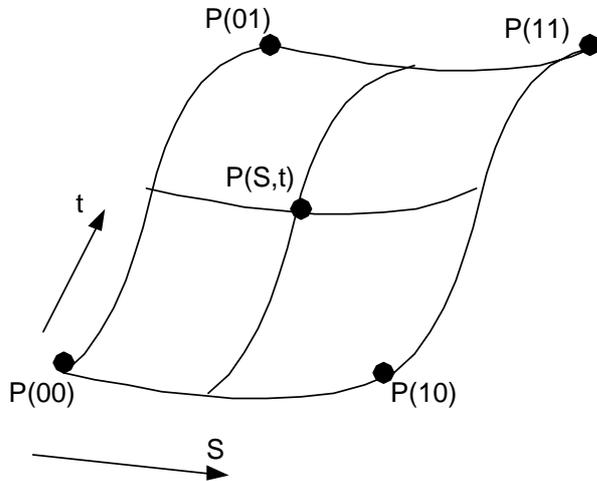


Лекция 17

Параметрические бикубические поверхности.

Поверхность может быть разбита на куски, каждый из которых будет описан параметрическим бикубическим уравнением. Отдельно идёт работа по X, по Y, по Z для представления поверхности.



Рассмотрим параметр X:
Бикубическое уравнение для описания X:

$$\begin{aligned}
 X(S,t) = & a_{11} \cdot S^3 \cdot t^3 + a_{12} \cdot S^3 \cdot t^2 + a_{13} \cdot S^3 \cdot t + a_{14} \cdot S^3 + \\
 & + a_{21} \cdot S^2 \cdot t^3 + a_{22} \cdot S^2 \cdot t^2 + a_{23} \cdot S^2 \cdot t + a_{24} \cdot S^2 + \\
 & + a_{31} \cdot S \cdot t^3 + a_{32} \cdot S \cdot t^2 + a_{33} \cdot S \cdot t + a_{34} \cdot S + \\
 & + a_{41} \cdot t^3 + a_{42} \cdot t^2 + a_{43} \cdot t + a_{44}
 \end{aligned}$$

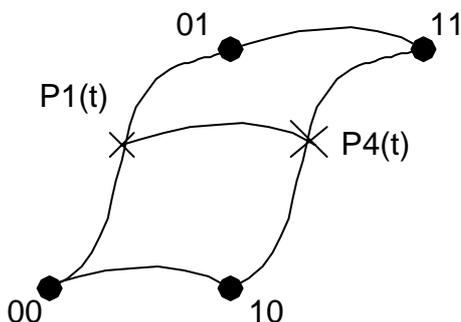
$$X(S,t) = S \cdot C_X \cdot T^T, \text{ где}$$

$$S = [S^3 \quad S^2 \quad S \quad 1], \quad T = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]$$

$$C_X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ - матрица коэффициентов}$$

Далее рассмотрим 3 способа расчёта коэффициентов.

12.1. В форме Эрмитта



$$p(S,t) = S \cdot M_H \cdot G_{HX}(t)$$

Наши начальные данные:

$$G_{HX} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix}$$

В свою очередь каждая из этих функций может быть описана:

$$P_1(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \\ R_{00}^t \\ R_{01}^t \end{bmatrix}, \text{ R – по параметру } t.$$

$$P_{00} = \{x_{00}, y_{00}, z_{00}\}$$

$$R_{00} = \{(x'_t)_{00}, (y'_t)_{00}, (z'_t)_{00}\}$$

Для P_{01} - аналогично.

$$P_4(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{11} \\ R_{10}^t \\ R_{11}^t \end{bmatrix}$$

$$R_1(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} R_{00}^S \\ R_{01}^S \\ R_{00}^{St} \\ R_{01}^{St} \end{bmatrix}; \quad R_4(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} R_{10}^S \\ R_{11}^S \\ R_{10}^{St} \\ R_{11}^{St} \end{bmatrix}, \text{ где}$$

R^S - производная по S, а R^{St} - вторая производная по t.

Матрица исходных данных выглядит следующим образом:

$$G_H = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} & R_{00}^S & R_{10}^S \\ P_{01} & P_{11} & R_{01}^S & R_{11}^S \\ R_{00}^t & R_{10}^t & R_{00}^{St} & R_{10}^{St} \\ R_{01}^t & R_{11}^t & R_{01}^{St} & R_{11}^{St} \end{bmatrix}$$

$$G_H(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix} = G_H \cdot M_H^T \cdot T^T; \quad p(S,t) = S \cdot M_H \cdot G_H(t), \text{ следовательно:}$$

$p(S,t) = S \cdot M_H \cdot G_H \cdot M_H^T \cdot T^T$, где $M_H \cdot G_H \cdot M_H^T = C_P$ - матрица коэффициентов полинома

Например конкретно для компоненты X:

$X(S,t) = S \cdot M_H \cdot G_{HX} \cdot M_H^T \cdot T^T$, где $M_H \cdot G_{HX} \cdot M_H^T = C_X$ - матрица коэффициентов (была приведена выше).

$$G_{HX} = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{10} & (x'_s)_{00} & (x'_s)_{10} \\ x_{01} & x_{11} & (x'_s)_{01} & (x'_s)_{11} \\ (x'_t)_{00} & (x'_t)_{10} & (x''_{st})_{00} & (x''_{st})_{10} \\ (x'_t)_{01} & (x'_t)_{11} & (x''_{st})_{01} & (x''_{st})_{11} \end{bmatrix}$$

12.2. В форме Безье:

$p(S,t) = S \cdot M_B \cdot G_{BP} \cdot M^T \cdot T^T$, где геометрический вектор Безье равен:

$$G_{BP} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}$$

Из этих точек 4 опорных (т.е. через них проходит плоскость):

$$P_{11}, P_{14}, P_{41}, P_{44}$$

Все остальные точки являются управляющими.

Рассмотрим два сопряжённых куска поверхности:

Для обеспечения сшивки поверхности на уровне $C^{(1)}$ надо, чтобы следующие точки лежали на одной прямой:

$$\begin{aligned} &13, 14, 15; \\ &23, 24, 25; \\ &33, 34, 35; \\ &43, 44, 45. \end{aligned}$$

Соблюдение этого условия видно на следующем рисунке:

1) 1) В форме Безье:

$p(S,t) = S \cdot M_B \cdot G_{BP} \cdot M^T \cdot T^T$, где геометрический вектор Безье равен:

$$G_{BP} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}$$

Из этих точек 4 опорных (т.е. через них проходит плоскость):

$$P_{11}, P_{14}, P_{41}, P_{44}$$

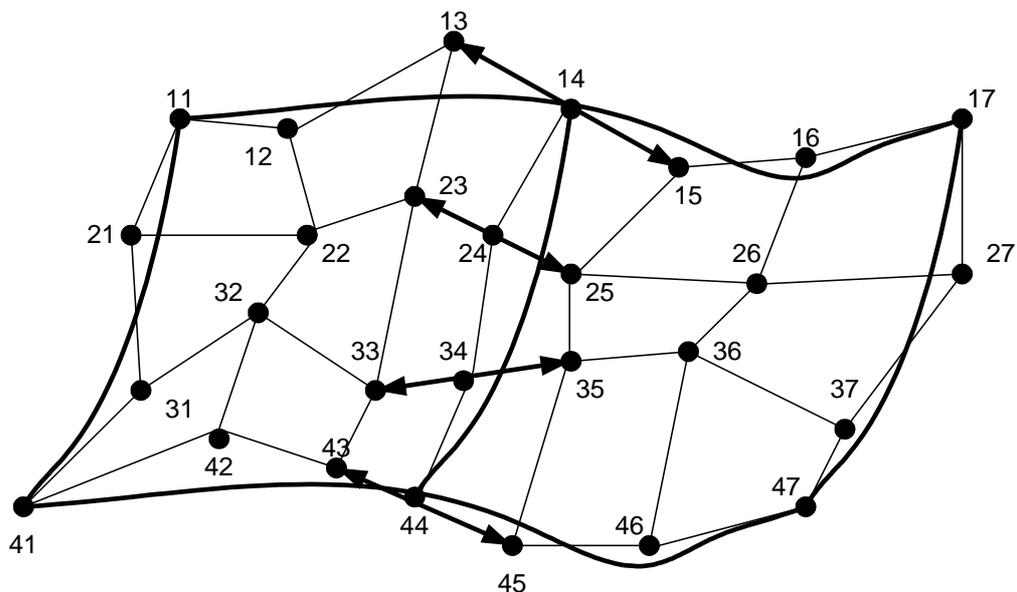
Все остальные точки являются управляющими.

Рассмотрим два сопряжённых куска поверхности:

Для обеспечения сшивки поверхности на уровне $C^{(1)}$ надо, чтобы следующие точки лежали на одной прямой:

13, 14, 15;
 23, 24, 25;
 33, 34, 35;
 43, 44, 45.

Соблюдение этого условия видно на следующем рисунке:



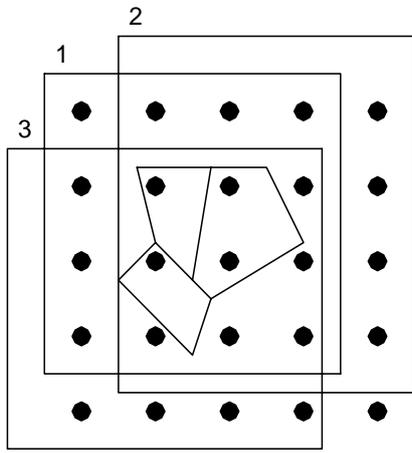
12.3. В форме сплайна:

$$p(S,t) = S \cdot M_S \cdot G_{SP} \cdot M_S^T \cdot T^T$$

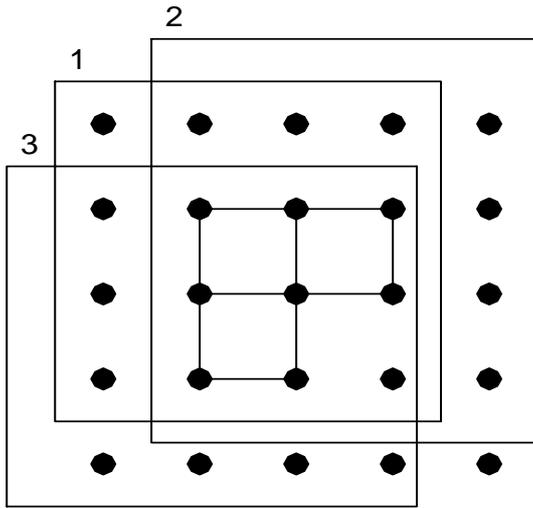
$$G_{SP} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}$$

Здесь можно обеспечить “сшивку”:

а) по уровню $C^{(2)}$, если применить: $M_S = M_{S1}$, т.е. все точки будут управляющие:



б) по уровню $C^{(1)}$, если применить: $M_s = M_{s2}$, т. е. все точки являются опорными:



Итерационные способы вычисления полиномов.

Вычисление кубического уравнения для прямой:

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = d + t(c + t(b + ta))$$

$$\delta = \Delta t ; t = 0 \dots 1$$

$$\Delta f(t) \equiv f(t+\delta) - f(t) = 3at^2\delta + t(3a\delta^2 + 2b\delta) + a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta$$

$$\Delta^2 f(t) \equiv \Delta(\Delta f(t)) = \Delta f(t+\delta) - \Delta f(t) = 6a\delta^2 t + 6a\delta^3 + 2b\delta^2$$

$$\Delta^3 f(t) \equiv \Delta(\Delta^2 f(t)) = \Delta^2 f(t+\delta) - \Delta^2 f(t) = 6a\delta^3$$

$$t = r\delta ; r = 0 \dots \frac{1}{\delta}$$

$$f_n = f(n\delta)$$

$$\Delta f_n = \Delta f(n\delta)$$

$$\Delta^2 f_n = \Delta^2 f(n\delta)$$

$$\Delta^3 f_n = 6a\delta^3 = const$$

$$f_{n+1} = f_n + \Delta f_n$$

$$\Delta f_{n+1} = \Delta f_n + \Delta^2 f_n$$

$$\Delta^2 f_{n+1} = \Delta^2 f_n + \Delta^3 f_n$$

Для $n=0$; $t=0$:

$$f_0 = d$$

$$\Delta f_0 = a\delta^3 + 6\delta^2 + c\delta$$

$$\Delta^2 f_0 = 6a\delta^3 + 2b\delta^2$$

$$\Delta^3 f_0 = 6a\delta^3$$

Для $n=1$; $t=\delta$:

$$f_1 = f_0 + \Delta f_0$$

$$\Delta f_1 = \Delta f_0 + \Delta^2 f_0$$

$$\Delta^2 f_1 = \Delta^2 f_0 + \Delta^3 f_0$$

Для $n=2$; $t=2\delta$:

$$f_2 = f_1 + \Delta f_1$$

$$\Delta f_2 = \Delta f_1 + \Delta^2 f_1$$

$$\Delta^2 f_2 = \Delta^2 f_1 + \Delta^3 f_1$$

Запишем эту схему вычислений в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ \Delta f_0 \\ \Delta^2 f_0 \\ \Delta^3 f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta^3 & \delta^2 & \delta & 0 \\ 6\delta^3 & 2\delta^2 & 0 & 0 \\ 6\delta^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad D_0 = E(\delta) \cdot Q$$

При $n=1$ схема преобразования D_0 в D_1 выглядит следующим образом:

$$\text{Стр.1} = \text{Стр.1} + \text{Стр.2}$$

$$\text{Стр.2} = \text{Стр.2} + \text{Стр.3}$$

$$\text{Стр.3} = \text{Стр.3} + \text{Стр.4}$$

Следующая операция при $n=2$:

Преобразование D_1 в D_2 происходит аналогично тому, что выше.

Для бикубических полиномов:

$$D_{00} = \begin{bmatrix} f_0 & \Delta_t f_0 & \Delta_t^2 f_0 & \Delta_t^3 f_0 \\ \Delta_S f_0 & \Delta_S \Delta_t f_0 & \Delta_S \Delta_t^2 f_0 & \Delta_S \Delta_t^3 f_0 \\ \Delta_S^2 f_0 & \Delta_S^2 \Delta_t f_0 & \Delta_S^2 \Delta_t^2 f_0 & \Delta_S^2 \Delta_t^3 f_0 \\ \Delta_S^3 f_0 & \Delta_S^3 \Delta_t f_0 & \Delta_S^3 \Delta_t^2 f_0 & \Delta_S^3 \Delta_t^3 f_0 \end{bmatrix}$$

При этом:

$$\Delta_S^3 \Delta_t^3 f_0 = \text{const}$$

$$D_{00} = E(e) \cdot C_p \cdot E^T(\delta)$$

$$t = \delta \cdot n$$

$$S = e \cdot m$$