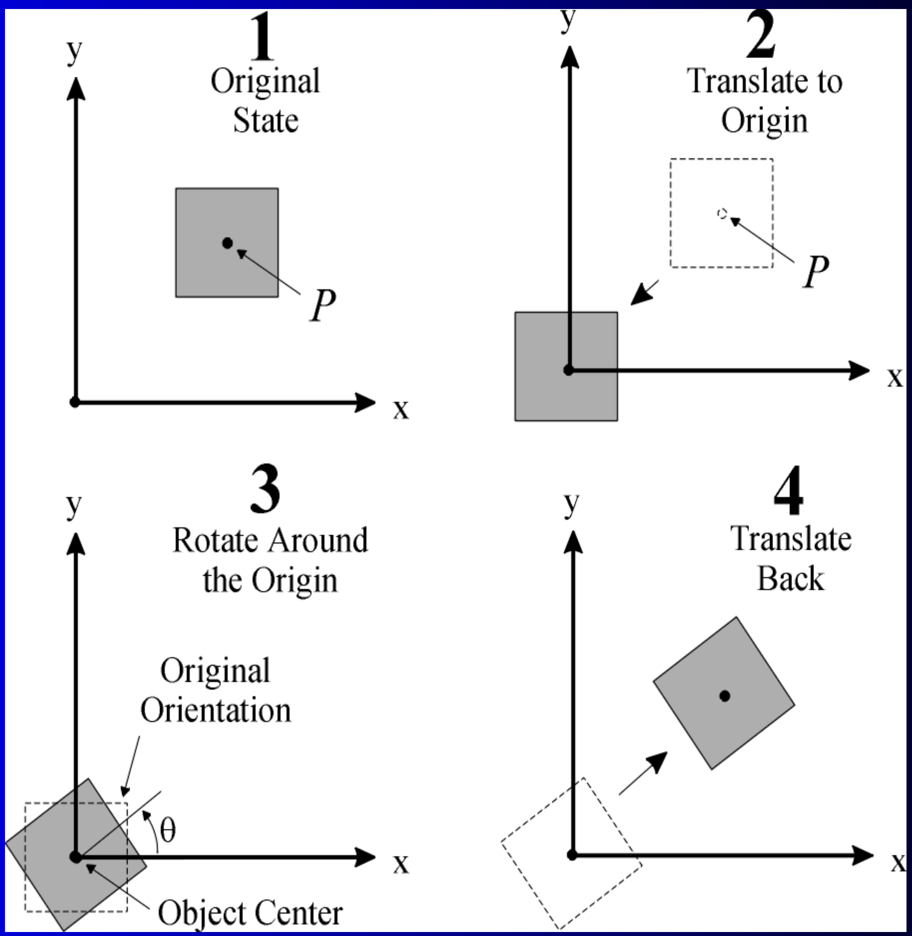
Пример – поворот относительно точки P_R:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}\left(P_R\right)\mathbf{R}\left(\theta\right)\mathbf{T}\left(-P_R\right)$$

= *перенос центра координат, поворот относительно центра координат, возврат к старой системе координат*

Композиция преобразований 3D





Композиция преобразований 3D

Поворот в плоскости XY на θ градусов против часовой стрелки относительно точки P:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(P)\,\mathbf{R}(\theta)\,\mathbf{T}(-P)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -P_x \\ 0 & 1 & 0 & -P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & P_x - P_x\cos\theta + P_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & P_y - P_x\sin\theta - P_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Общий вид матрицы 3D преобразований

Матрица преобразования для трёхмерных однородных координат в общем случае имеет вид:

$$2D - \begin{bmatrix} A & B & P \\ D & E & Q \\ L & M & S \end{bmatrix} \qquad 3D - \left[\begin{array}{ccc:c} A & B & C & P \\ D & E & F & Q \\ G & H & I & R \\ \hdashline L & M & N & S \end{array}\right]$$

где подматрица [A – I] отвечает за поворот в 3D пространстве, а так же определяет изменения масштаба и сдвиг,

L - N определяют перенос. Элемент S определяет общее изменение масштаба, а элементы P, Q, R определяют перспективные искажения.

(матрица приведена в формате для вектора строки!!!)