Машинная графика
Computer Graphics

Лекция 10

«Проекции»

План лекции

- Классификация проекций
- Центральные проекции
- Параллельные проекции
- Ортогональные проекции
- Аксонометрия
- Прямоугольные и косоугольные проекции

Проекции

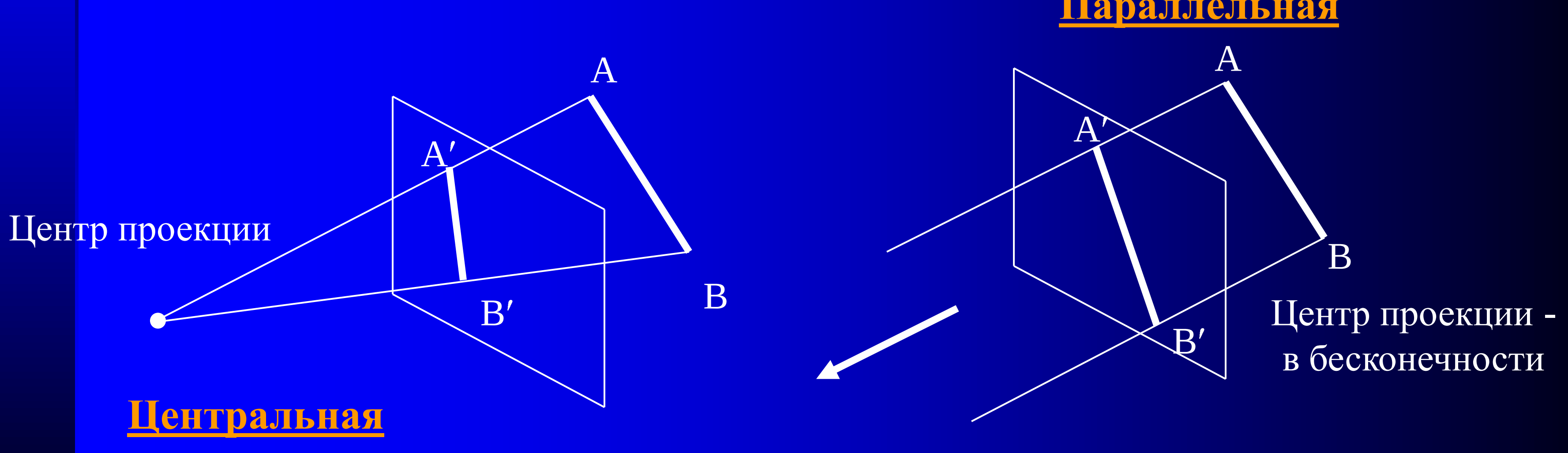
- Преобразование точек из координатной системы размерности *n* в точки в координатной системе размерности меньше *n*.
- Проекция строится с помощью прямых линий называемых *проекторами* либо *лучами проекции*.
- Проекторы исходят из *центра проекции проходят* через каждую точку объекта и пересекают *плоскость проекции* (в случае построения 2D проекции).

Проекции

- В графике мы оперируем только с плоскими проекциями – т.е. поверхность проекции есть плоскость.
  - Большинство камер в качестве плоскости проекции используют плёнку либо матрицу.
  - Однако… сетчатка глаза не плоская!
- Также в графике используют только геометрические проекции – те в которых проекторы являются прямыми лучами.
  - Однако в картографии используются многие проекции которые либо не являются плоскими, либо не являются геометрическими.
- Исключение – Image-based rendering.

Проекции

- Далее все под проекциями будем подразумевать только геометрические плоские 2D проекции.
- Два главных класса проекций :
  - Центральные (перспективные – Perspective).
  - Параллельные (Parallel).



Классификация проекций

ПРОЕКЦИИ

Параллельные проекции

Ортогональные

Аксонометрические

прямоугольные

- изометрия
- диметрия
- триметрия

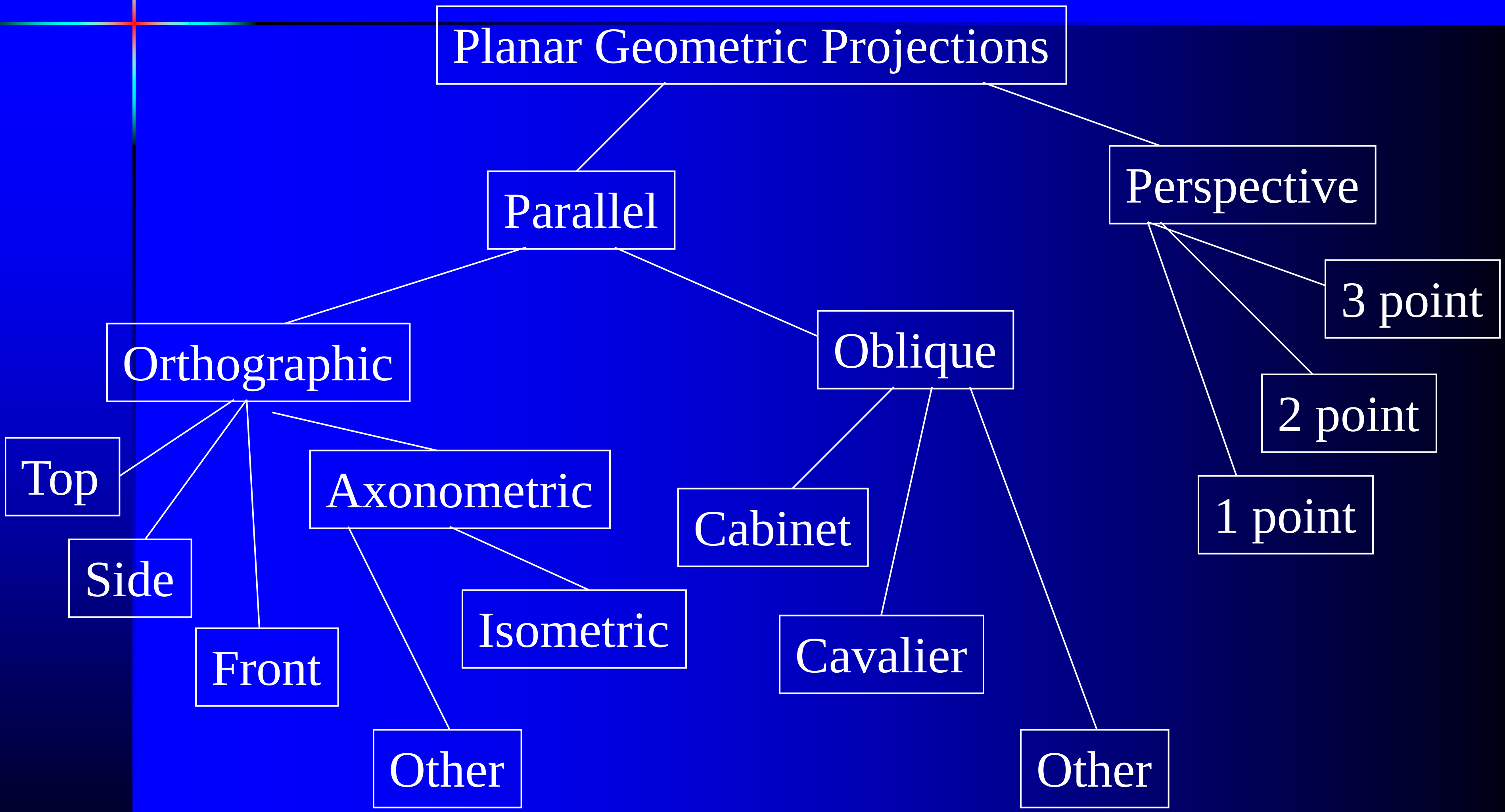
косоугольные

- изометрия (Cavalier)
- диметрия (Cabinet)

Центральные проекции

- одноточечные
- двухточечные
- трёхточечные

Классификация проекций
(у зарубежных коллег)



Центральные проекции

- Определяются плоскостью проекции и центром проекции.
- Визуальный эффект, называется перспективным искажением (*perspective foreshortening)* или просто *перспективой*.
  - Размер проекций объектов сцены варьируется обратно пропорционально расстоянию между объектом и центром проекции.
  - Изображение похоже на фото – смотрится реалистично!
- Центральная проекция не используется для измерений.
  - В целом, параллельные линии не являются параллельными в данной проекции.
  - Углы могут сохраняться только на плоскостях, параллельных плоскости проекции.
  - Расстояния не сохраняются.

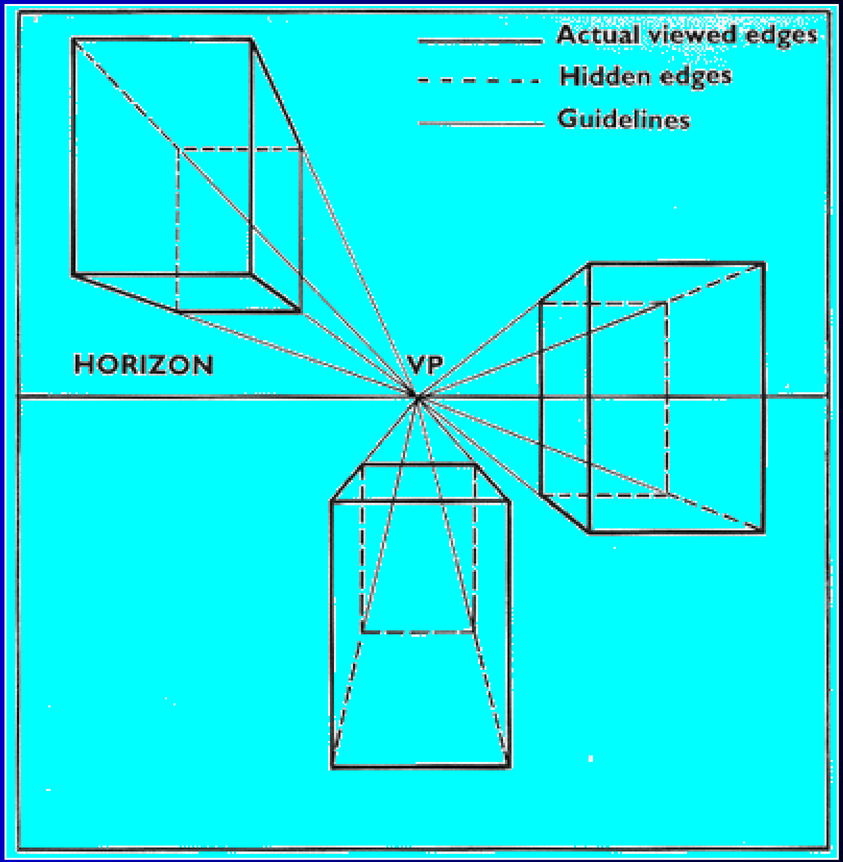
Перспектива - Perspective

Первое изображение с перспективой.

The first ever painting (*Trinity with the Virgin, St. John and Donors*) done in perspective by Masaccio, in 1427.

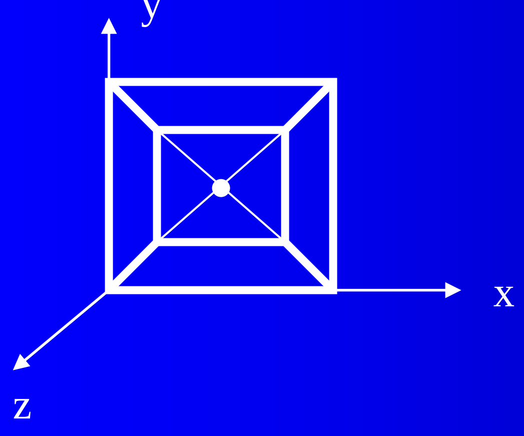
Центральные проекции

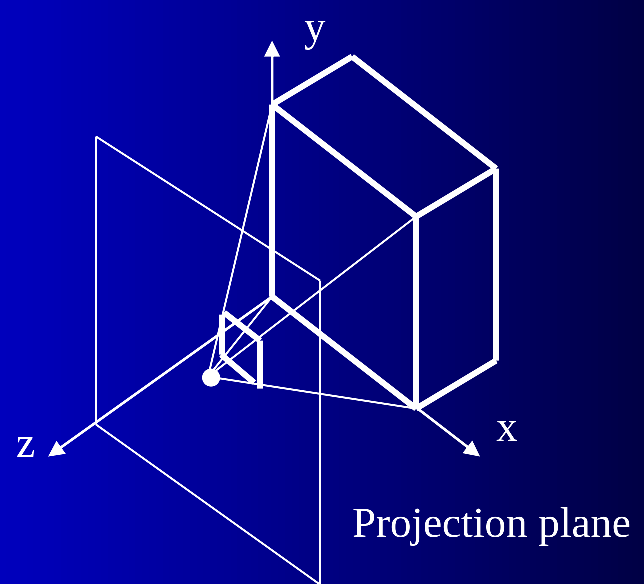
- Набор линий, не параллельных плоскости проекции, сходится в исчезающей точке (vanishing point).
- Может быть определена в 3D случае, как проекция точки бесконечности.
- В однородных координатах имеет w = 0 (x,y,0)



Центральные проекции (Perspective projections)

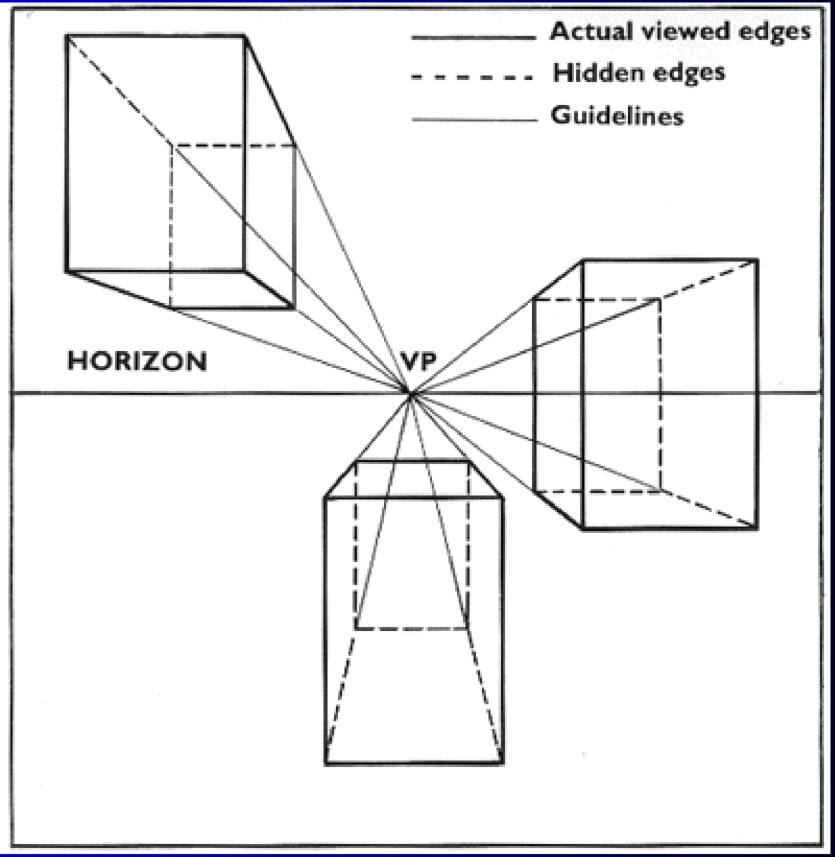
- Линии параллельны главной оси уходящей в исчезающую точку.
  - Центральные проекции классифицируют в зависимости от количества таких точек.
  - Количество осей пересекающих проекцию, так же соответствует количеству данных точек – центров проекции.





1-точечная проекция

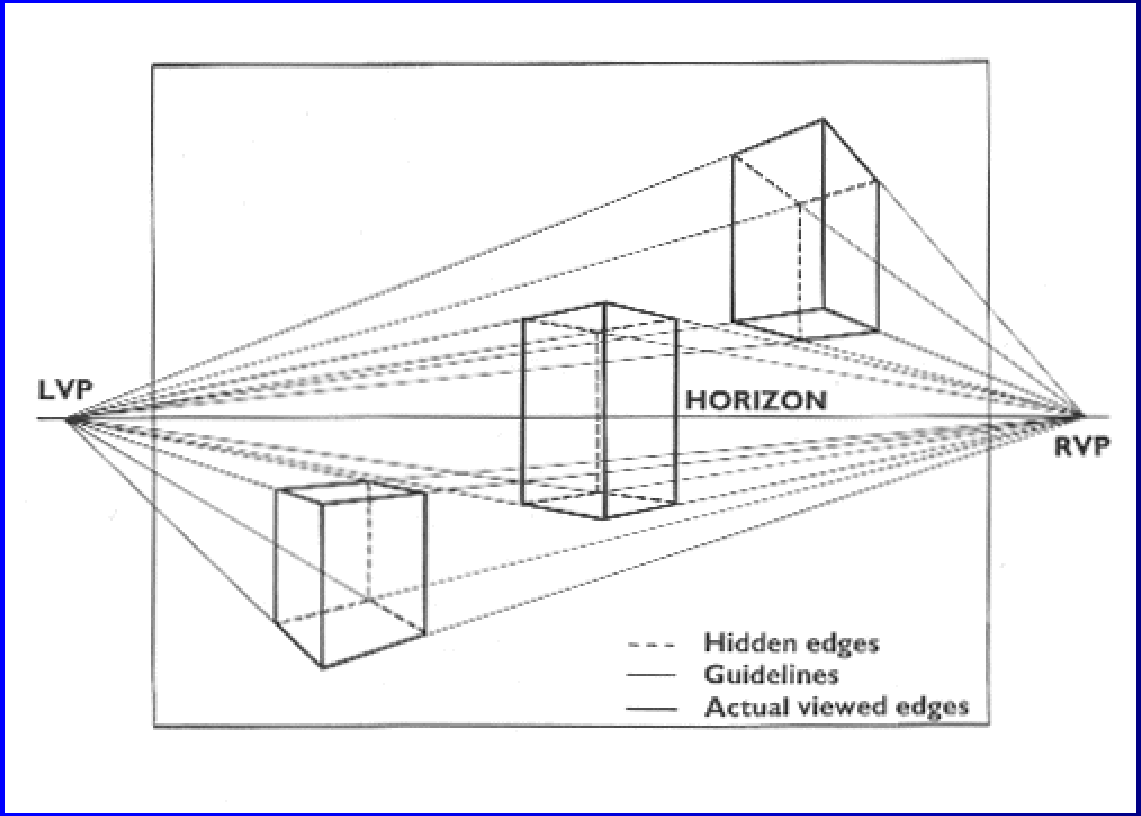
Плоскость проекции
пересекается
только с одной осью.

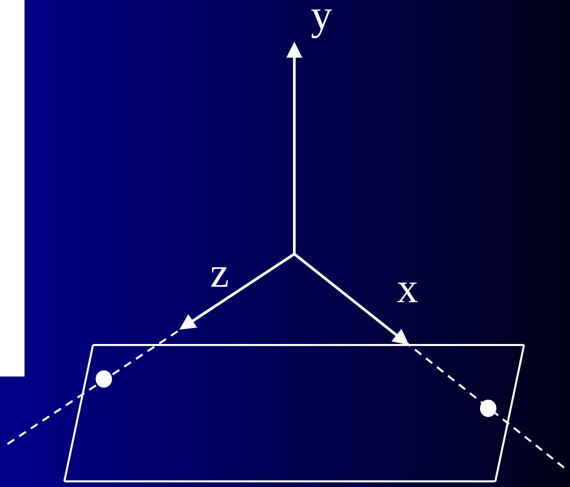


1-точечная проекция

A painting (*The Piazza of St. Mark, Venice*) done by Canaletto in 1735-45 in one-point perspective.

2-х точечная проекция

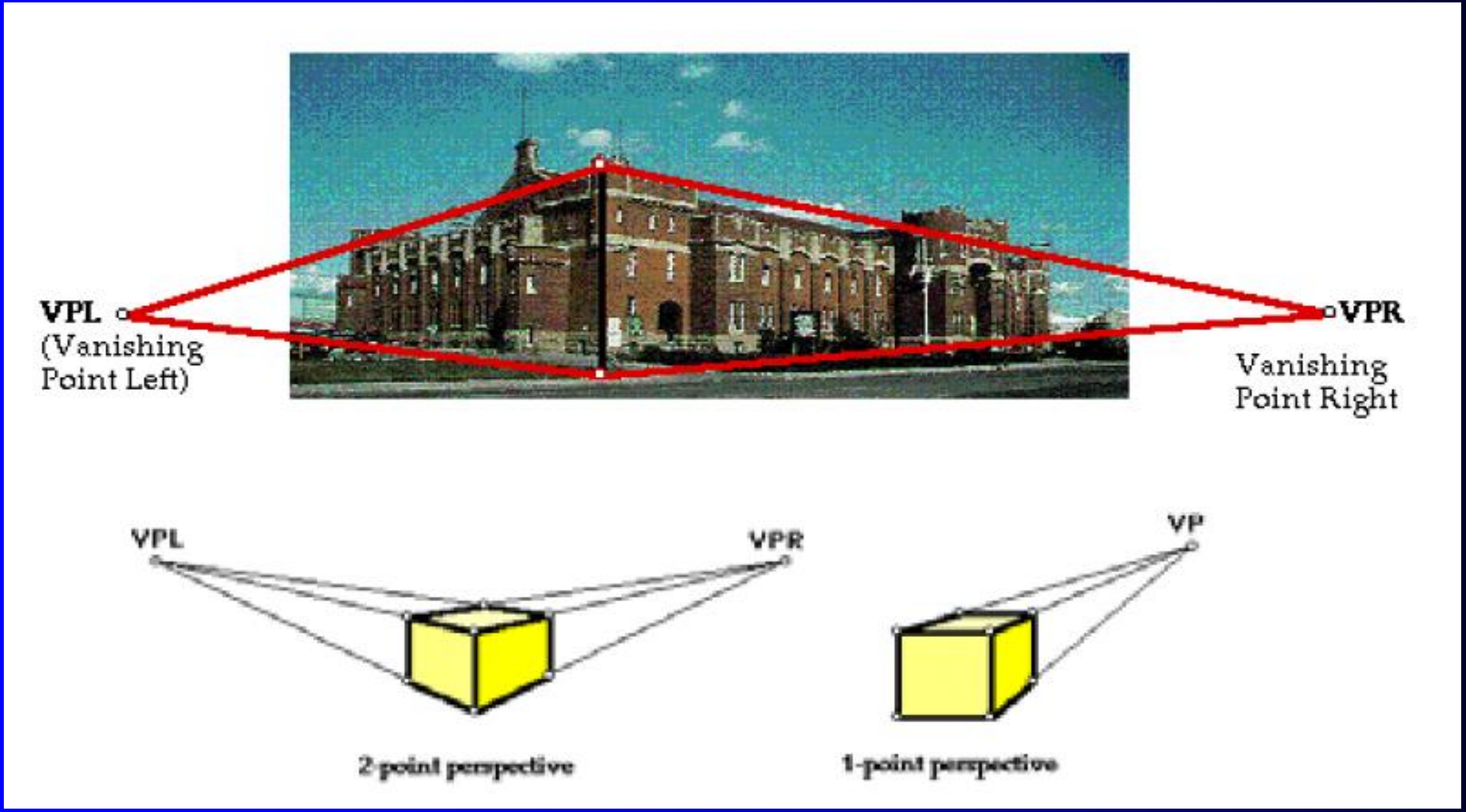




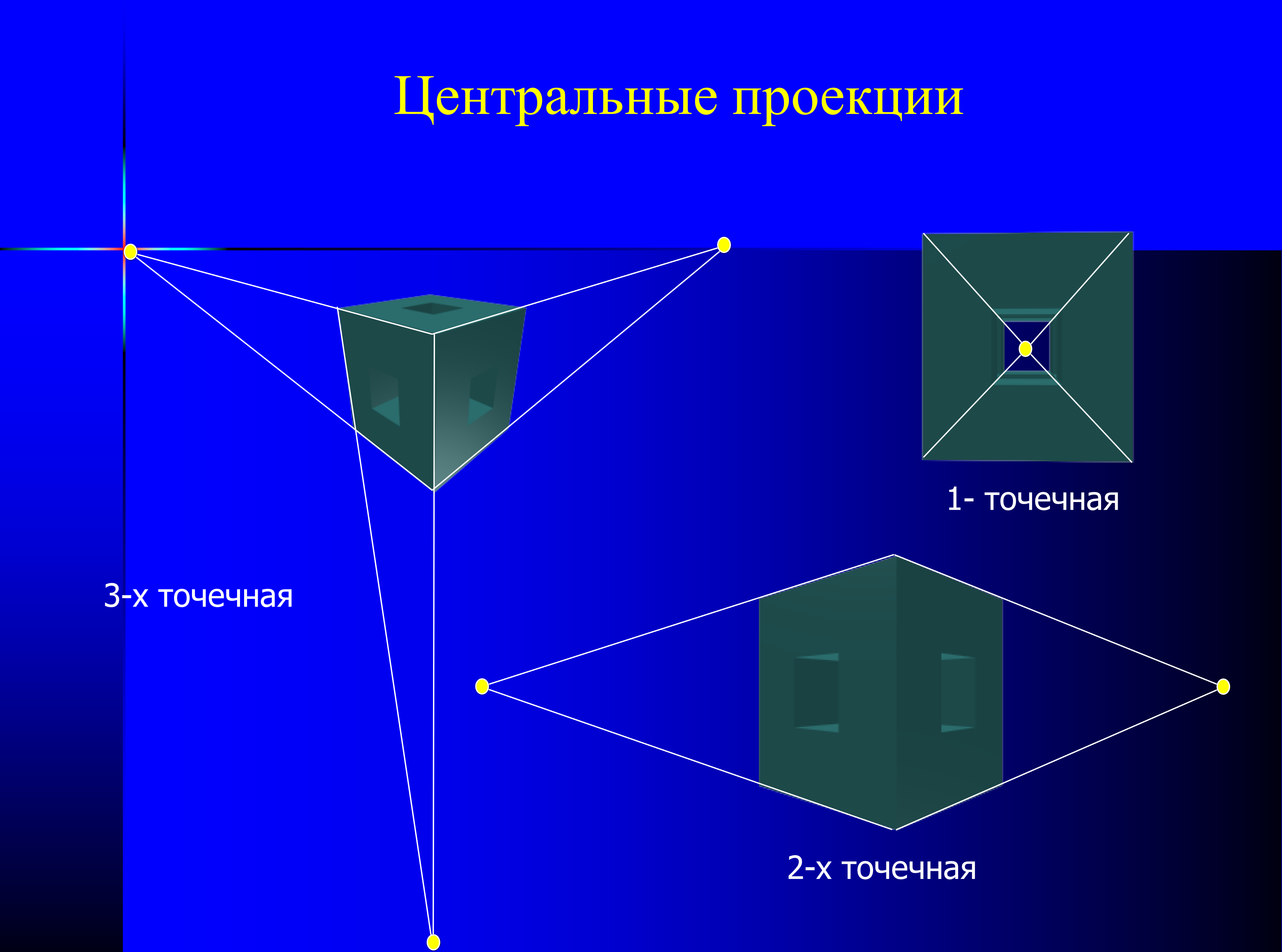
2-х точечная проекция

Painting in two point perspective by Edward Hopper
The Mansard Roof 1923 (240 Kb);
Watercolor on paper, 13 3/4 x 19 inches; The Brooklyn Museum, New York

2-х точечная проекция

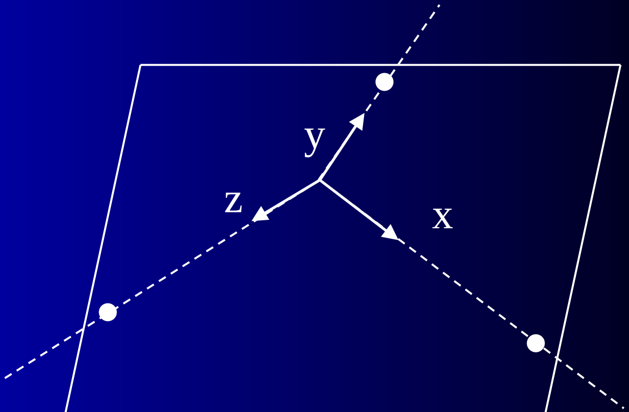


Центральные проекции



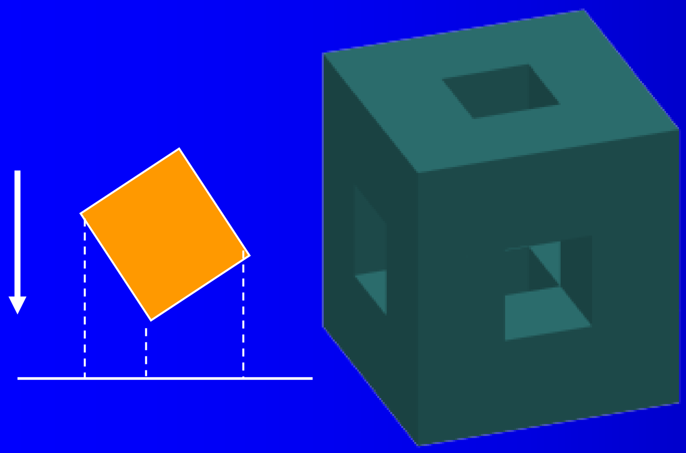
3-х точечная проекция

A painting (*City Night*, 1926) by Georgia O'Keefe, that is approximately in three-point perspective.

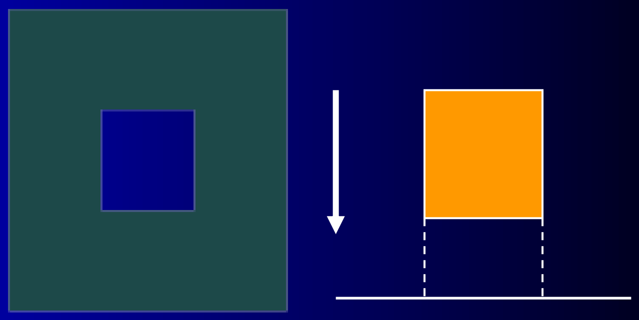


Плоскость проекции

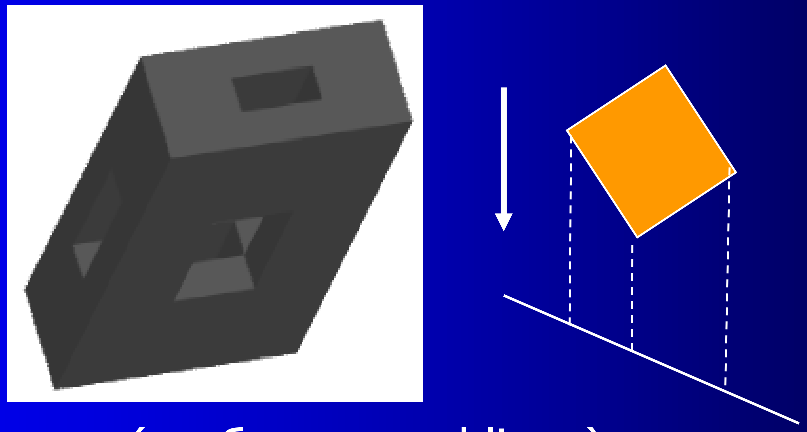
Параллельные проекции



Аксонометрическая (axonometric)



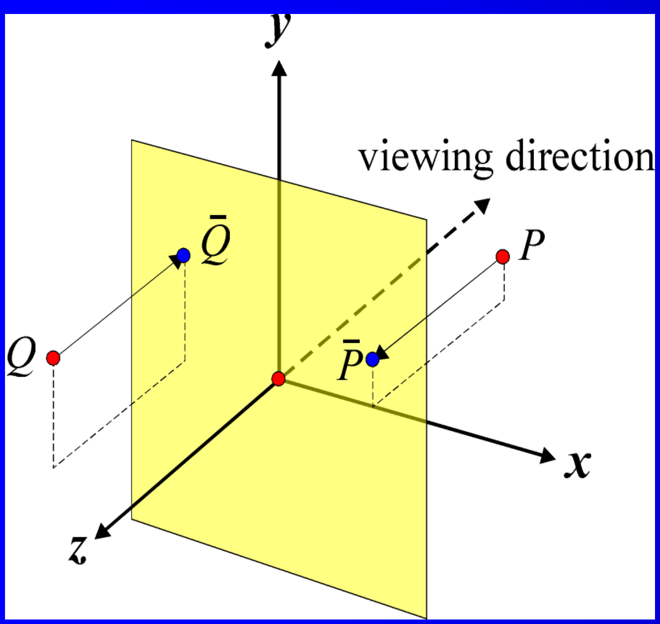
Ортогональная (orthographic)



Косоугольная (свободная – oblique)

Ортогональные проекции

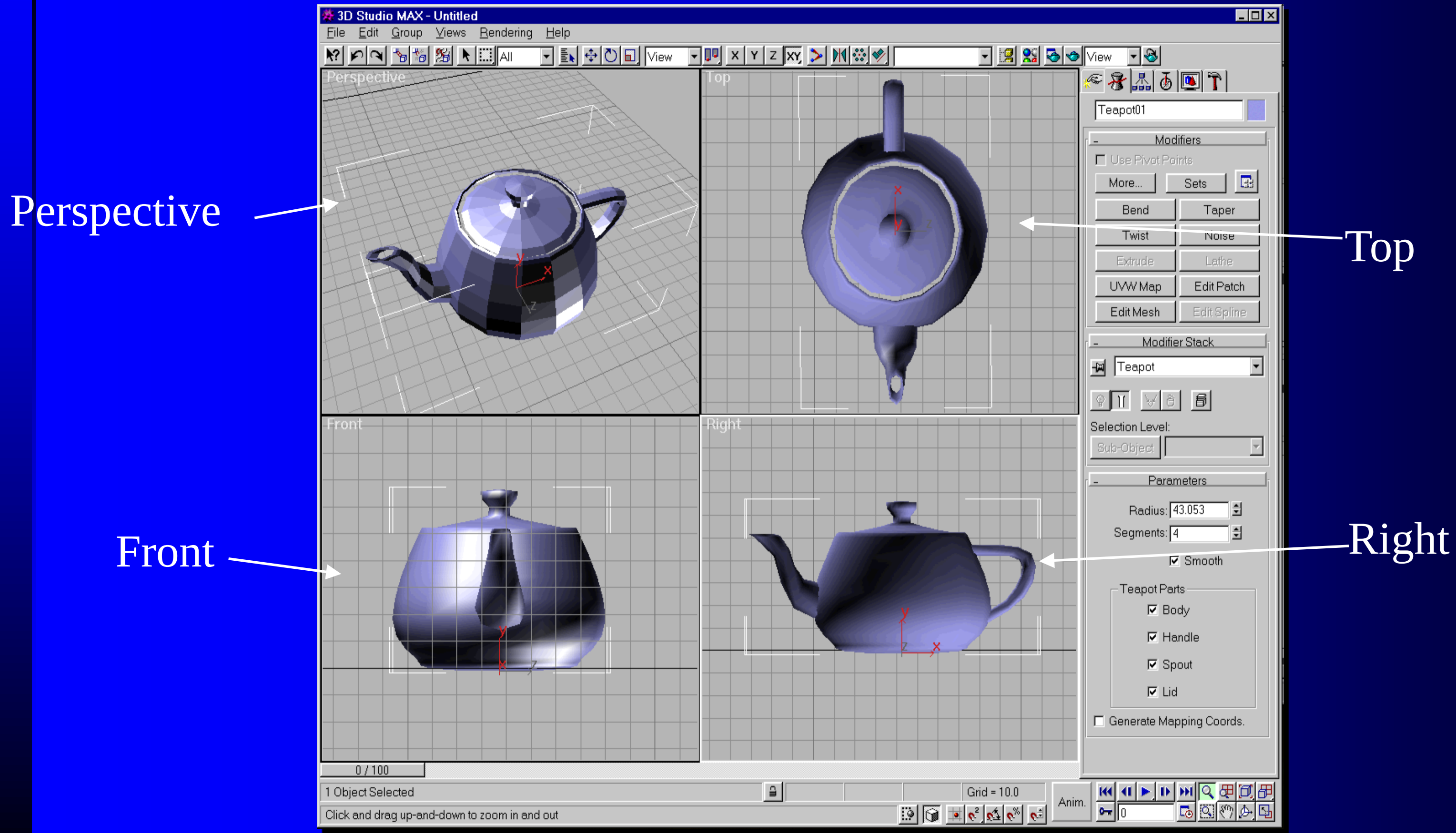
- Простейший случай среди всех проекций, строится параллельным проецированием на плоскость отображения.
- Обычно плоскость отображения двигается по одной из осей (чаще всего имеет координату *z=0*)



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{P} = \mathbf{M}P \text{ где } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

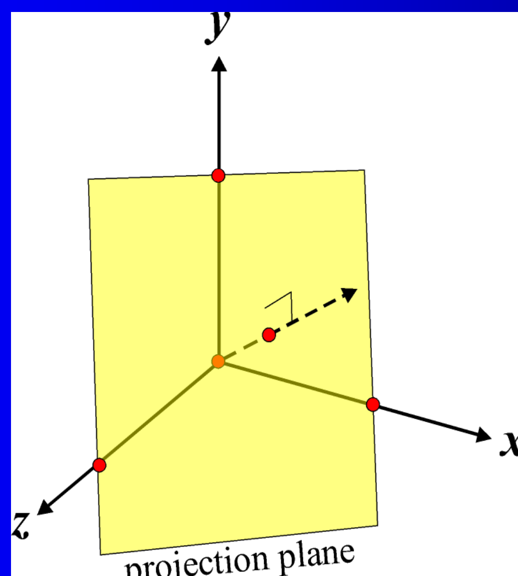
Множественные проекции (Multiple Projections)

- Ортогональные проекции часто используются для построения множественных проекций объекта
  - обычно: вид сверху (plan (top) view), фронтальный вид (front & left or right elevation (side) view) и вид слева.

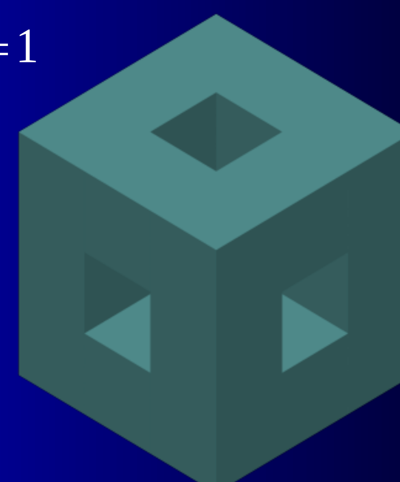


Аксонометрические проекции

- Результат является ортогональной проекцией, если одна из осей вырождается в точку, а две другие принадлежат (или параллельны) плоскости проекции. Иначе это – аксонометрическая (*axonometric)* проекция.
- Если плоскость проекции пересекает оси на одном расстоянии от центра координат, то эта проекция является изометрической (*isometric)*.



$$x + y + z = 1$$



Аксонометрические проекции

- Плоскость проекции не перпендикулярна ни одной из осей системы координат.
- Одновременно видны несколько поверхностей объекта.
- Параллельность линий сохраняется.
- Углы – не сохраняются.
- Расстояния могут измеряться по любой из осей (с учётом масштабирующих коэффициентов).

Аксонометрические проекции

Аксонометрические проекции бывают:

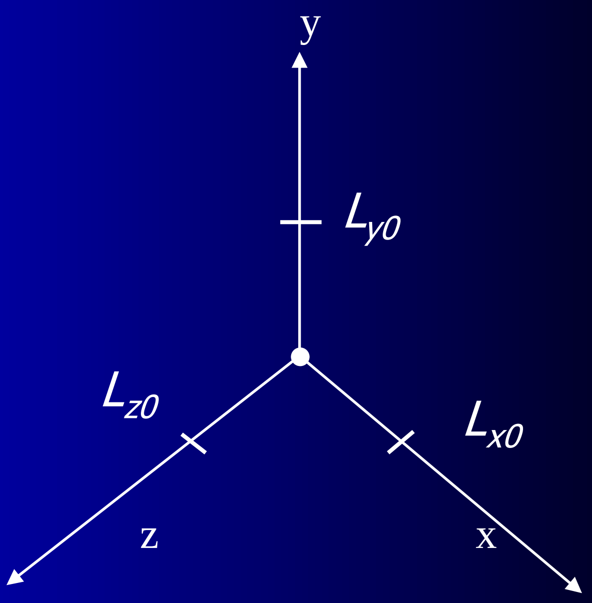
- прямоугольными (если при параллельном проецировании лучи перпендикулярны плоскости проекции)
- косоугольными (если лучи составляют с плоскостью проекции угол до 90)

Отношение единичных отрезков на аксонометрических осях к единичным отрезкам на координатных осях называется коэффициентом искажения (коэффициентом масштабирования) по аксонометрическим осям.

Аксонометрические проекции

Коэффициенты искажения:

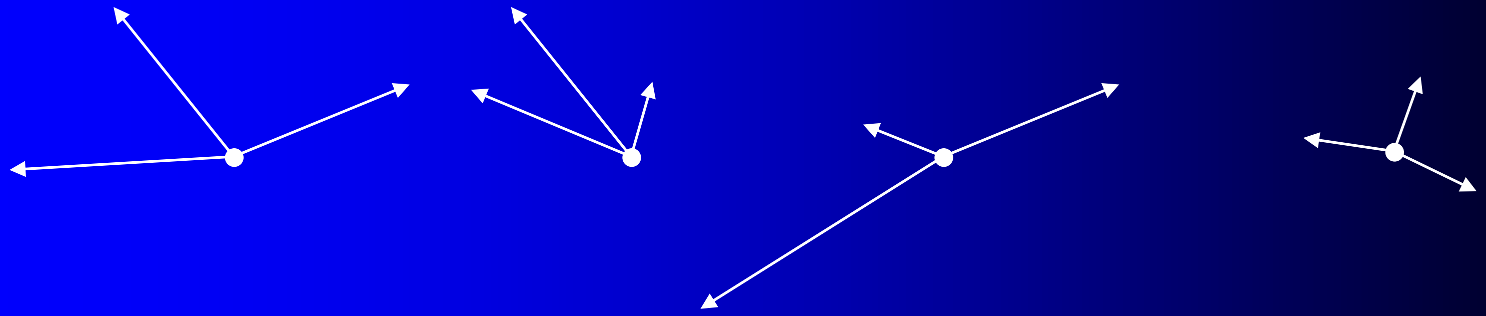
$K_x = L_{x0} / L_x = p,$
$K_y = L_{y0} / L_y = q,$
$K_z = L_{z0} / L_z = r,$



$\exists$ *множество вариантов аксонометрических проекций, отличающихся направлениями аксонометрических осей и величин искажения по данным осям.*

Теорема Польке

<u>Теорема:</u> «*3 отрезка произвольной длины, лежащие в 1-й плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу представляют собой параллельную проекцию 3-х равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала координат*».



Аксонометрические проекции

Если коэф. искажения по всем трём осям не равны $p \neq q \neq r$, то проекция называется *триметрической.*

Если коэф. искажения по двум осям равны $p = q$, то проекция называется *диметрической.*

Если коэф. искажения по всем трём осям равны $p = q = r$, то проекция является *изометрической.*

Наибольшее распространение в машиностроении получили следующие проекции: прямоугольная изометрия, прямоугольная диметрия ($p = r$, $q = 1/2p$), косоугольная фронтальная диметрия (все они стандартизироавны ГОСТом).

Изометрическая прямоугольная проекция

- Наиболее распространенный случай аксонометрических проекций.
- Нормаль плоскости проекции образует равные углы с каждой из координатных осей.
- Т.е. нормаль описывается вектором: (d_x, d_y, d_z), где $|d_x| = |d_y| = |d_z|$
- Соответственно, коэффициенты масштабирования по осям будут одинаковыми: $p = q = r$, т.е. Измерения можно проводить по всем осям с одинаковым коэффициентом – отсюда и название (изометрия).
- Существует всего 8 направлений, удовлетворяющих данным условиям.

Изометрическая прямоугольная проекция

$[O_0X]$, $[O_0Y]$, $[O_0Z]$ – отрезки на аксонометрических осях.

$$\frac{|0_\circ x|}{|0\,x|}=\cos\alpha=p \quad \frac{|0_\circ y|}{|0\,y|}=\cos\beta=q \quad \frac{|0_\circ z|}{|0\,z|}=\cos\gamma=r \quad (1)$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – дополнительные углы.

По теореме косинусов:

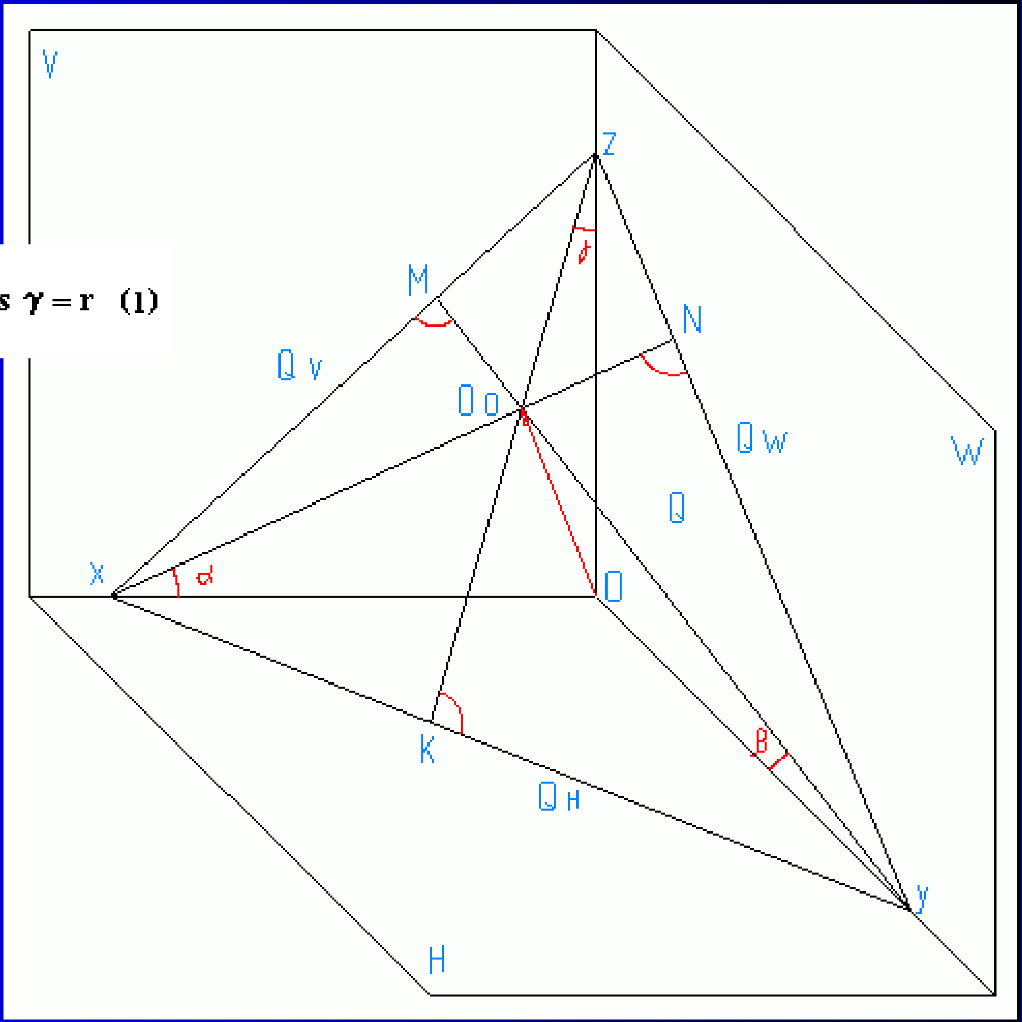
- $\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$

или

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta+1-\cos^2\gamma=1$



Изометрическая прямоугольная проекция

$[O_0X]$, $[O_0Y]$, $[O_0Z]$ – отрезки на аксонометрических осях.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

Таким образом, из соотношения 1 видно, что: **$p^2+q^2+r^2=2$**

Для прямоугольной аксонометрии сумма квадратов коэффициентов искажения равна 2.

Установим численные значения коэффициентов искажения для прямоугольных изометрии и диметрии.

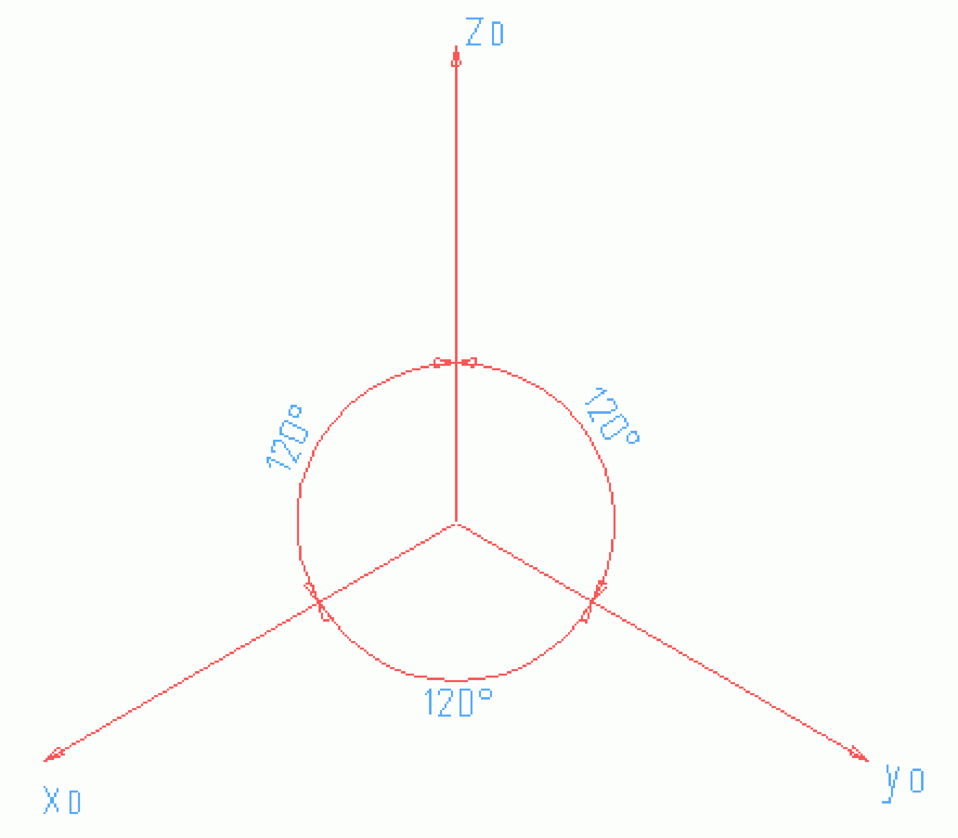
Для прямоугольной изометрии: p=q=r; 3p2=2; p=q=r==0.82

Для прямоугольной диметрии: p=r; q=0.5p; 2p2+p2/4=2; p=0.94; q=0.47

Изометрическая прямоугольная проекция

Угол между высотами в равностороннем треугольнике равен 120 .

Ось z принято располагать вертикально.



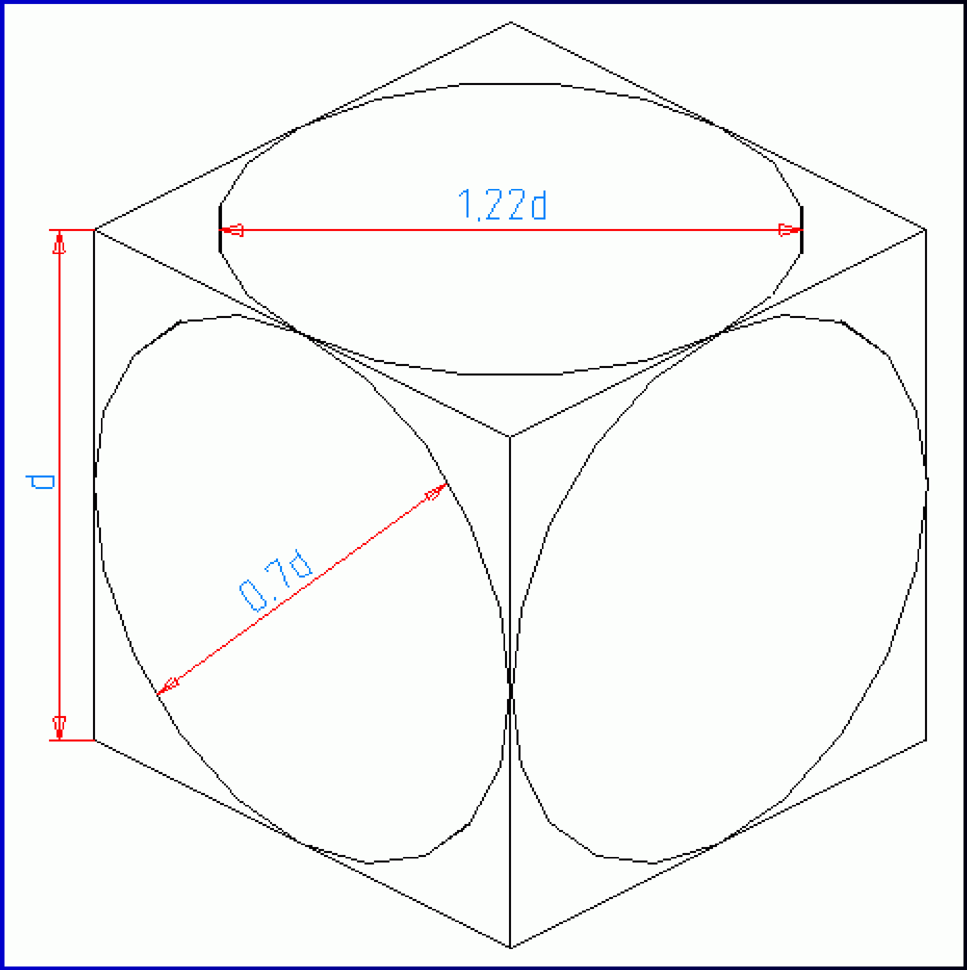
Изометрическая прямоугольная проекция

$p = r = q = 0.82$ (1)

Для простоты построений ГОСТ 2317-69 предлагает пользоваться приведёнными коэффициентами искажения:

$p = r = q = 1$ (2)

В этом случае получается не натуральная аксонометрическая проекция, а проекция, увеличенная в 1.22 раза



Диметрическая прямоугольная проекция

p=r=2q; [XY]≡ [YZ], следовательно, треугольник следов равнобедренный.

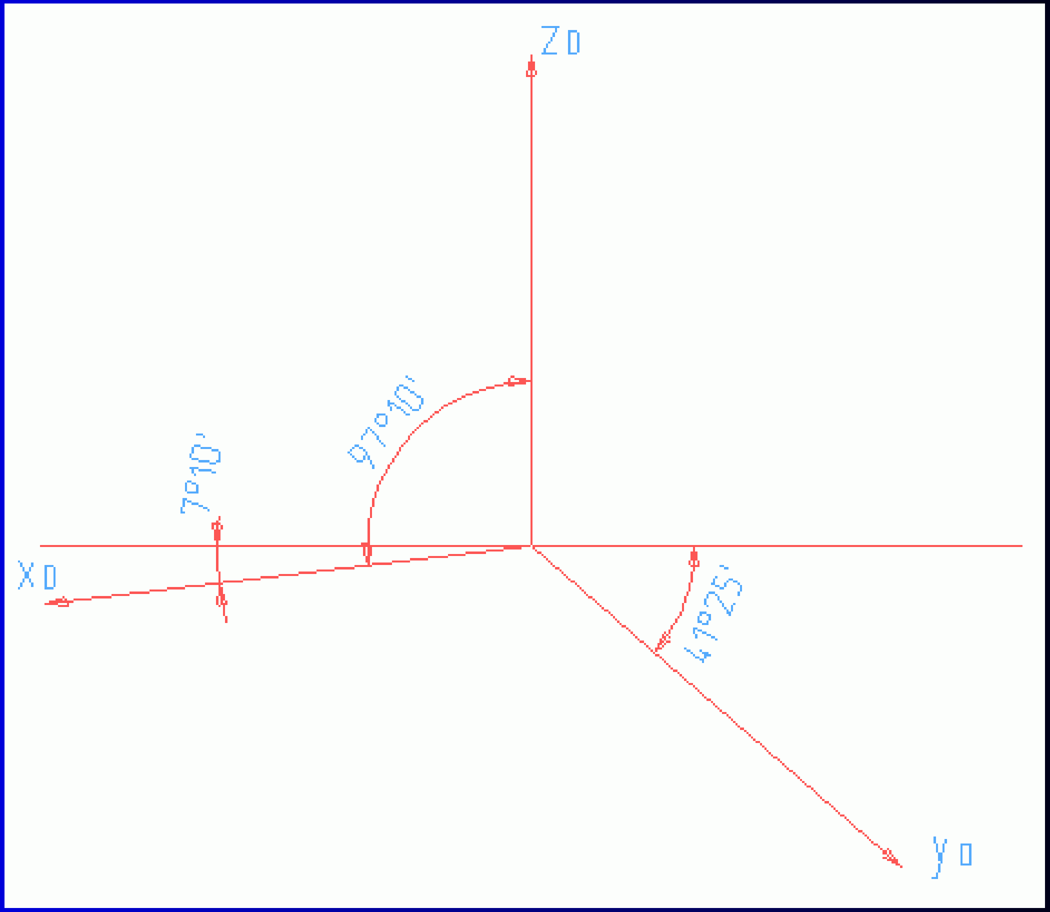
|OZ|=|OX|=1;
|XZ|=1.41; |XM|=0.71;
$|XO_0|$=p=0.94

sin(Θ/2)=0.75;

Θ =97°10';

tg7°10'=1/8;

tg 41°25'=7/8

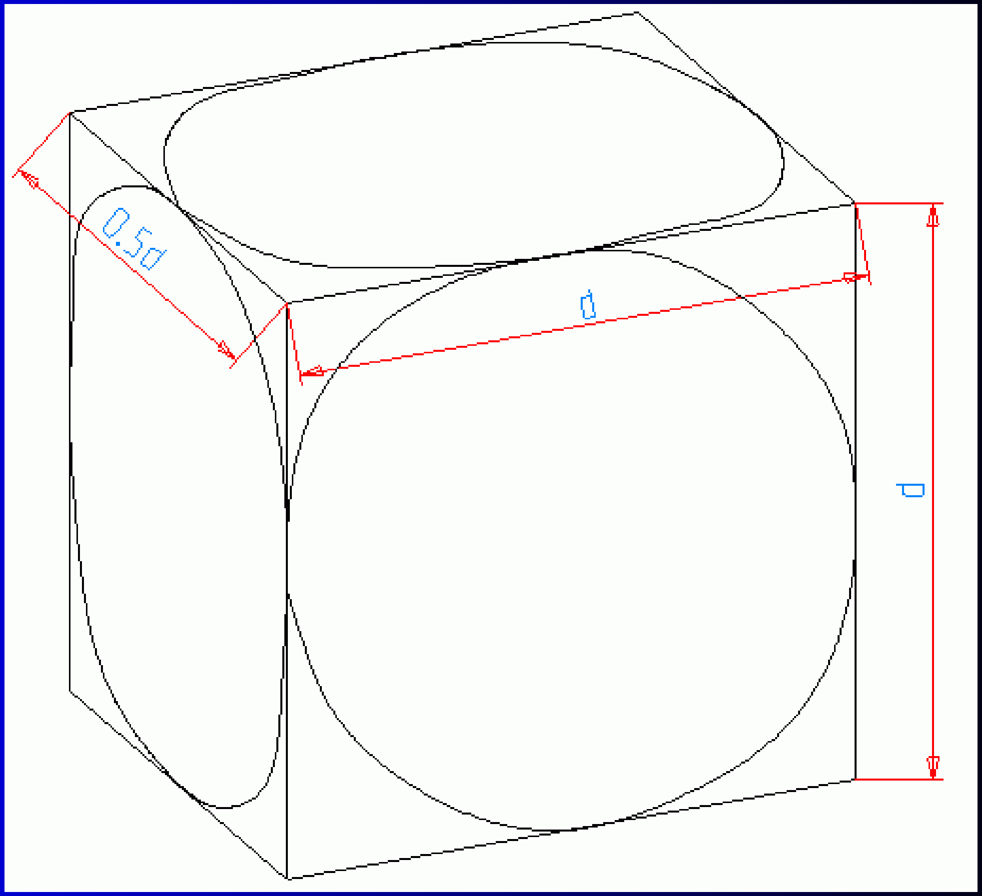


Диметрическая прямоугольная проекция

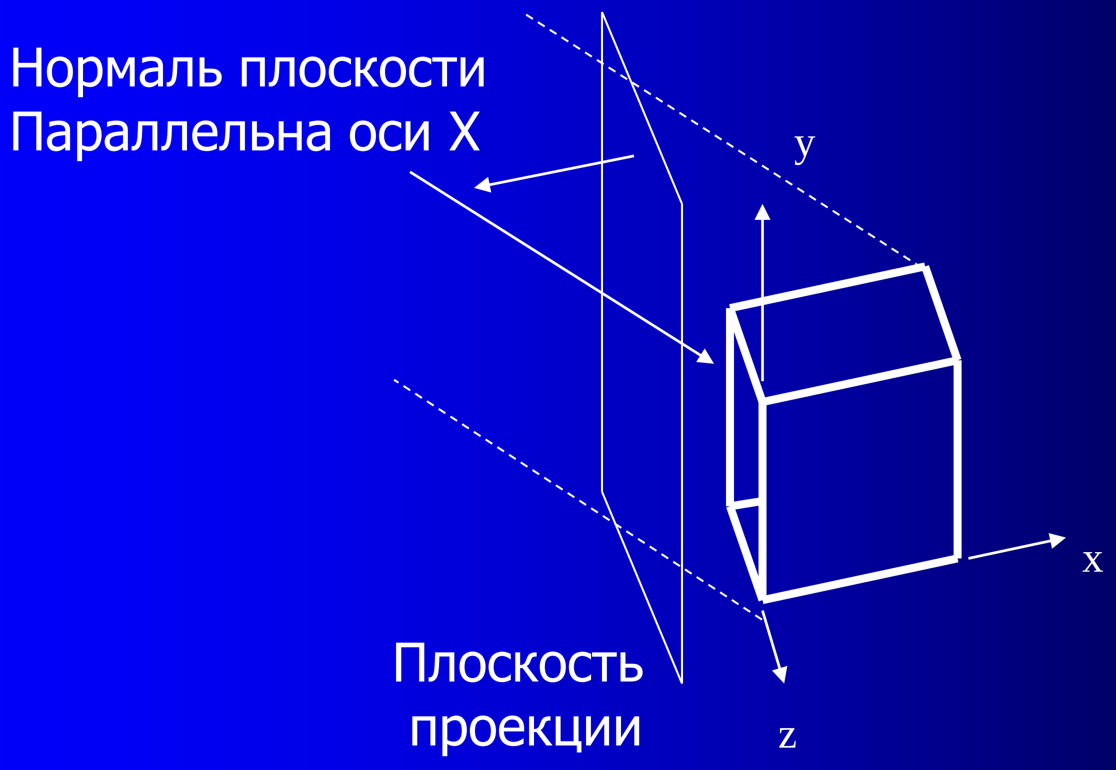
В 1 случае p = r = 0.94; q = 0.5p = 0.47

Во 2 случае p = r = 1; q = 0.5 (в соответствии с ГОСТом).

Во втором случае аксонометрическая проекция получается увеличенной по сравнению с натуральной величиной в 1.06 раза.



Косоугольные (oblique) проекции

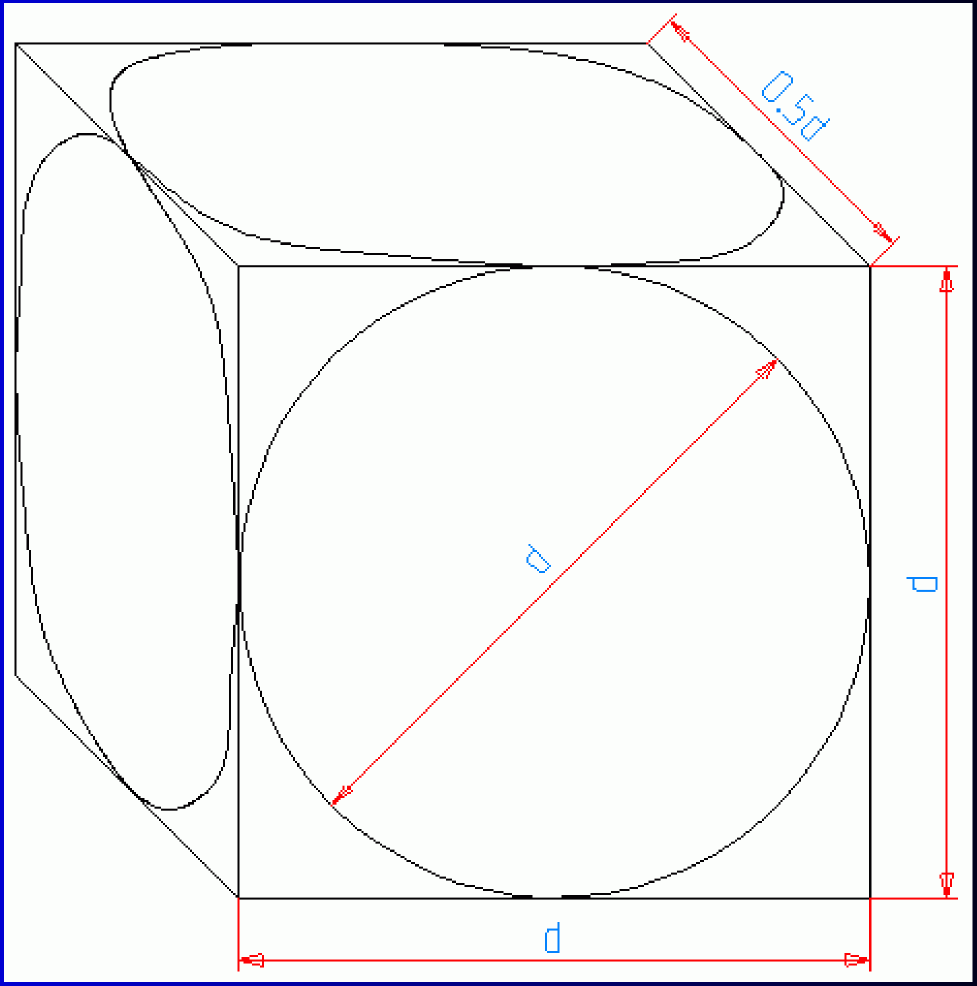


Косоугольная фронтальная диметрия (Cabinet)

p = r = 1.0; q = 0.5; $\beta = \gamma$ =135 ; α =90

Большая ось эллипса =1.06d;

Малая ось эллипса =0.35d в плоскостях H и W; в плоскости V - окружность. Эллипсы в плоскостях H и W конгруэнтны.

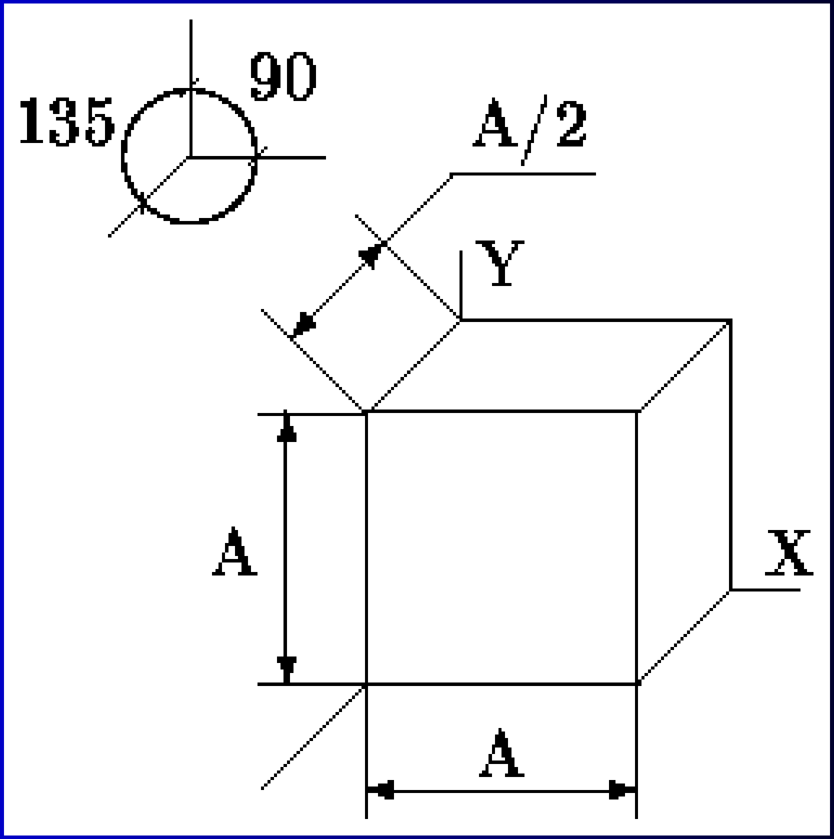


Косоугольная фронтальная диметрия (Cabinet)

$p = r = 1.0$; $q = 0.5$; $\beta = \gamma = 135$; $\alpha = 90$

Большая ось эллипса =1.06d;

Малая ось эллипса =0.35d в плоскостях H и W; в плоскости V - окружность. Эллипсы в плоскостях H и W конгруэнтны.



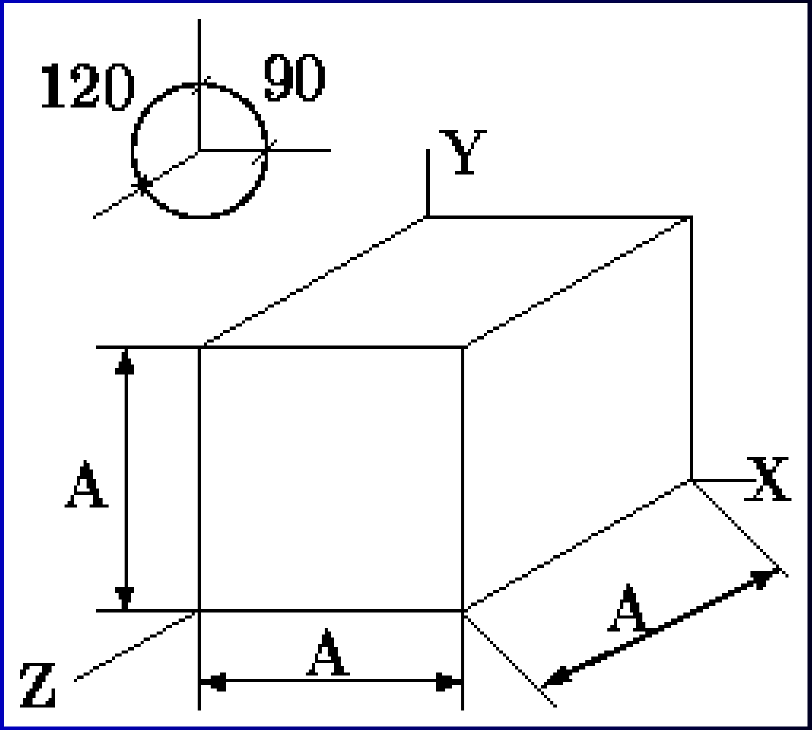
Косоугольная горизонтальная изометрия (Cavalier)

p = r = q = 1.0;

β= γ =135 ; α =90

Большая ось эллипса =1.06d;

Малая ось эллипса =0.35d в плоскостях H и W; в плоскости V - окружность. Эллипсы в плоскостях H и W конгруэнтны.



Косоугольные проекции

Нормаль плоскости проекции не совпадает с направлением проецирующих лучей Обычно плоскость проекции перпендикулярна одной из осей координат.

- Результат проецирования фронтальной плоскости объекта позволяет проводить измерения углов и расстояний без искажений.
- По проекциям других плоскостей можно измерять расстояния (с учётом коэффициента искажения, если он есть), но не углов!
- Часто используется в комьютерных играх стратегиях – легко рисовать.

Аксонометрические проекции в однородных координатах

Аксонометрические проекции в общем виде могут быть реализованы с помощью 2-х поворотов и переноса:

а) поворот относительно одной оси,

б) поворот относительно другой оси

в) параллельная (ортогональная) проекция вдоль третьей оси.

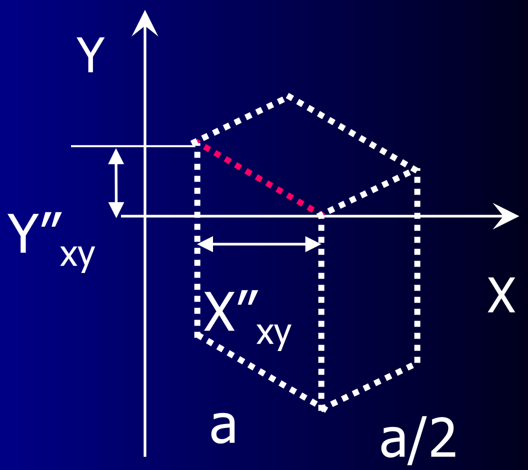
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{orth} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аксонометрические проекции в однородных координатах

Перемножение матриц $R_y R_x$

$$R_y R_x = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Единичный вектор OX -> [1001], если его повернуть, то получим:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 1 \end{bmatrix}$$

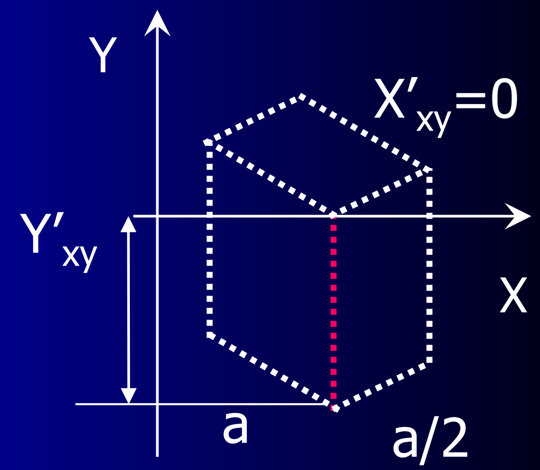
Длина проекции вектора на плоскость:

$$X = \sqrt{X''^2_{xy} + Y''^2_{xy}} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

Аксонометрические проекции в однородных координатах

Перемножение матриц R_yR_x

$$R_yR_x=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



Единичный вектор OY -> [0101], если его повернуть, то получим:

$$\begin{bmatrix}0 & \cos\theta & \sin\theta & 1\end{bmatrix}$$

Длина проекции вектора на плоскость:

$$Y=\sqrt{X'^2_{xy}+Y'^2_{xy}}=\sqrt{0^2+\cos^2\theta}$$

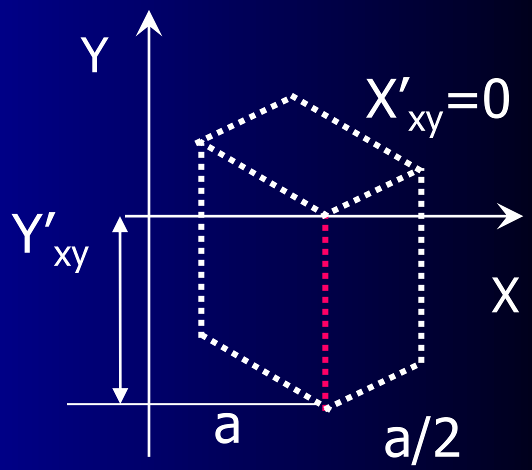
Аксонометрические проекции в однородных координатах

Для изометрии и диметрии справедливо p=r:

$$\cos^2\theta = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \sin^2\theta$$

Единичный вектор OZ (для диметрии) ->

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\theta = (1/2)^2$$



Соответственно:

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$8\sin^4\theta - 9\sin^2\theta + 1 = 0$$

$$\sin^2\theta = 1/8, \theta = 20{,}705^\circ \qquad \varphi = 22{,}208^\circ - \textit{диметрия}$$

Аксонометрические проекции в однородных координатах

Для изометрии:

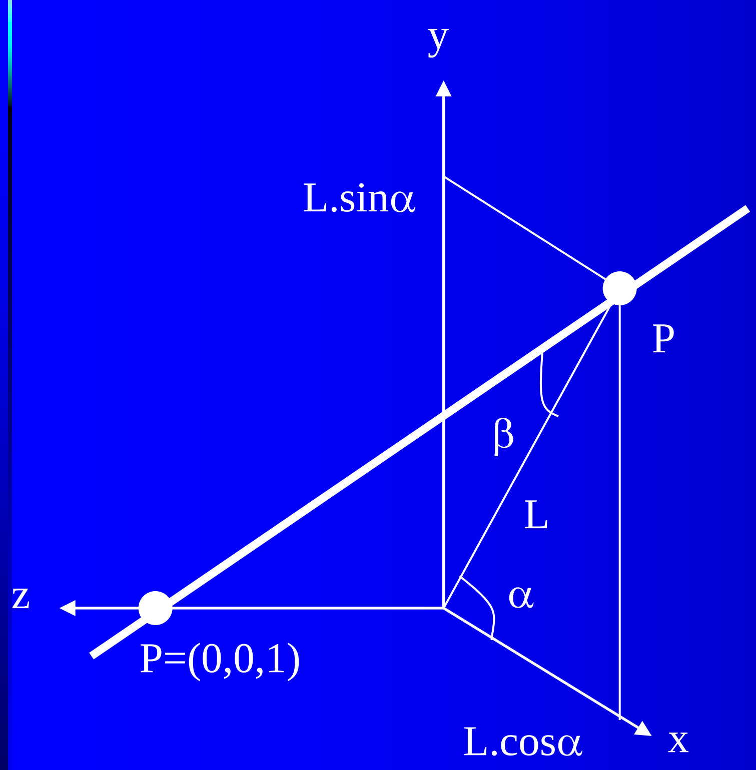
$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = 1/\sqrt{3}, \theta = 35{,}26439^\circ$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1/3}{1-1/3} = 1/2$$

$$\varphi = 45^\circ - \text{\textit{изометрия}}$$

Косоугольные проекции



Плоскость проекции совпадает с XOY
L=1/tan(β)

β- угол между нормалью плоскости проекции и направлением лучей

- определяет тип проекции.

α определяет горизонтальный угол.

Определив желаемые L и α, Направление проецирования задаётся:

(Lcosα, Lsinα,-1)

Косоугольные проекции

Точка P=(0,0,1) будет проецироваться в точку:

P’=(lcosα, lsinα, 0) на плоскости XOY,

а P(x,y,z) в P’(x_p,y_p,0), где

$$x_p = x + z(l\cos\alpha)$$
$$y_p = y + z(l\sin\alpha)$$

Матрица косоугольного проецирования (в формате вектора-столбца):

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & l\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Косоугольные проекции

Таким образом, матрица аксонометрической косоугольной проекции для случая проецирования в плоскость Z = 0, выполняет следующее:

- вначале плоскости с заданной координатой Z_0 переносятся вдоль оси X на $Z_0 \cdot L \cdot \cos\alpha$ и вдоль оси Y на $Z_0 \cdot L \cdot \sin\alpha$,
- затем производится проецирование в плоскость Z = 0.

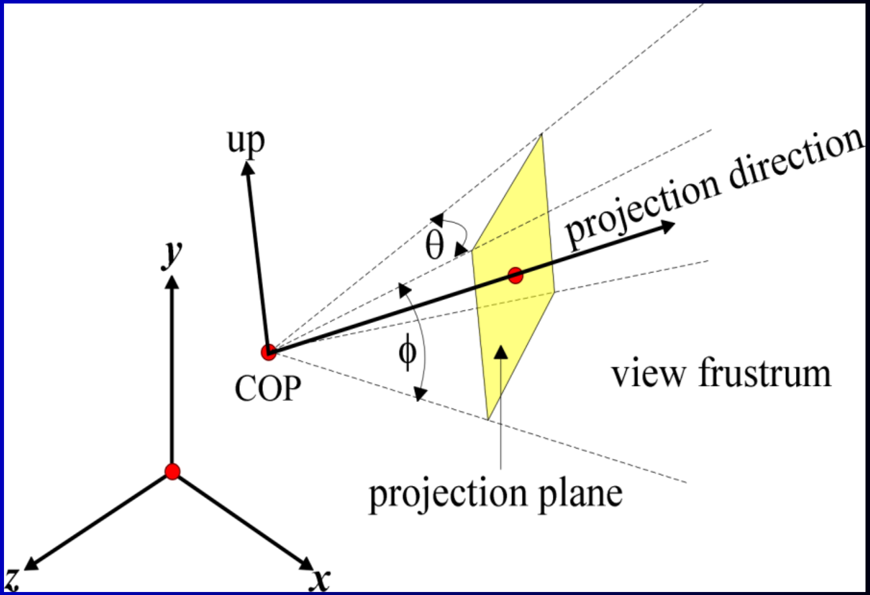
Различные варианты параллельных проекций формируются из полученной подстановкой значений L и углов α и β. В частности, для фронтальной косоугольной диметрии L = 1/2, следовательно, угол β между проекторами и плоскостью проецирования равен arctan2 = 63.4°. Угол же α равен 45° но можно выбирать и 30 и 60°.

Центральные (perspective) проекции

Центральные проекции более сложные. Помимо ракурса и перспективы для их построения должен учитываться так же и объём видимости (в виде усечённой пирамиды) или угол обзора (по двум координатам).

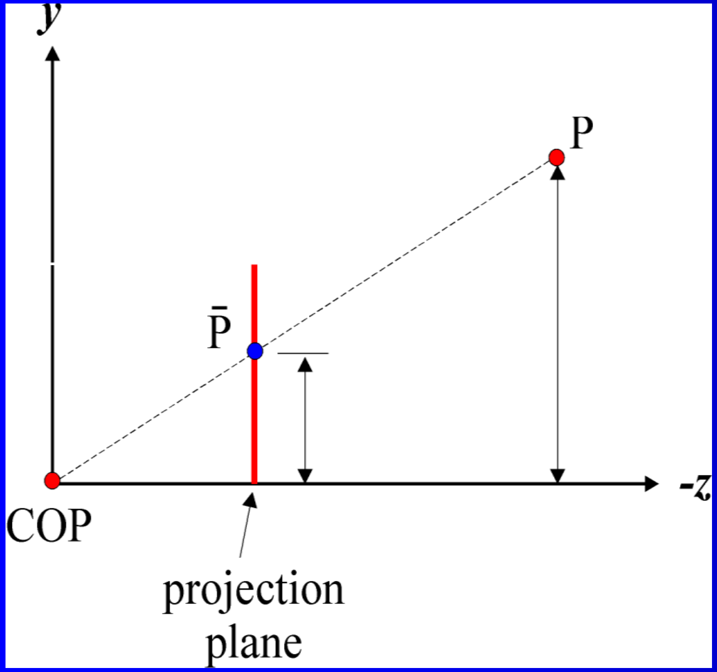
Параметры:

- Центр проекции (centre of projection -COP)
- Углы обзора (q, f)
- Направление проецирования (нормаль к плоскости проекции)
- Вертикаль параллельная плоскости проекции (up direction)



Perspective Projections

Consider a perspective projection with the viewpoint at the origin and a viewing direction oriented along the positive **-z** axis and the view-plane located at z = -d



$$\frac{y}{z} = \frac{y_P}{d} \Rightarrow y_P = \frac{y}{z/d}$$

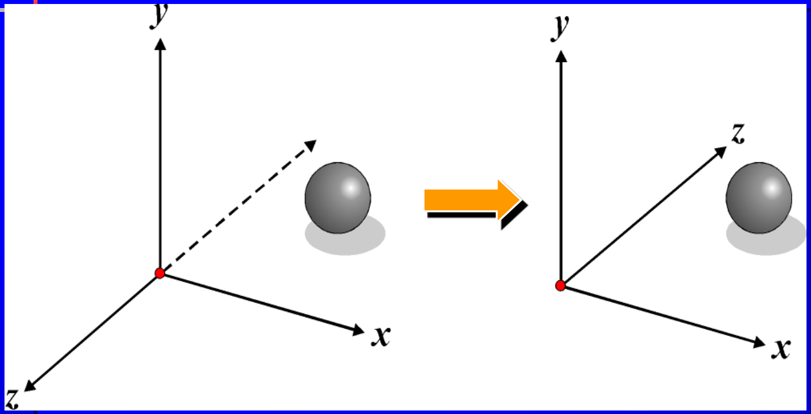
a similar construction for x_p

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{z/d} \\ \dfrac{y}{z/d} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

divide by homogenous ordinate to map back to 3D space

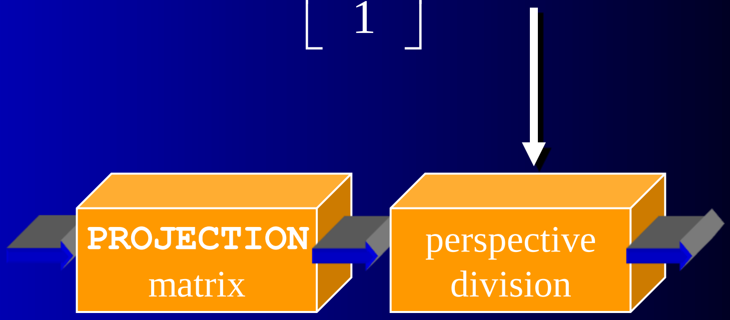
Perspective Projections Details



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Flip ***z*** to transform to a left handed co-ordinate system $\Rightarrow$ increasing *z* values mean increasing distance from the viewer.

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{z/d} \\ \dfrac{y}{z/d} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ z/d \end{bmatrix}$$

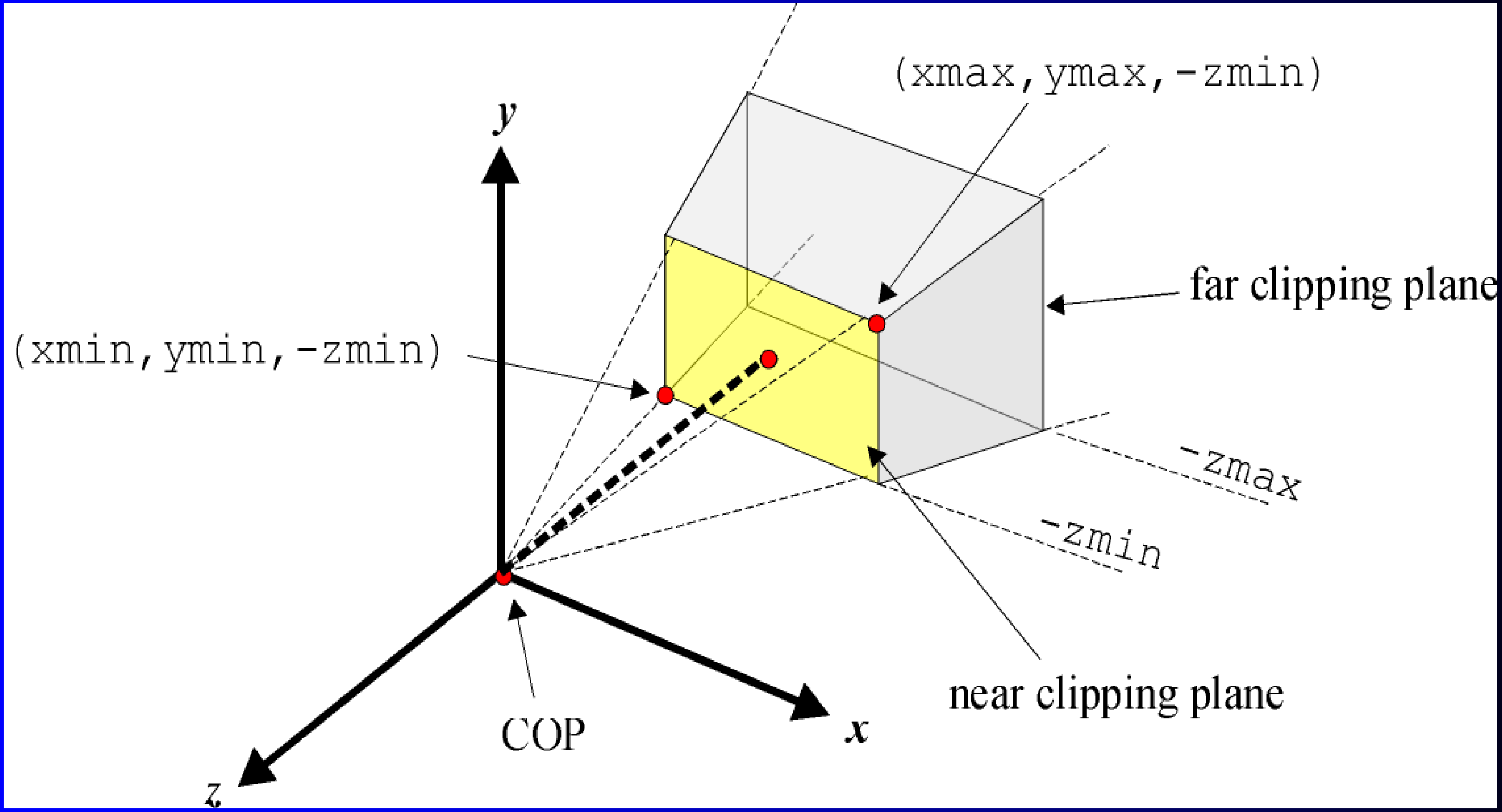


Perspective Projection

- Depending on the application we can use different mechanisms to specify a perspective view.
- Example: the *field of view* angles may be derived if the distance to the viewing plane is known.
- Example: the viewing direction may be obtained if a point in the scene is identified that we wish to look at.
- OpenGL supports this by providing different methods of specifying the perspective view:
  - `gluLookAt`, `glFrustrum` and `gluPerspective`

Perspective Projections

```
glFrustrum(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax);
```



`glFrustrum`

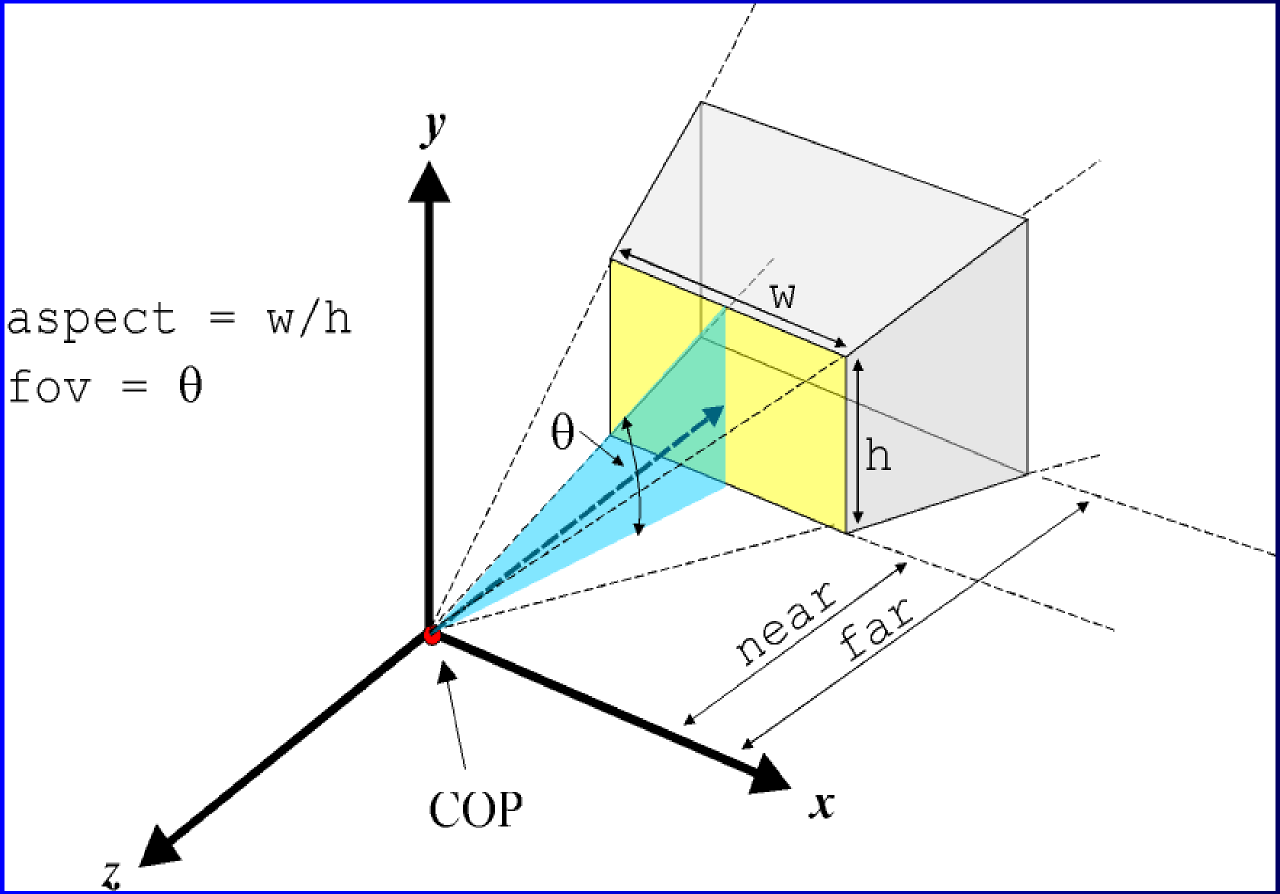
- Note that all points on the line defined by `(xmin,ymin,-zmin)` and `COP` are mapped to the *lower left* point on the viewport.
- Also all points on the line defined by `(xmax,ymax,-zmin)` and `COP` are mapped to the upper right corner of the viewport.
- The viewing direction is always parallel to ***-z***
- It is not necessary to have a *symmetric frustrum* like:

```
glFrustrum(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0, 5.0, 50.0);
```

- Non symmetric frustrums introduce *obliqueness* into the projection.
- `zmin` and `zmax` are specified as <u>positive</u> distances along ***-z***

Perspective Projections

`gluPerspective(fov, aspect, near, far);`

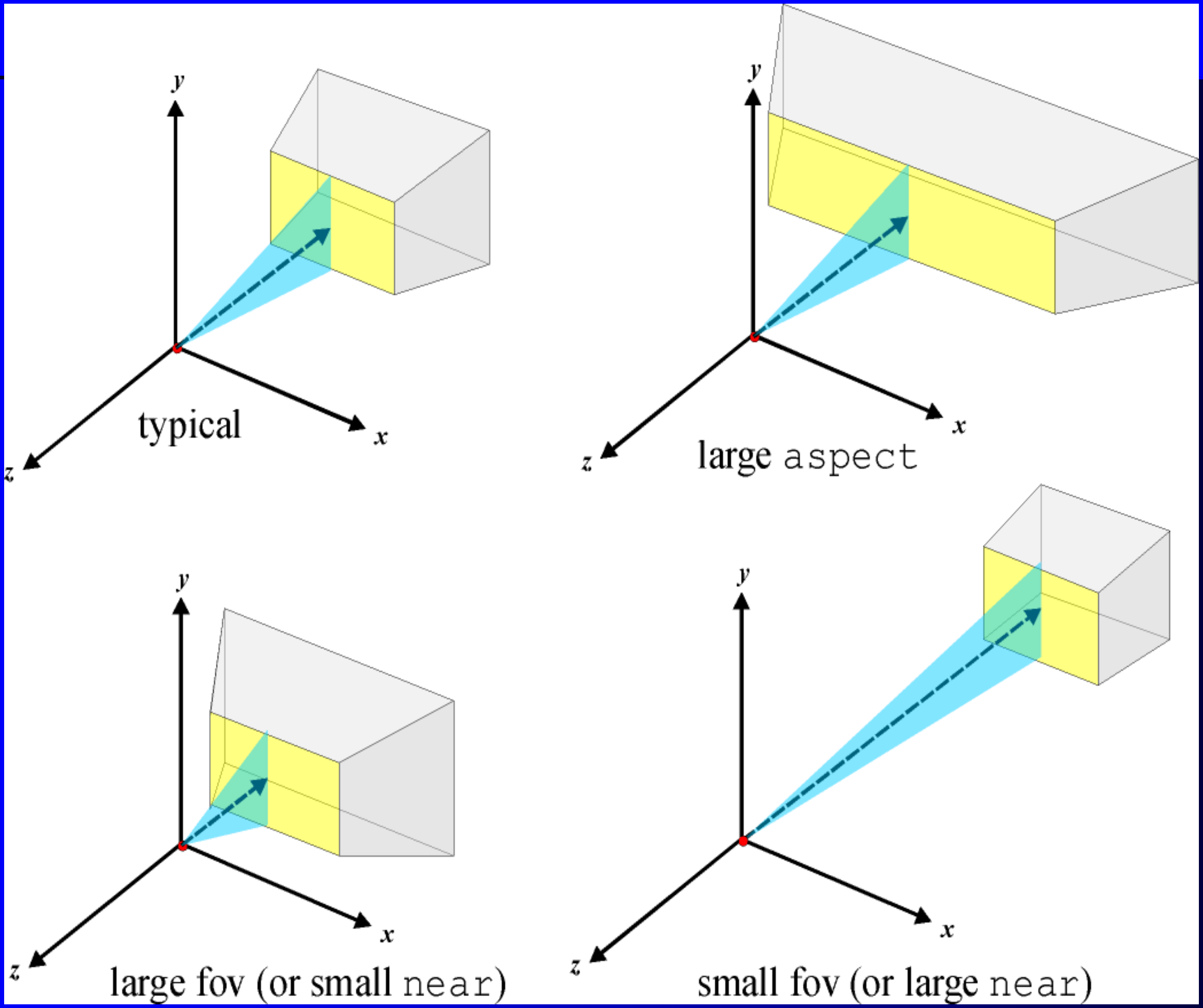


$$\frac{h/2}{near} = \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow h = 2\,near\tan\frac{\theta}{2}$$

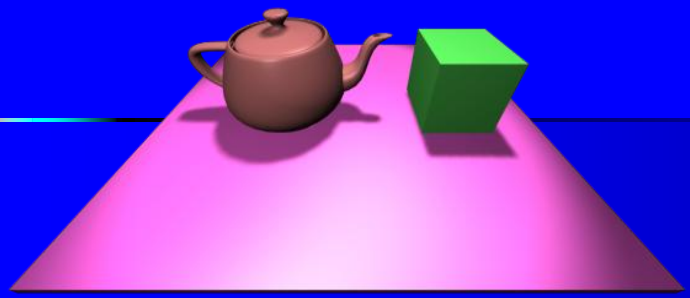
`gluPerspective`

- A utility function to simplify the specification of perspective views.
- Only allows creation of *symmetric frustrums*.
- Viewpoint is at the origin and the viewing direction is the ***-z*** axis.
- The *field of view* angle, `fov`, must be in the range `[0..180]`
- `apect` allows the creation of a view frustrum that matches the *aspect ratio* of the viewport to eliminate distortion.

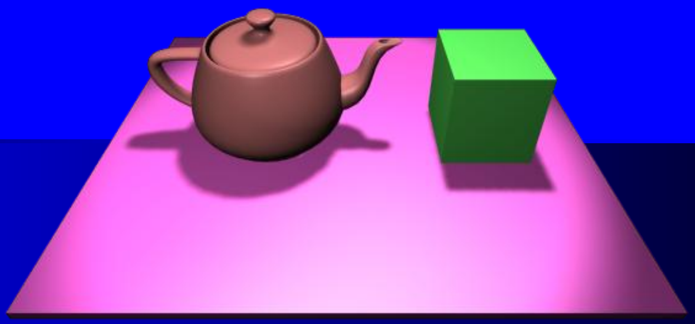
Perspective Projections



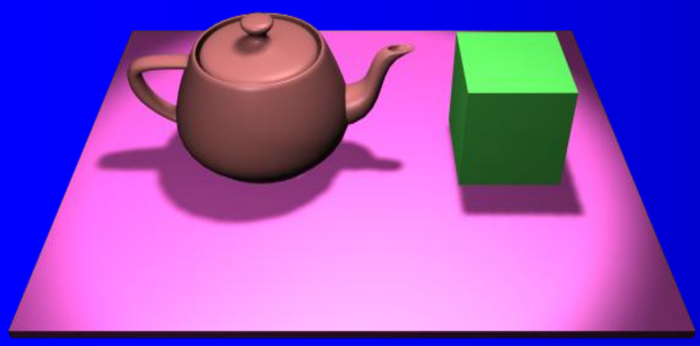
Lens Configurations



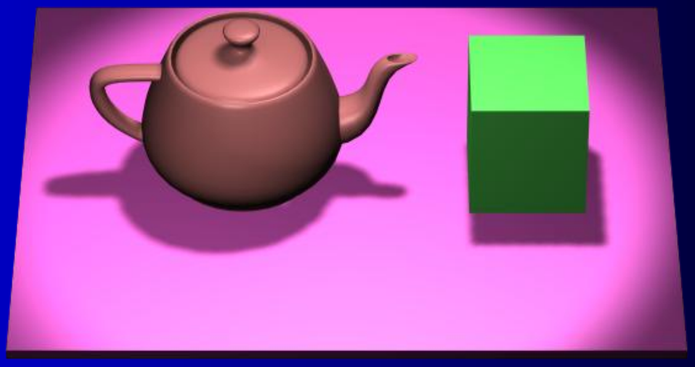
10mm Lens (fov = 122°)



20mm Lens (fov = 84°)



35mm Lens (fov = 54°)



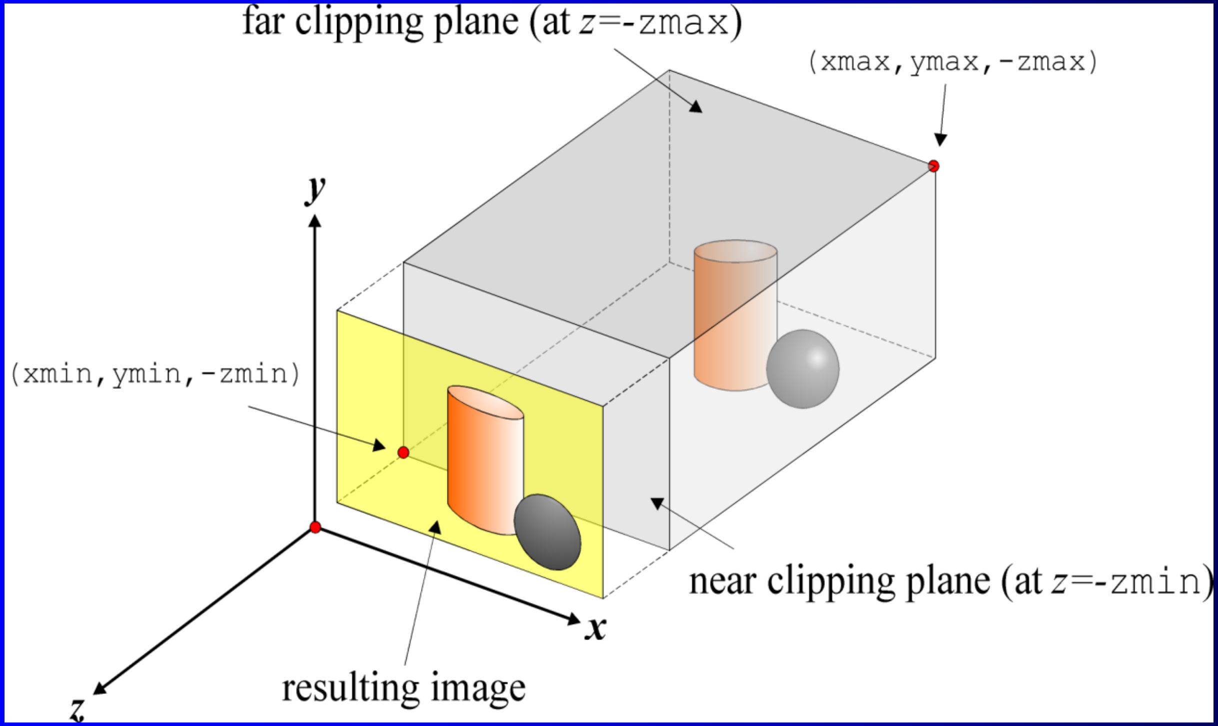
200mm Lens (fov = 10°)

Parallel projections

- Specified by a direction to the centre of projection, rather than a point.
  - Centre of projection at infinity.
- Orthographic
  - The normal to the projection plane is the same as the direction to the centre of projection.
- Oblique
  - Directions are different.

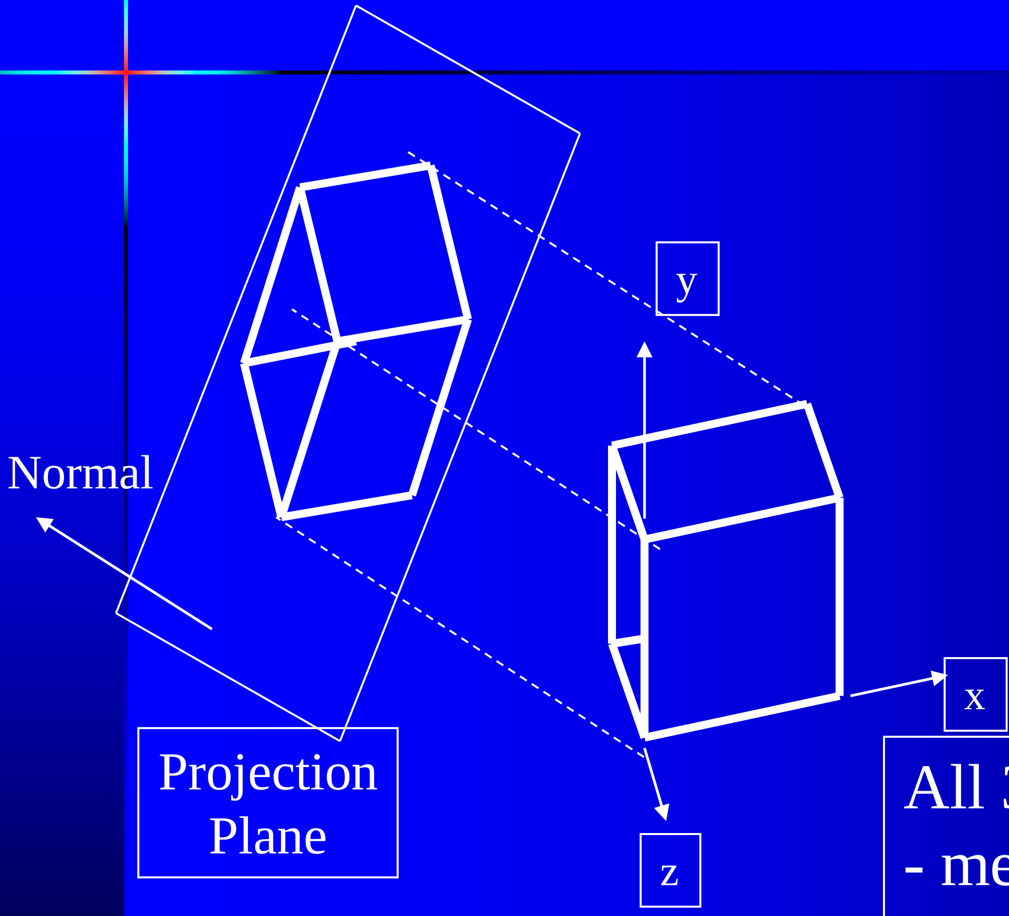
Parallel Projections in OpenGL®

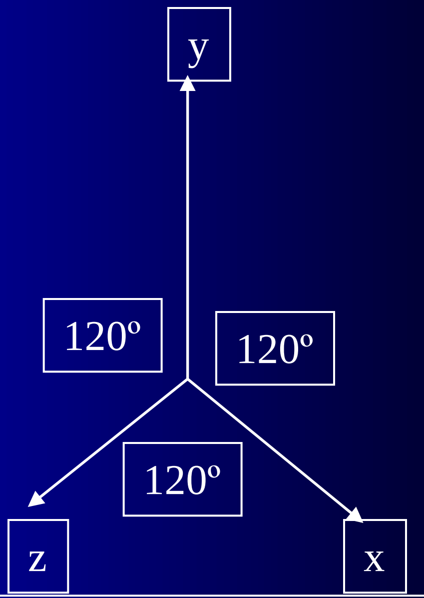
```
glOrtho(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax);
```



<u>Note</u>: we always view in -z direction need to transform world in order to view in other arbitrary directions.

Isometric projection





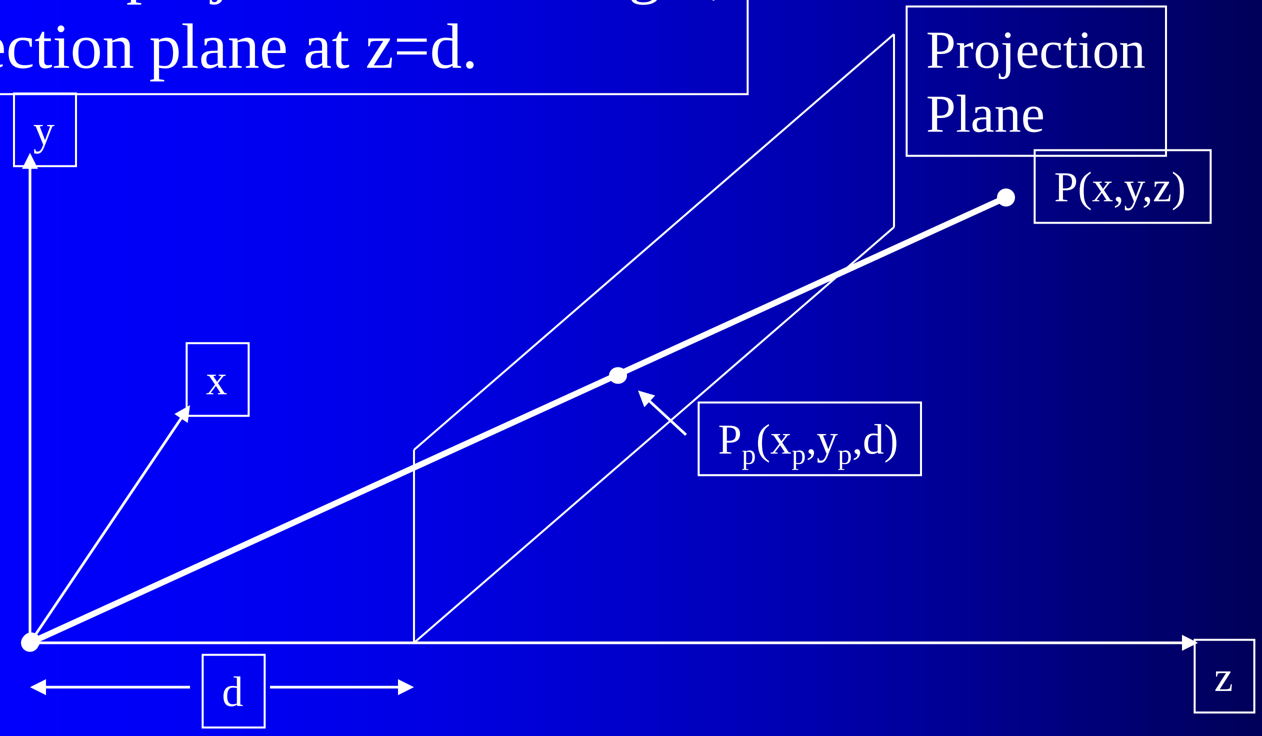
All 3 axes equally foreshortened
- measurements can be made
- Hence the name *iso-metric*

Mathematics of Viewing

- We need to generate the transformation matrices for perspective and parallel projections.
- They should be 4x4 matrices to allow general concatenation.
- And there's still 3D clipping and more viewing stuff to look at.

Perspective projection – simplest case

Centre of projection at the origin,
Projection plane at z=d.

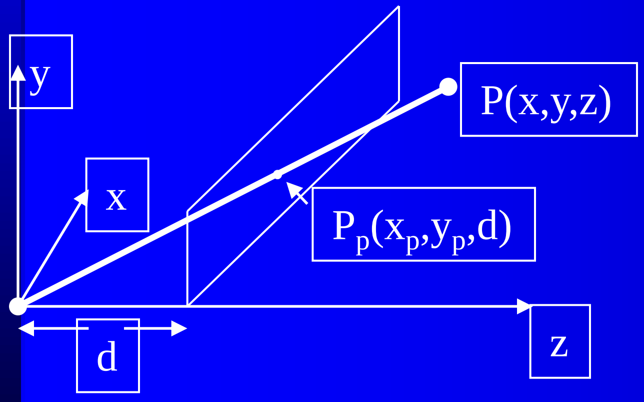


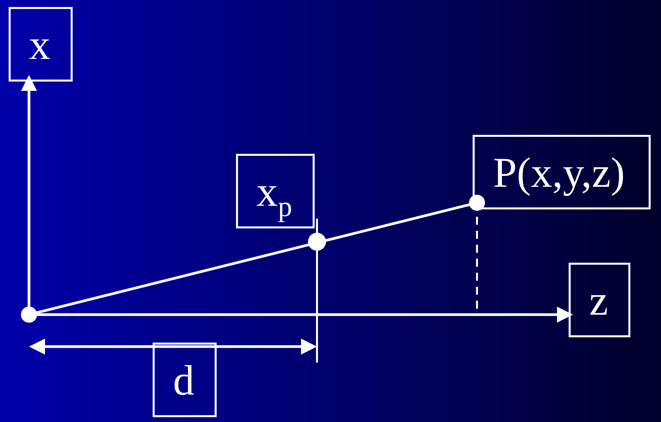
Perspective projection – simplest case

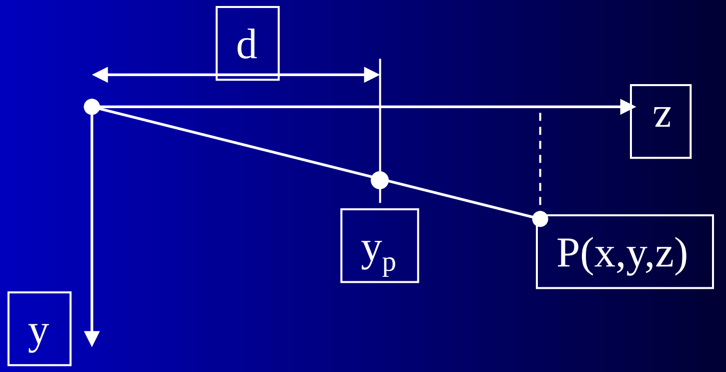
From similar triangles :

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}; \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}$$

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}; \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}$$







Perspective projection

$$\begin{bmatrix} x_p & y_p & d & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{d.x}{z} & \frac{d.y}{z} & d & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & y & z & \frac{z}{d} \end{bmatrix}^T$$

The transformation can be represented as a 4x4 matrix :

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

Perspective projection

Represent the general projected point $P_p = [X \quad Y \quad Z \quad W]^T$

$$P_p = M_{per} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [X \quad Y \quad Z \quad W]^T = [x \quad y \quad z \quad z/d]^T$$

Perspective projection

$$P_p = \begin{bmatrix} x & y & z & z/d \end{bmatrix}^T$$

Dropping W to come back to 3D :

$$\left(\frac{X}{W}, \quad \frac{Y}{W}, \quad \frac{Z}{W} \right) = \left(\frac{x}{z/d}, \quad \frac{y}{z/d}, \quad d \right)$$

Trouble with this formulation :

Centre of projection fixed at the origin.

Finding vanishing points

- Recall : An axis vanishing point is the point where the axis intercepts the projection plane → point at infinity.

E.g to find x axis vanishing point, multiply by the point :

$$p_{vpx} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

For this formulation :

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

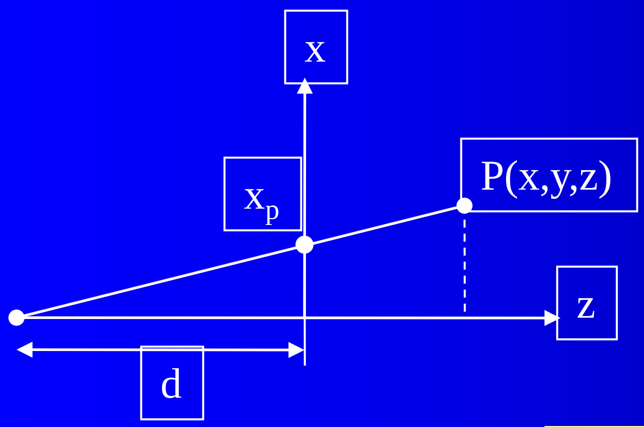
$$P_{xvp} = \infty$$

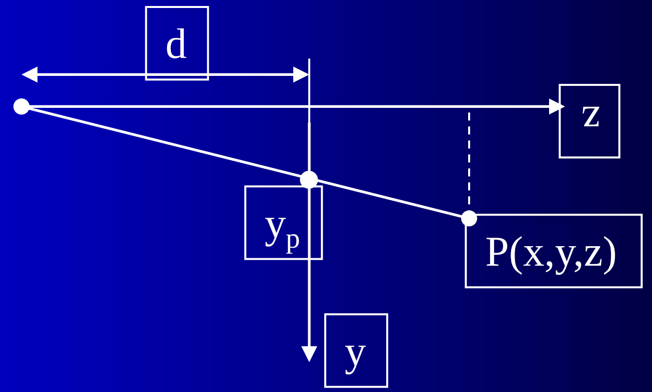
$$P_{yvp} = \infty$$

$$P_{zvp} = (0 \quad 0 \quad d)$$

So we have a 1 point perspective.

Alternative formulation





Projection plane at z = 0
Centre of projection at
z = -d

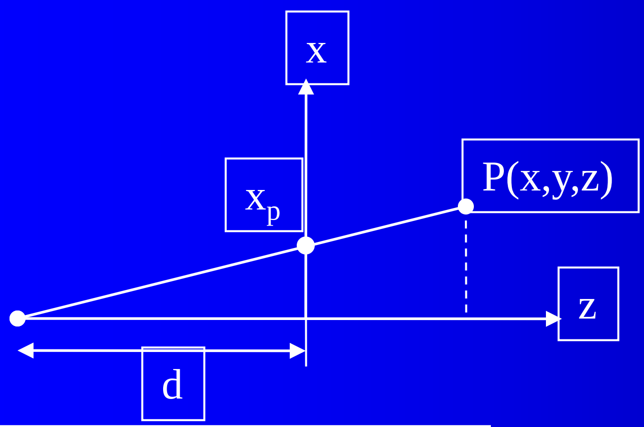
From similar triangles :

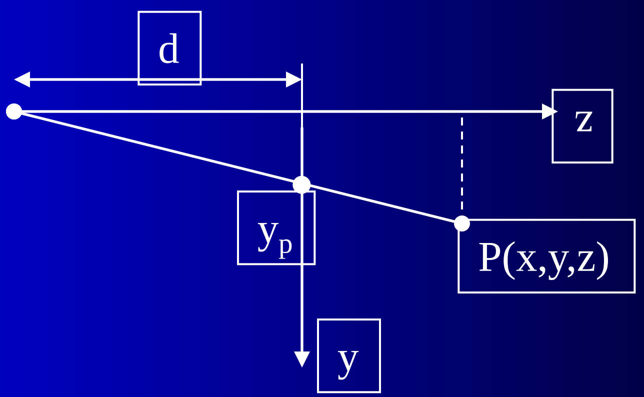
$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d}; \qquad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d}$$

Multiply by d

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z+d} = \frac{x}{(z/d)+1}; \qquad y_p = \frac{d \cdot y}{z+d} = \frac{y}{(z/d)+1}$$

Alternative formulation





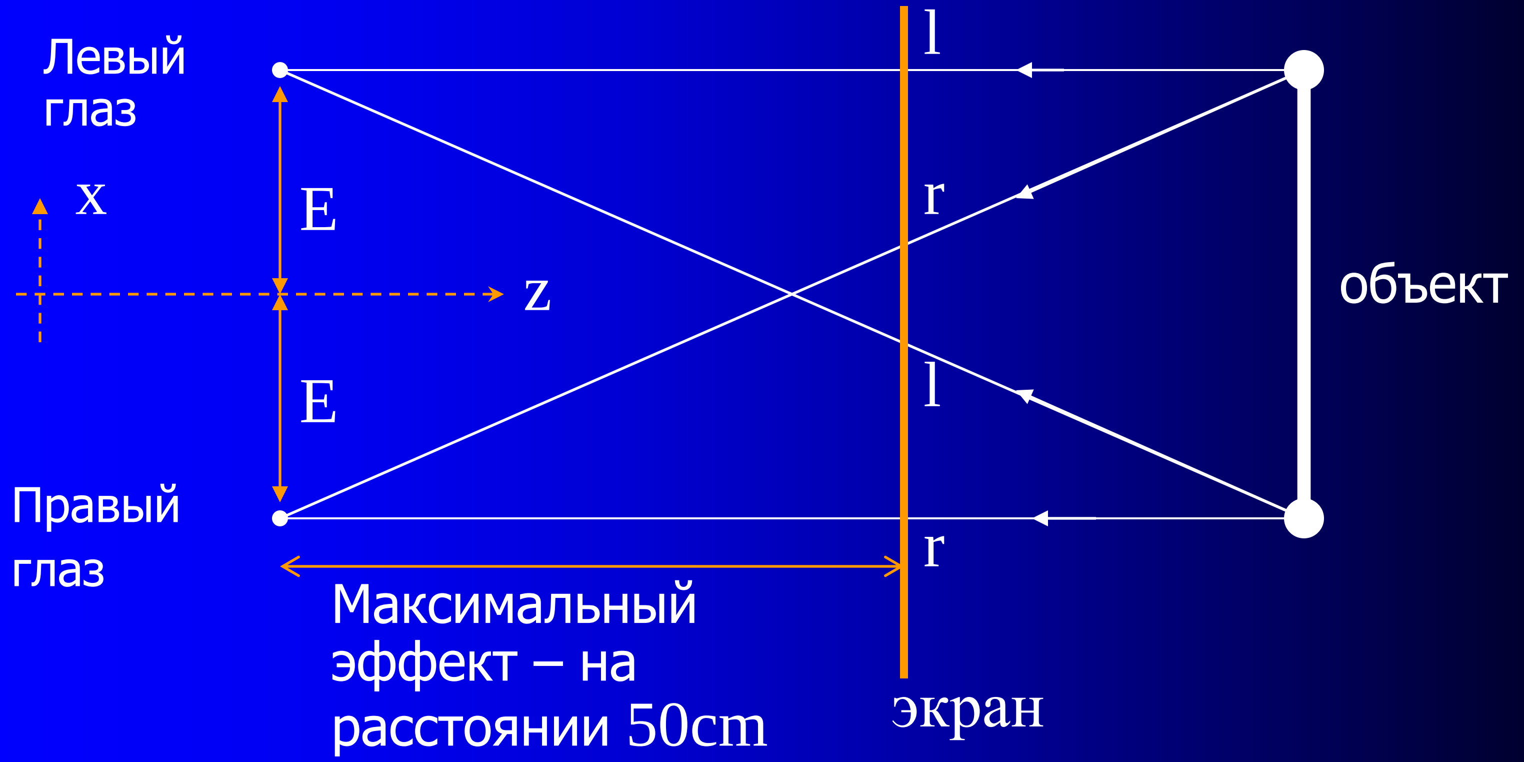
Projection plane at z = 0,
Centre of projection at
z = -d

Now we can allow d→∞

$$M'_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$

Стерео проекции

Стерео проекции – это две совмещённые перспективные проекции:



Stereo Projection

E is the *interocular separation*, typically 2.5cm to 3cm.

d is the distance of viewer from display, typically 50cm.

Let 2E = 5cm:

$$stereo\ angle\ \theta = \tan^{-1}\left(2E/d\right) = \tan^{-1}\left(5/50\right) = 5.71^{o}$$

$$thus: \quad 2E = d/10 \quad to\ preserve\ angle.$$

$$Left\ \ eye: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d/20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix} \qquad Right\ \ eye: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d/20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$