Машинная графика
Computer Graphics

Лекция 4.

«Растеризация окружности и эллипса»

План лекции

- Алгоритм Брезенхема для построения окружности
- Построение эллипса

Окружность

Окружность определяется как геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых на заданное расстояние r от её центра (x_c,y_c).

Соответственно, координаты любой точки (x,y) окружности можно получить по т. Пифагора:

$$(x – x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

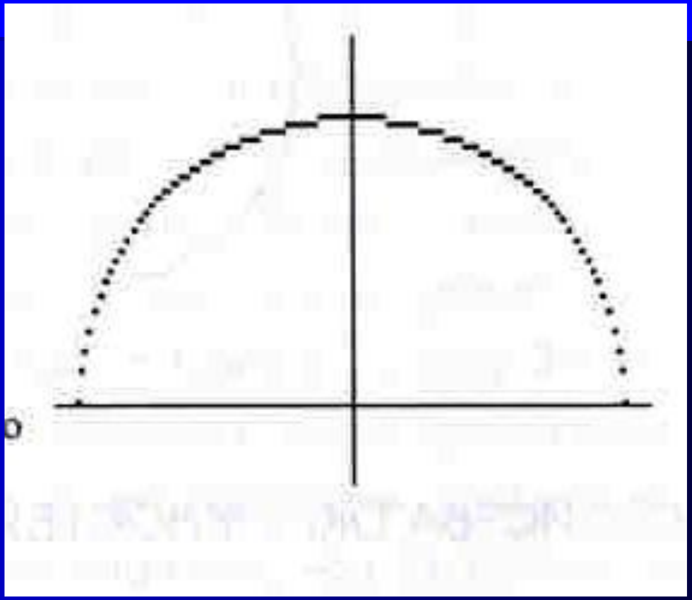
Простейший способ найти точки на окружности – это перемещаться по оси OX от x_c– r до x_c+ r с единичным шагом и вычислять y:

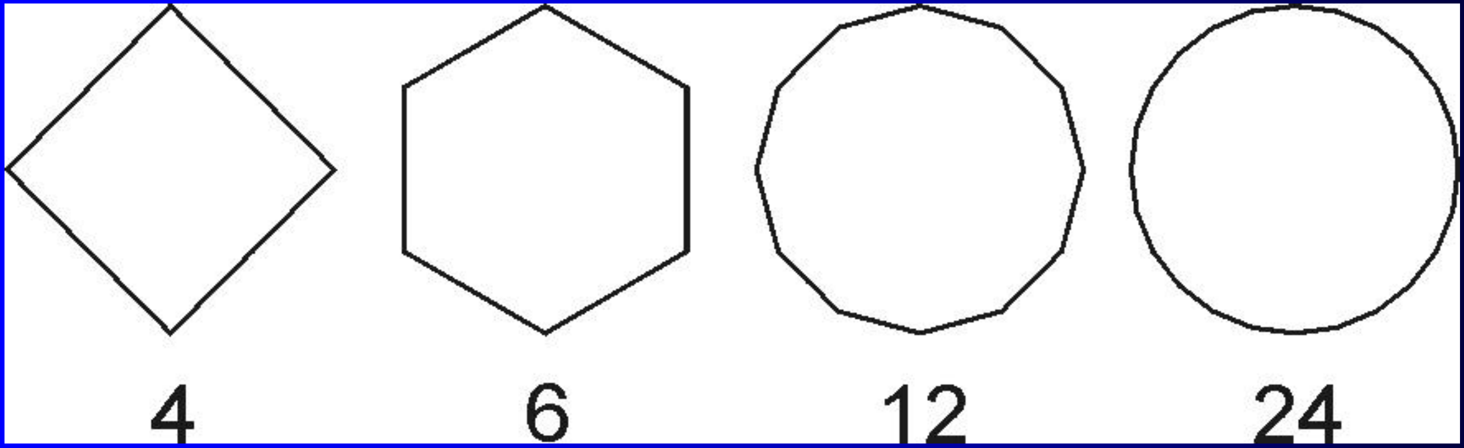
$$y= y_c \quad \mathrm{sqrt}(r^2 - (x – x_c)^2)$$

Но помимо значительного объёма вычислений, конечный результат будет далёк от ожидаемого – промежутки между положениями изображаемых пикселей будут неравномерными.

Окружность

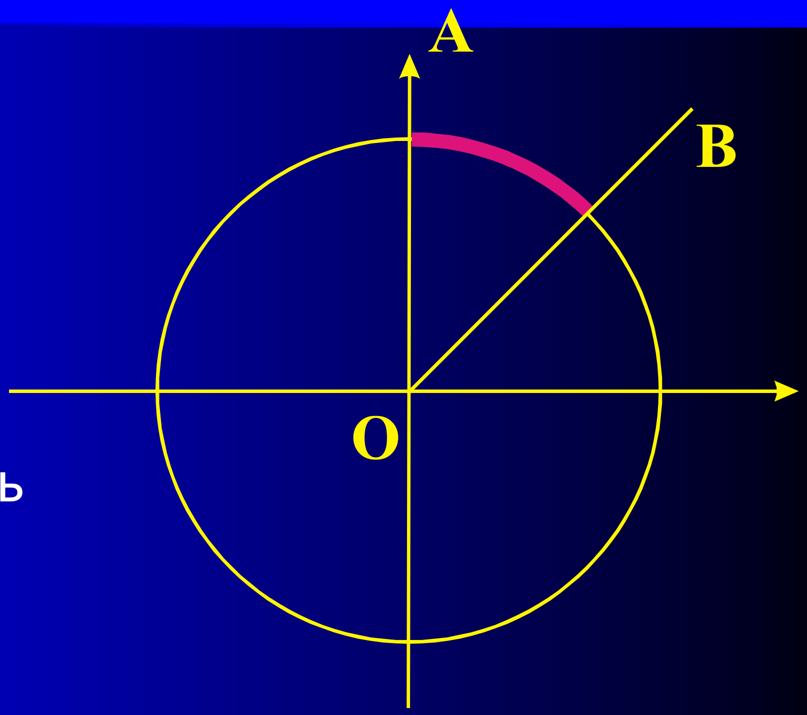
Другой вариант – аппроксимация окружности прямыми линиями. Не самый худший по результату, но и не самый лучший по производительности.





Построение окружности

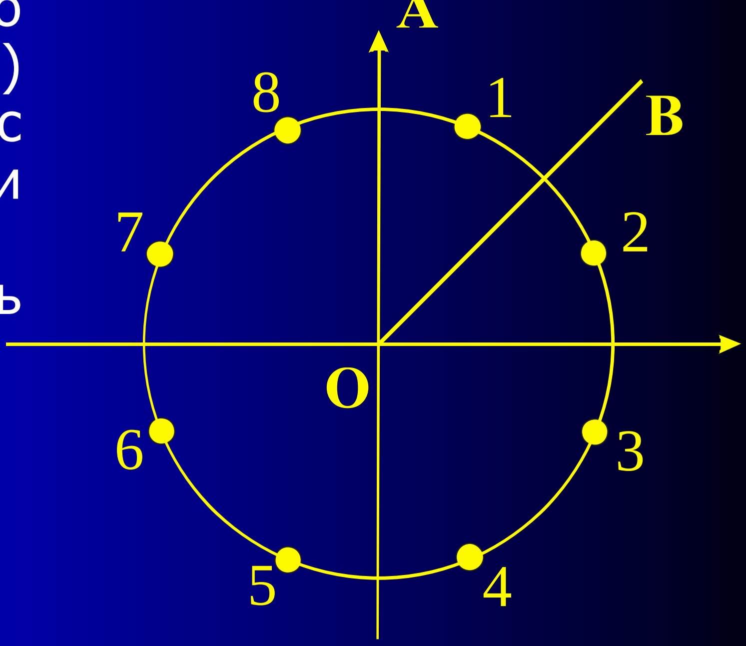
Окружность обладает центром симметрии и бесконечным количеством осей симметрии. Не использовать данный факт – глупо. Соответственно нет необходимости строить всю окружность, достаточно построить некоторую ее часть и последовательным применением преобразований симметрии получить из нее полную окружность. Рассмотрим построение 1/8 части окружности, расположенной во втором октанте.



Построение окружности

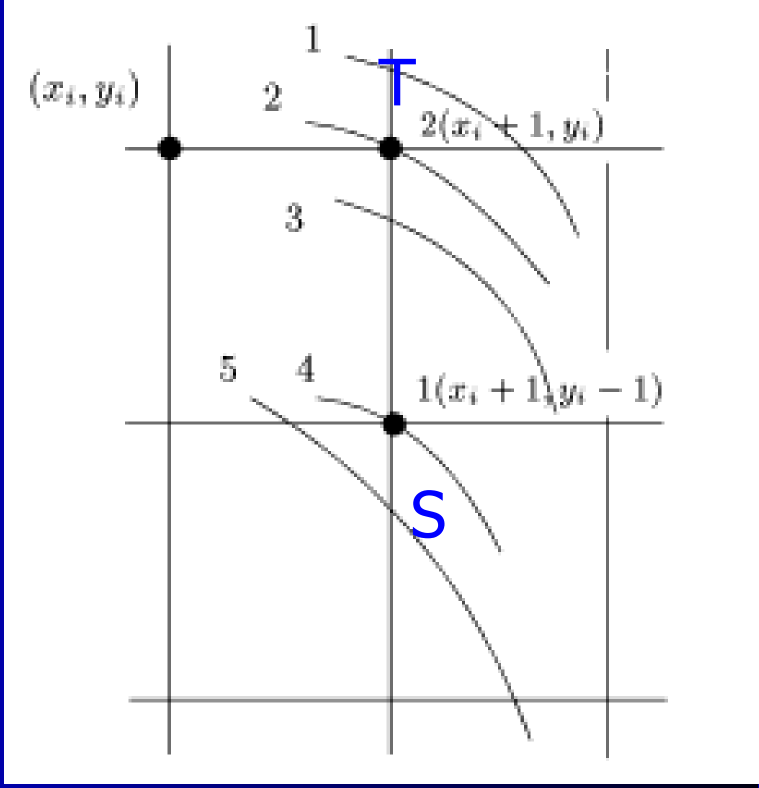
Каждая точка построенного фрагмента (1/8 часть окружности) может быть отображена (7 раз) с помощью преобразований симметрии для получения полной окружности. Преобразование может быть записано в следующем виде:

1. $x_c+x,\ y_c-y$
2. $x_c+y,\ y_c-x$
3. $x_c+y,\ y_c+x$
4. $x_c+x,\ y_c+y$
5. $x_c-x,\ y_c+y$
6. $x_c-y,\ y_c+x$
7. $x_c-y,\ y_c-x$
8. $x_c-x,\ y_c-y$



Построение окружности

- Рассмотрим построение 1/8 части окружности, расположенной во втором октанте.
- Реальная окружность может быть расположена относительно точек T и S одним из пяти способов 1-5.



Построение окружности

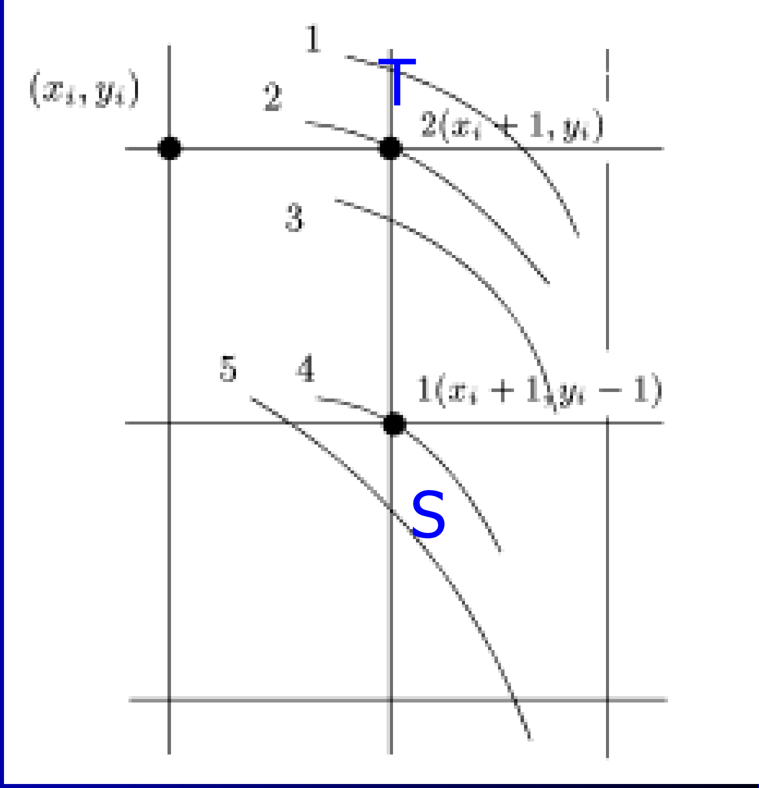
Если мы выбираем точку S, то тем самым говорим, что $(x_i+1)^2+(y_i-1)^2 \approx R^2$.

Если же выбираем точку T, то допускаем, что
$(x_i+1)^2+(y_i)^2 \approx R^2$.

Рассмотрим две погрешности D^i_1 и D^i_2:

$$\Delta^i_1 = (x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2$$

$$\Delta^i_2 = (x_1+1)^2+(y_i)^2-R^2$$



и контрольную величину
$\Delta^i = \Delta^i_1+\Delta^i_2$.

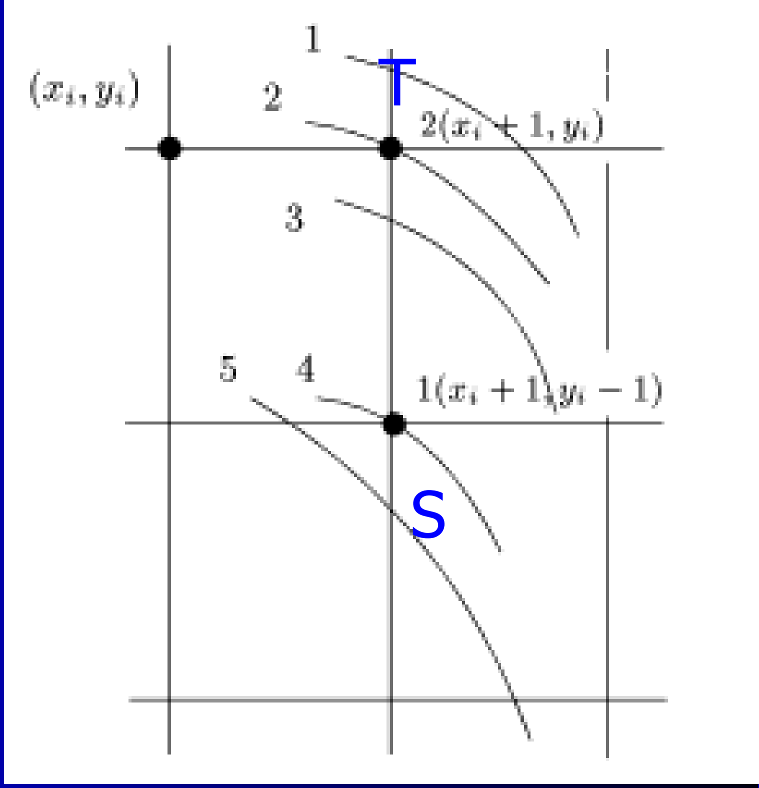
Построение окружности

При выборе точки, следующей за (x_i, y_i), станем руководствоваться следующим критерием:

если $\Delta^i > 0$, выберем точку S;

если $\Delta^i \le 0$, выберем точку T.

Обоснуем разумность такого выбора. Рассмотрим знаки погрешностей D^i_1 и D^i_2 и их влияние на знак контрольной величины Δ^i для всех пяти возможных положений окружности.



контрольная величина

$\Delta^i = \Delta^i_1 + \Delta^i_2$.

Построение окружности

Для положения 1.

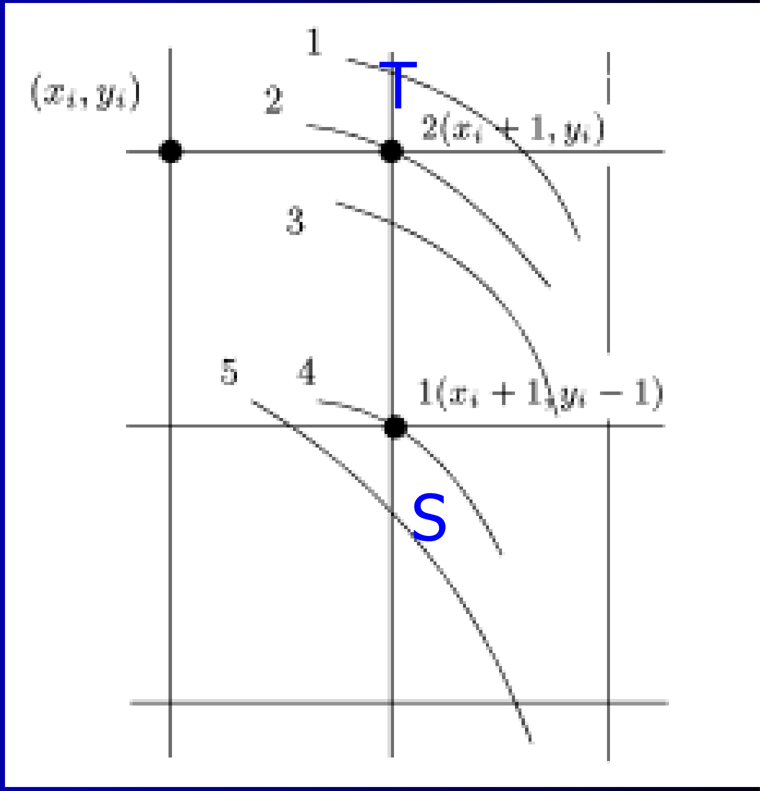
$\Delta^i_1 < 0,\ \Delta^i_2 < 0 \Rightarrow \Delta^i_1 + \Delta^i_2 < 0$

$\Rightarrow$ выбирается T.

Для положения 2.

$\Delta^i_1 < 0,\ \Delta^i_2 = 0 \Rightarrow \Delta^i_1 + \Delta^i_2 < 0$

$\Rightarrow$ выбирается T.



Контрольная величина

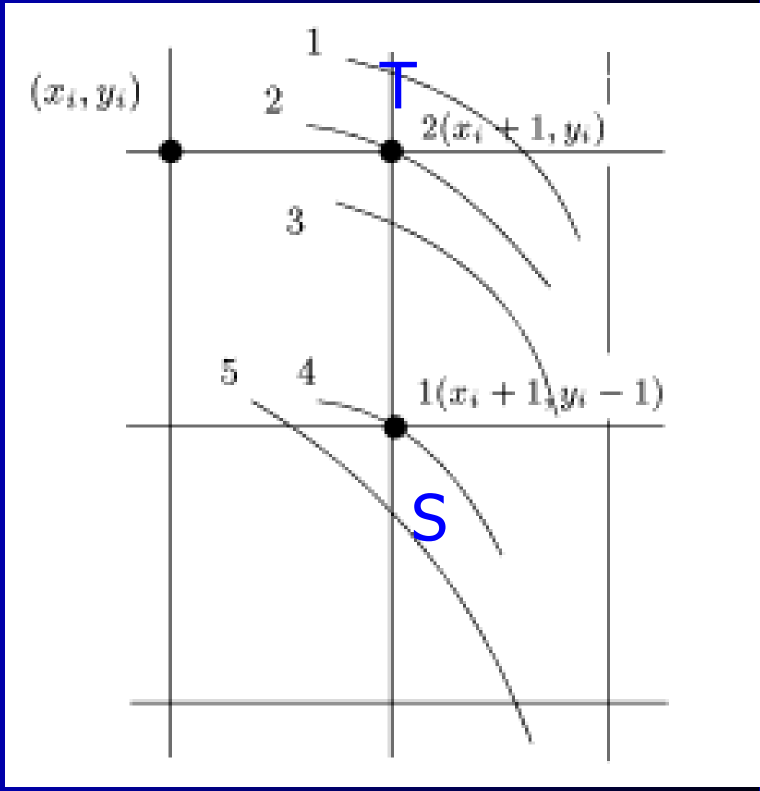
$\Delta^i = \Delta^i_1 + \Delta^i_2$.

Построение окружности

Для положения 3 возможны варианты (учитывая, что $\Delta^i_1 < 0$, $\Delta^i_2 > 0$).

Вариант 3.1. $|\Delta^i_1| \geq |\Delta^i_2| \Rightarrow \Delta^i_1+\Delta^i_2 < 0 \Rightarrow$ выбирается T.

Вариант 3.2. $|\Delta^i_1| < |\Delta^i_2| \Rightarrow \Delta^i_1+\Delta^i_2 > 0 \Rightarrow$ выбирается S.



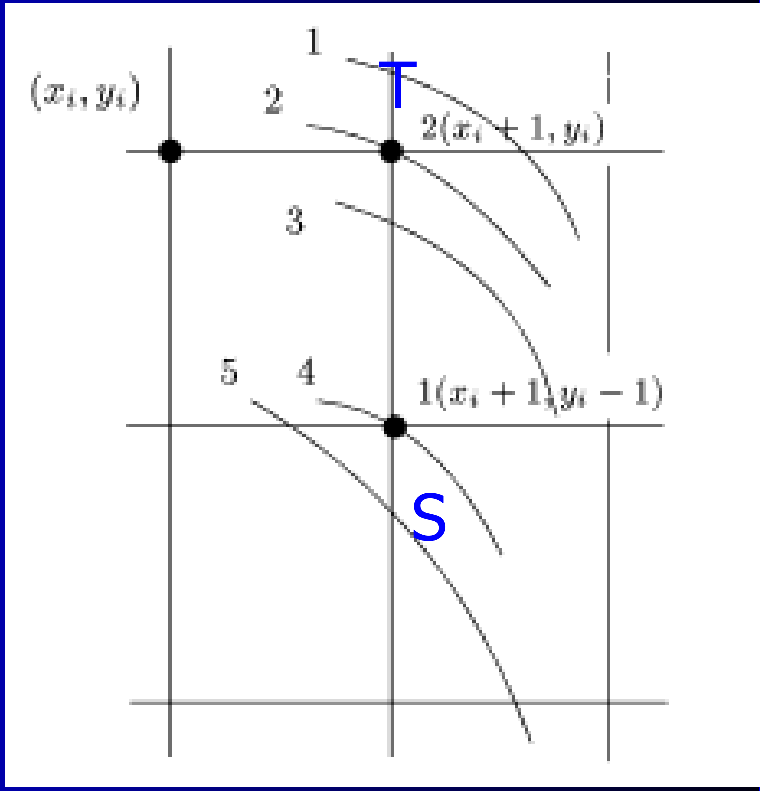
Контрольная величина $\Delta^i = \Delta^i_1+\Delta^i_2$.

Построение окружности

Для положения 4.

$\Delta^i{}_1 = 0,\ \Delta^i{}_2 > 0 \Rightarrow \Delta^i{}_1 + \Delta^i{}_2 > 0$

$\Rightarrow$ выбирается S.



Для положения 5.

$\Delta^i{}_1 > 0,\ \Delta^i{}_2 > 0 \Rightarrow \Delta^i{}_1 + \Delta^i{}_2 > 0$

$\Rightarrow$ выбирается S.

Контрольная величина

$\Delta^i = \Delta^i{}_1 + \Delta^i{}_2$.

Построение окружности

Получим выражение для контрольной величины Δ^i

$$\Delta^i = \Delta^i{}_1+\Delta^i{}_2 = (x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2+(x_i+1)^2+(y_i)^2-R^2 =$$
$$2x_i{}^2+2y_i{}^2+4x_i-2y_i+3-2R^2.$$

Выражение для Δ^{i+1} существенным образом зависит от выбора следующей точки. Необходимо рассмотреть два случая: $y_{i+1} = y_i$ и $y_{i+1} = y_i-1$.

Контрольная величина
$\Delta^i = \Delta^i{}_1+\Delta^i{}_2$.

Построение окружности

Выражение для Δ^{i+1} существенным образом зависит от выбора следующей точки. Необходимо рассмотреть два случая: $y_{i+1} = y_i$ и $y_{i+1} = y_i - 1$.

$$\Delta^{i+1}\ [\text{при } y_{i+1} = y_i] = 2x^2_{i+1}+2y^2_{i+1}+4x_{i+1}-2y_{i+1}+3-2R^2 =$$
$$2(x_i+1)^2+2y_i^2+4(x_i+1)-2y_i+3-2R^2 = \Delta^i+4x_i+6.$$

Обозначим: u = $4x_i+6$

$$\Delta^{i+1}\ [\text{при } y_{i+1} = y_i-1] = 2x^2_{i+1}+2y^2_{i+1}+4x_{i+1}-2y_{i+1}+3-2R^2 =$$
$$2(x_i+1)^2+2(y_i-1)^2+4(x_i+1)-2(y_i-1)+3-2R^2 = \Delta^i+4(x_i-y_i)+10.$$

Обозначим: v = $4(x_i-y_i)+10$

Построение окружности

Теперь, когда получено рекуррентное выражение для Δ^{i+1} через Δ^{i}, остается получить Δ^{1} (контрольную величину в начальной точке.) Она не может быть получена рекуррентно, ибо не определено предшествующее значение, зато легко может быть найдена непосредственно

$$x_1 = 0,\ y_1 = R \Rightarrow \Delta^1{}_1 = (0+1)^2+(R-1)^2-R^2 = 2-2R,$$

$$\Delta^1{}_2 = (0+1)^2+R^2-R^2 = 1$$

$$\Delta^1 = \Delta^1{}_1+\Delta^1{}_2 = 3-2R.$$

Алгоритм Брезенхема для построения окружности

Таким образом, алгоритм построения окружности, реализованный, основан на последовательном выборе точек; в зависимости от знака контрольной величины Δ^i выбирается следующая точка и нужным образом изменяется сама контрольная величина. Процесс начинается в точке (0, *r*), а первая точка имеет координаты (*xc*, *yc*+*r*). При *x* = *y* процесс заканчивается.

Пока контрольная величина Δ^i отрицательна следует продвигаться вдоль оси *X* и выбирать соответственно пиксель Ti

Если контрольная величина Δ^i положительна, то следует двигаться в диагональном направлении и выбирать пиксель Si

Алгоритм Брезенхема для построения окружности

Т.е. алгоритм можно записать в виде двух строк:

T: if ($\Delta^i \leq 0$), then {x=x+1,}

S: if ($\Delta^i > 0$), then {x=x+1,y= y-1}

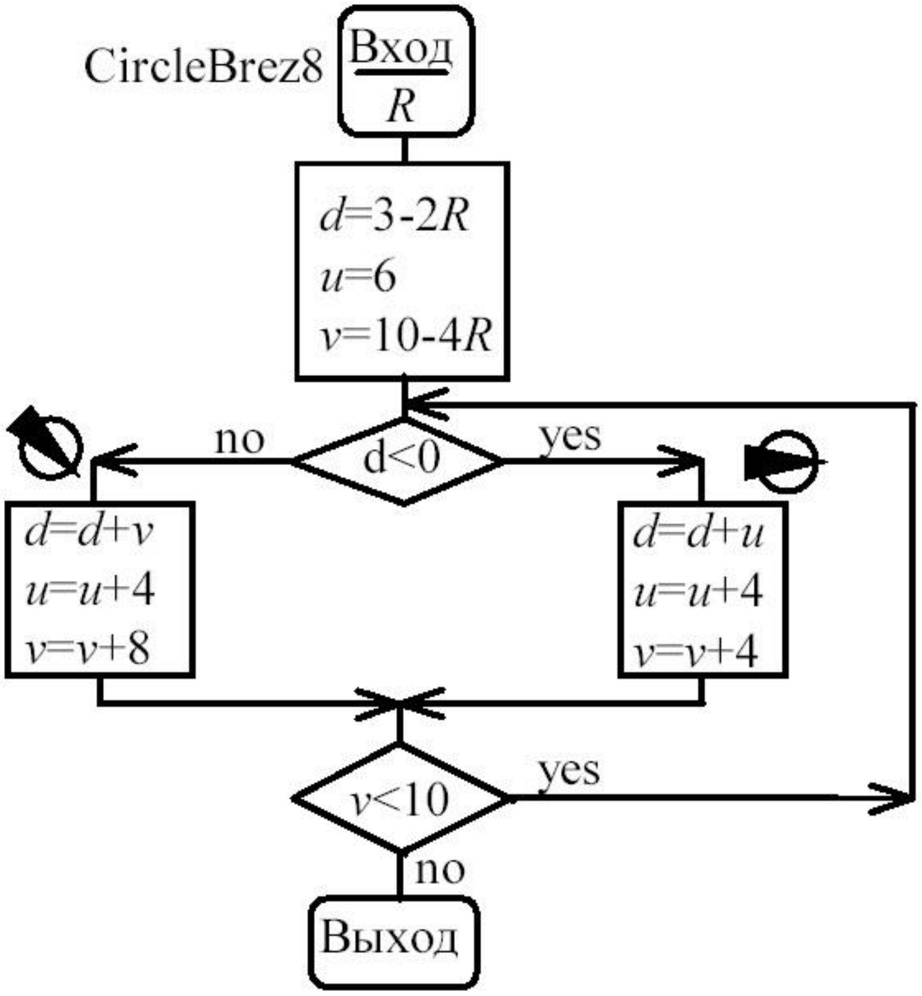
Вычисление ошибки на следующем шаге:

T: u = $4x_i+6$, $\qquad \Delta^{i+1} = \Delta^i$ +u

S: v = $4(x_i-y_i)+10$, $\qquad \Delta^{i+1} = \Delta^i$ + v

Алгоритм Брезенхема для построения окружности

Блок-схема алгоритма ->

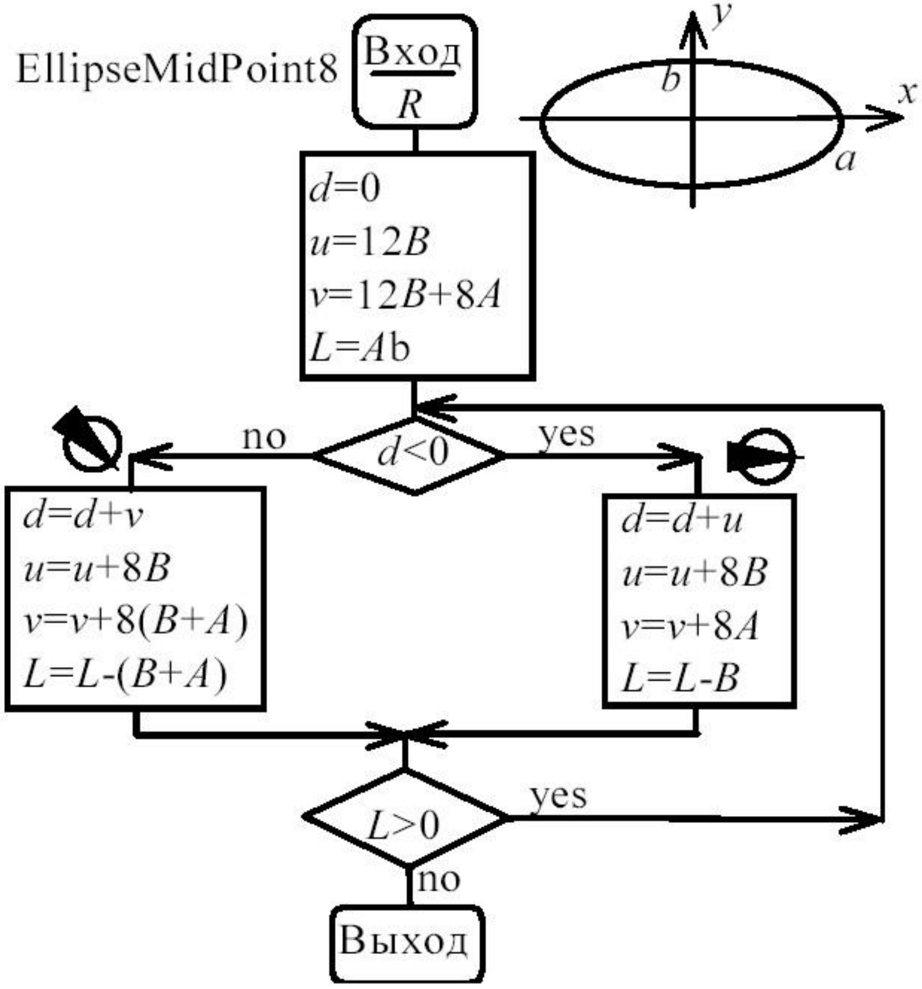


Достоинством данного алгоритма является его целочисленность и простота аппаратной реализации.

К недостаткам следует отнести необходимость задания координат центра окружности и ее радиуса целыми числами.

Алгоритм построения эллипса

Блок-схема алгоритма ->



Данный алгоритм с точки зрения производительности близок к алгоритму Брезенхема, однако следует отметить, что для его правильной работы необходимо представлять его переменные с достаточной разрядностью.

Алгоритм построения эллипса

Окружность, генерируемая этим алгоритмом, может иметь радиус не более 512, что является серьезным ограничением. Конечно, мы можем демасштабировать переменные, однако это внесет погреш-ность в работу алгоритма. В результате сгенерируется эллипс, близкий исходному, но не идентичный ему.