ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2001. Том 8. С. 76–92

УДК 519.1

РАСПОЗНАВАНИЕ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ЛИНЕЙНЫХ 3-УНИФОРМНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

Ю. М. Метельский, С. В. Суздаль, Р. И. Тышкевич

Let L_k^l be the class of edge intersection graphs of linear k-uniform hypergraphs. It is known that the recognition problem $G \in L_k^l$ is NP-complete for $k \geqslant 3$. But a property of "large" cliques for graphs in L_k^l and Ramsey theorem imply in the case $k = 3$ the existence of a polynomial algorithm deciding whether $G \in L_k^l$ for graphs G with sufficiently large vertex degrees. Note that, for $k \geqslant 4$ and any δ, this recognition problem remains NP-complete in the class of graphs with minimum vertex degree $\delta(G) \geqslant \delta$. So lower bounds on vertex degrees can be useful only in the case $k = 3$. Let δ^* be the minimal integer such that the recognition problem $G \in L_3^l$ is polynomially solvable for any graph with $\delta(G) \geqslant \delta^*$. In this paper we prove that $6 \leqslant \delta^* \leqslant 11$.

Введение

Рассматриваются *простые* графы, т.е. конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Граф пересечений ребер (или *реберный граф*) $L(H)$ гиперграфа H определяется условиями:

1) вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H;

2) две вершины смежны в $L(H)$ тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются.

Гиперграф называется k*-униформным*, если каждое его ребро содержит в точности k вершин. В *линейном* гиперграфе никакие два ребра не имеют более одной общей вершины. Класс графов пересечений ребер линейных k-униформных гиперграфов обозначим через L_k^l. Очевидно, что L_k^l совпадает с классом графов пересечений ребер гиперграфов, ранги которых не превышают k.

Класс L_2^l реберных графов простых графов изучается уже длительное время. В частности, известны эффективные алгоритмы для решения задачи распознавания $G \in L_2^l$ [4, 7, 14, 16].

Ситуация качественно меняется, если от $k = 2$ перейти к $k \geqslant 3$. В работе [5] доказано, что для фиксированного $k \geqslant 3$ задача распознавания $G \in L_k^l$ является NP-полной.

Рассматривались релаксации задачи распознавания $G \in L_k^l$ [2, 6, 9, 11–13, 15]. Большая часть упомянутых работ посвящена решению этой задачи при ограничении на степени вершин снизу, в том числе и настоящая работа.

Кликой мы называем произвольное множество попарно смежных вершин графа; *максимальная* клика максимальна относительно включения. Клика, содержащая в точности (не менее) k вершин, называется k*-кликой* (соответственно $\geqslant k$*-кликой*).

Семейство $Q = (C_1, C_2, \dots, C_q)$ клик графа G называется *краусcовым* k*-разбиением* графа, а клики C_i – *кластерами* этого разбиения, если выполняются следующие условия:

1) каждое ребро графа G входит ровно в один кластер C_i;

2) каждая вершина графа G входит не более, чем в k кластеров разбиения Q.

Важную роль играют следующие две теоремы.

Теорема 1 [3, 12]. *Граф принадлежит классу* $G \in L_k^l$, *если и только если существует краусcово* k*-разбиение этого графа.*

Keywords: *edge intersection graph, line graph, linear k-uniform hypergraph, Krausz partition*
2000 Mathematics Subject Classification: 05C62, 05C65, 05C70, 05C85

Теорема 2 [5, 6, 8, 13]. *Каждая максимальная* $\geqslant(k^2-k+2)$*-клика графа является кластером каждого его крауссова* k*-разбиения.*

Очевидно, что класс L_k^l является наследственным (т.е. замкнут относительно перехода к порожденному подграфу), и по теореме 1 звезда $K_{1,k+1}$ не принадлежит классу L_k^l. Поэтому окружение каждой вершины графа G содержит не более, чем k попарно несмежных вершин. Следовательно, из теоремы Рамсея вытекает, что каждая вершина графа G входит в некоторую максимальную $\geqslant(k^2-k+2)$-клику при условии, что степени вершин графа достаточно велики. Таким образом, теоремы 1 и 2, а также полиномиальная распознаваемость класса L_2^l влекут за собой в случае $k=3$ следующее утверждение: существует полиномиальный алгоритм, позволяющий для произвольного графа G с достаточно большими степенями вершин выяснить, принадлежит ли G классу L_3^l.

Первой априорной нижней оценкой для минимальной степени $\delta(G)$ вершин графа G, при которой задача распознавания

$$G \in L_3^l \tag{1}$$

полиномиально разрешима, была $\delta(G) \geqslant 75$ [12]. В [13] этот результат улучшен до $\delta(G) \geqslant 69$. Далее были $\delta(G) \geqslant 19$ [6, 11], $\delta(G) \geqslant 17$ [15], $\delta(G) \geqslant 13$ [9].

Заметим, что для $k \geqslant 4$ и любого δ задача распознавания $G \in L_k^l$ остается NP-полной в классе графов G с $\delta(G) \geqslant \delta$ [5]. Поэтому подобные ограничения снизу на степени вершин пригодны лишь в случае $k=3$.

Обозначим через δ^* такое минимальное целое, что задача распознавания (1) полиномиально разрешима при априорном условии $\delta(G) \geqslant \delta^*$.

Из NP-полноты задачи (1) следует, что $\delta^* \geqslant 2$, а из основного результата работы [9] – неравенство $\delta^* \leqslant 13$.

В настоящей работе уточняются нижняя и верхняя границы для δ^*: $6 \leqslant \delta^* \leqslant 11$. Для уточнения нижней границы использована та же идея, что в [5], но несколько усложнена приводимая там конструкция (разд. 1). В разд. 3 предлагается алгоритм решения задачи (1) при условии $\delta(G) \geqslant 11$ с временной сложностью $\mathcal{O}(nm)$, где n и m – соответственно число вершин и ребер тестируемого графа G. Алгоритм основан на том же, что и в [9], методе расширяющегося фрагмента, сводящем задачу (1) к задаче распознавания $G \in L_2^l$, решение которой хорошо известно. Однако уменьшение оценки для δ^* потребовало более глубокого проникновения в геометрию клик крауссовых разбиений (разд. 2). Последнее в свою очередь привело к более простому алгоритму (разд. 3).

1. О нижней границе для числа δ^*

Множество вершин графа G обозначается символом VG. Определим операцию “приклеивания” полного графа K_l к фиксированной вершине v графа G следующим образом: результат приклеивания G' получается из G после добавления $l-1$ новых вершин $u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}$ и множества ребер полного графа с множеством вершин $\{v, u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}\}$. Тем самым

$$G' = G \cup K_l, \quad VG \cap VK_l = \{v\}.$$

Приклеивание двух графов K_l к вершине v означает последовательное приклеивание K_l и еще раз K_l к вершине v.

Обратимся к следующим распознавательным задачам A, B и C.

Задача A. *Вход:* Граф G с $\delta(G) \geqslant 5$.

Вопрос: Верно ли, что $G \in L_3^l$?

Задача B. *Вход:* Множество булевых переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и такой набор $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ элементарных дизъюнкций над X, что каждая дизъюнкция d_j содержит не более трех литералов и каждая переменная x_i входит не больше, чем в три дизъюнкции из D.

Вопрос: Существует ли такая функция $t : X \longrightarrow \{0, 1\}$, что в точке $(t(x_1), t(x_2), \dots, t(x_n))$ каждая дизъюнкция d_j истинна?

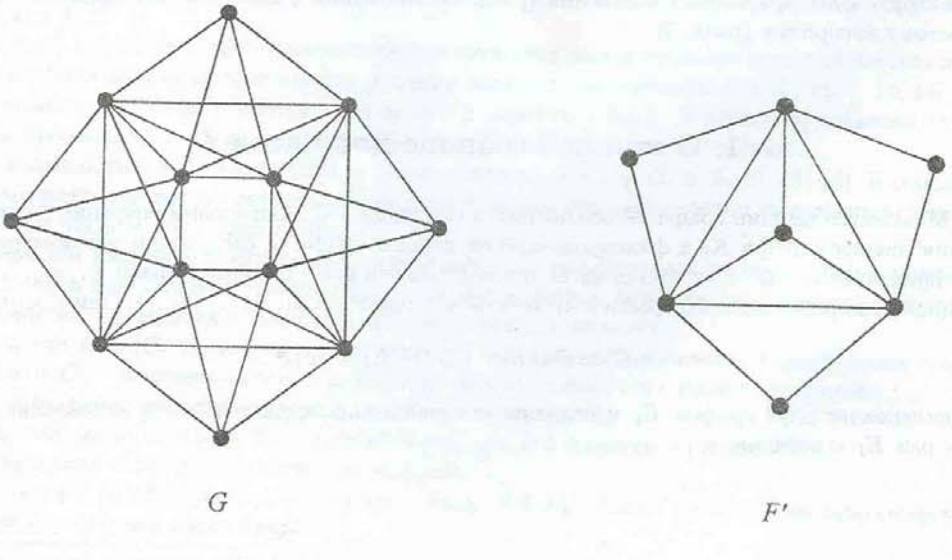
Задача C есть задача B с дополнительным условием на вход: каждый из литералов x_i и $\overline{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, входит хотя бы в одну, но не более, чем в две дизъюнкции из D.

Известно, что задача B является NP-полной [1, с. 332]. Легко видеть, что она сводится к задаче C за полиномиальное время, т.е. задача C является NP-полной. Действительно, если в задаче B литерал x_i не входит ни в одну дизъюнкцию из D, то положим $t(x_i) = 0$ и удалим переменную x_i из X, а из D – все содержащие эту переменную дизъюнкции. Аналогично поступаем для литерала $\overline{x}_i$ $(t(x_i) = 1)$. Уменьшив таким образом число булевых переменных и число элементарных дизъюнкций, получим вход задачи C.

Теорема 3. *Задача распознавания A является NP-полной.*

Доказательство. Очевидно, что задача принадлежит классу NP. Сведем к ней NP-полную задачу C. Для этого по множествам X и D из входа задачи C построим за полиномиальное время такой граф $G_{X,D}$, что $G_{X,D} \in L_3^l$ тогда и только тогда, когда существует требуемая функция t.

Пусть G и F' – графы, изображенные на рис. 1. Приклеив к вершине степени 3 графа F' полный граф K_8, получим граф F (рис. 2; на рис. 2, 3 и 5 приклеенные графы K_8 изображаются в виде висячего ребра).



G F'

Рис. 1.

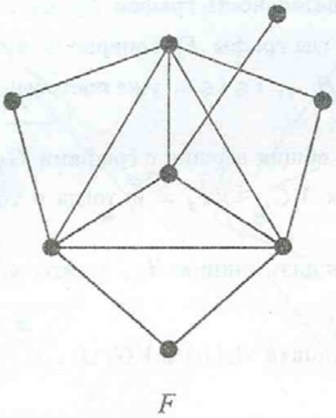


Рис. 2.

Каждой переменной x_i поставим в соответствие копию G_i графа G, а каждой дизъюнкции d_j – копию F_j графа F. Итак, имеем два списка графов

$$G_1, G_2, \ldots, G_n \text{ и } F_1, F_2, \ldots, F_m, \quad G_i \cong G, \ F_j \cong F.$$

В каждом графе G_i, $i = 1, \ldots, n$, выделим четыре вершины $x_1(i), x_2(i), \overline{x}_1(i), \overline{x}_2(i)$ (как это показано на рис. 3), первые две из которых будут соответствовать литералу x_i, а две другие – литералу $\overline{x}_i$. В каждом графе F_j, $j = 1, \ldots, m$, выделим три вершины $l_1(j), l_2(j), l_3(j)$ (рис. 3), которые будут биективно соответствовать трем литералам дизъюнкции d_j.

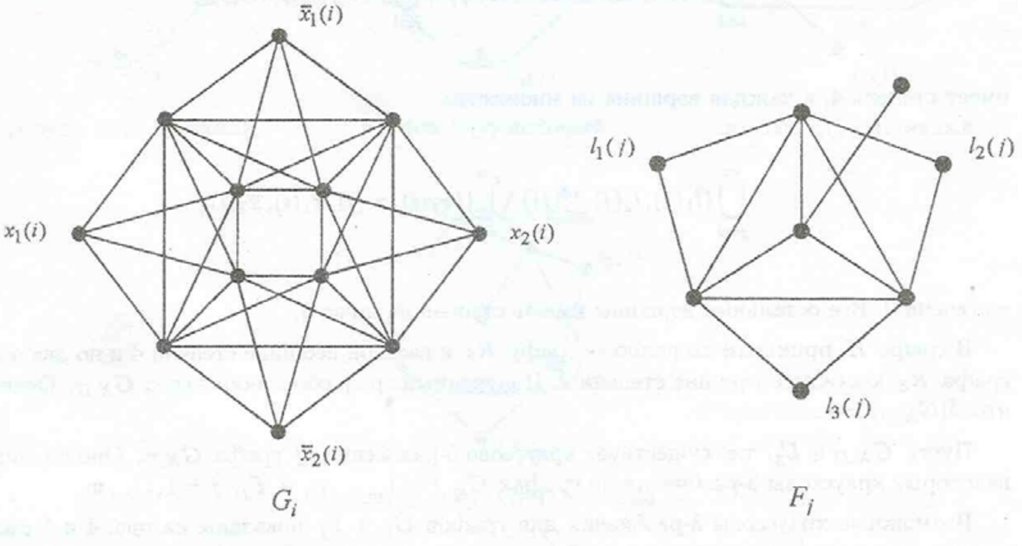


Рис. 3.

Построим индуктивно последовательность графов $H_0, H_1, \ldots, H_n = H$:

1) $H_0 = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m$, где графы F_j попарно не имеют общих вершин.

2) Если графы $H_0, H_1, \ldots, H_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, уже построены, то строим граф $H_i = G_i \cup H_{i-1}$, соблюдая следующие условия:

- граф G_i, $i \geqslant 2$, не имеет общих вершин с графами $G_1, \ldots, G_{i-1}$;
- $|VG_i \cap VF_j| \leqslant 1$, причем $VG_i \cap VF_j \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда переменная x_i входит в дизъюнкцию d_j;
- если литерал x_i входит в дизъюнкцию d_{j_1}, а литерал $\overline{x}_i$ – в дизъюнкцию d_{j_2} и

$$r = \min\{k : l_k(j_1) \notin VG_1 \cup \ldots \cup VG_{i-1}\},$$

$$s = \min\{k : l_k(j_2) \notin VG_1 \cup \ldots \cup VG_{i-1}\},$$

то полагаем $x_1(i) = l_r(j_1) \in VG_i \cap VF_{j_1}$, $\overline{x}_1(i) = l_s(j_2) \in VG_i \cap VF_{j_2}$. Если литерал x_i (литерал $\overline{x}_i$) входит еще и в дизъюнкцию d_{j_3} и

$$t = \min\{k : l_k(j_3) \notin VG_1 \cup \ldots \cup VG_{i-1}\},$$

то полагаем $x_2(i) = l_t(j_3) \in VG_i \cap VF_{j_3}$ (соответственно $\overline{x}_2(i) = l_t(j_3) \in VG_i \cap VF_{j_3}$).

Заметим, что в графе H каждая вершина из множества

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{x_1(i), x_2(i), \overline{x}_1(i), \overline{x}_2(i)\} \setminus \bigcup_{j=1}^{m}\{l_1(j), l_2(j), l_3(j)\}$$

имеет степень 4, а каждая вершина из множества

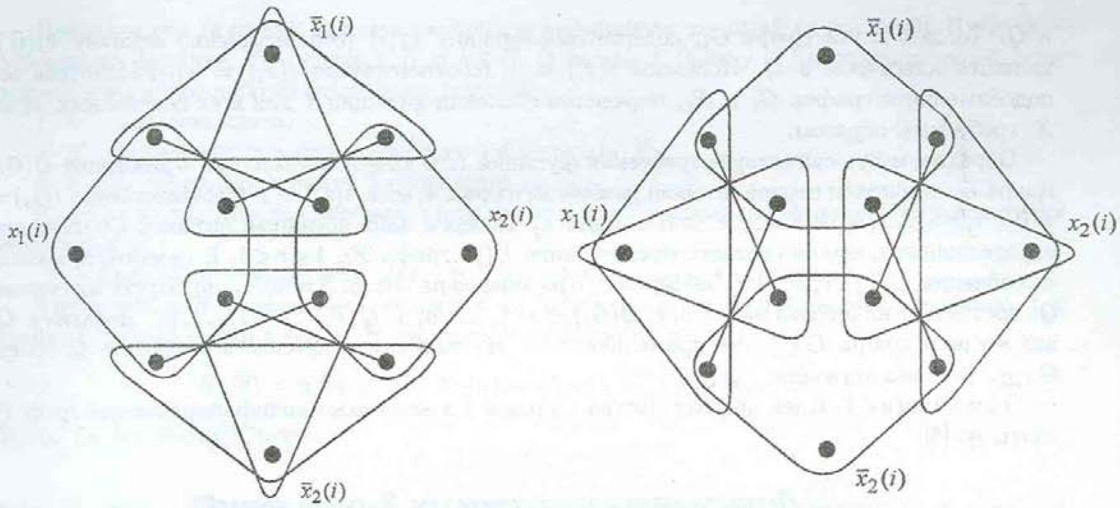
$$\bigcup_{j=1}^{m}\{l_1(j), l_2(j), l_3(j)\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n}\{x_1(i), x_2(i), \overline{x}_1(i), \overline{x}_2(i)\}$$

– степень 2. Все остальные вершины имеют степень не ниже 5.

В графе H приклеим по полному графу K_8 к каждой вершине степени 4 и по два полных графа K_8 к каждой вершине степени 2. Полученный граф обозначим через $G_{X,D}$. Очевидно, что $\delta(G_{X,D}) = 5$.

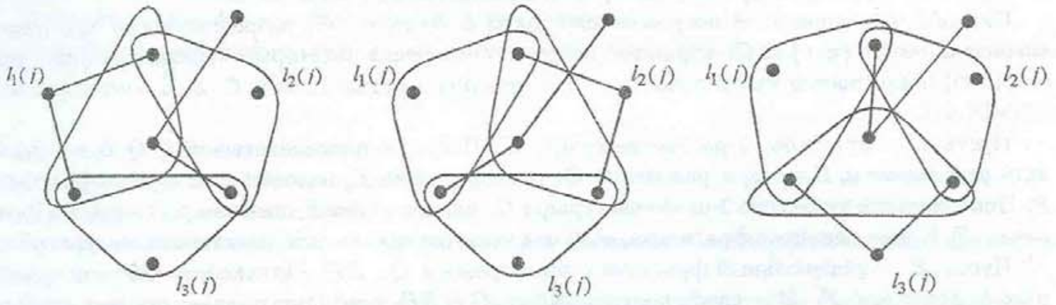
Пусть $G_{X,D} \in L_3^l$, т.е. существует краусcово 3-разбиение Q графа $G_{X,D}$. Оно индуцирует некоторые краусcовы 3-разбиения на графах G_i, $i = 1, \ldots, n$, и F_j, $j = 1, \ldots, m$.

Возможные краусcовы 3-разбиения для графов G_i и F_j показаны на рис. 4 и 5 соответственно (где каждое из разбиений изображено в виде гиперграфа, ребрами которого являются кластеры соответствующего разбиения). Два возможных разбиения графа G_i поставим в соответствие значениям $t(x_i) = 1$ и $t(x_i) = 0$ для переменной x_i (см. рис. 4). Пусть также каждое разбиение графа F_j определяет, какой из литералов дизъюнкции d_j принимает истинное значение (см. рис. 5).

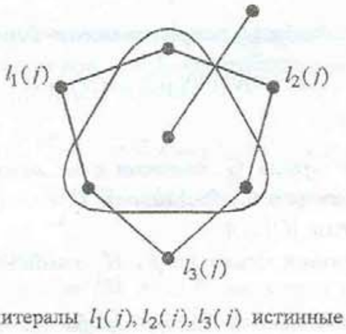


$t(x_i) = 1$ $t(x_i) = 0$

Рис. 4.



литерал $l_1(j)$ истинный литерал $l_2(j)$ истинный литерал $l_3(j)$ истинный



литералы $l_1(j), l_2(j), l_3(j)$ истинные

Рис. 5.

Пусть графы G_i и F_j таковы, что $VG_i \cap VF_j \ni x_s(i) = l_t(j)$ $(VG_i \cap VF_j \ni \overline{x}_s(i) = l_t(j))$, $1 \leqslant s \leqslant 2$, $1 \leqslant t \leqslant 3$, и треугольник графа F_j, содержащий вершину $l_t(j)$, не является кластером в Q. Тогда 5-клика графа G_i, содержащая вершину $x_s(i)$ (соответственно вершину $\overline{x}_s(i)$), является кластером в Q. Положим $t(x_i) = 1$ (соответственно $t(x_i) = 0$). Рассмотрев все подобные пары графов G_i и F_j, определим значения функции t для всех переменных x_i из X требуемым образом.

Обратно, пусть существует требуемая функция t. В качестве крауссова 3-разбиения $Q(G_i)$ графа G_i выбираем первое (второе) разбиение на рис. 4, если $t(x_i) = 1$ (соответственно $t(x_i) = 0$), $i = 1, \ldots, n$. В каждой дизъюнкции d_j выберем один истинный литерал. Считаем для определенности, что он соответствует вершине $l_r(j)$ графа F_j, $1 \leqslant r \leqslant 3$. В качестве крауссова 3-разбиения $Q(F_j)$ графа F_j выберем r-е разбиение на рис. 5, $j = 1, \ldots, m$. Пусть множество Q' состоит из кластеров разбиений $Q(G_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и $Q(F_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Добавив к Q' все 8-клики графа $G_{X,D}$, не принадлежащие H, получим крауссово 3-разбиение Q графа $G_{X,D}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Идея доказательства теоремы 3 и несколько модифицированный граф F_j взяты из [5].

2. Фрагменты крауссовых 3-разбиений

Множество ребер графа G обозначим через EG. Мы пишем $u \sim v$, если вершины u и v смежны. Если $N(v)$ $(= N_G(v))$ – окружение вершины v в G, то $|N(v)| = \deg v$ $(\deg_G(v))$ – *степень* вершины v в G, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$, $\delta(G)$ – минимум степеней вершин графа G.

Всюду ниже предполагается, что $G \in L_3^l$. Максимальная $\geqslant$8-клика называется *большой* (теорема 2, $8 = 3^2 - 3 + 2$), а максимальные 7- и 6-клики – *предбольшими*.

Напомним факты из предыдущих работ, используемые в этой статье.

Скажем, что вершина v *покрывается* кликой C, если $v \in C$; ребро с концами u, v *покрывается* C, если $\{u, v\} \subseteq C$; вершина (ребро) *покрывается* некоторым семейством клик, если она (оно) покрывается какой-либо кликой из этого семейства. Клики C и D *касаются*, если $|C \cap D| = 1$.

Пусть Q – крауссово 3-разбиение графа G. Непустое подсемейство $F \subseteq Q$ будем называть *фрагментом*. Кластеры разбиения Q, составляющие F, назовем *кластерами* фрагмента F. Произвольное крауссово 3-разбиение графа G, включающее F, назовем *расширением* фрагмента F. Клика *касается* фрагмента, если она касается какого-либо кластера этого фрагмента.

Пусть F – произвольный фрагмент с расширением Q, EF – множество ребер, покрываемых фрагментом F, H – граф, полученный из $G - EF$ в результате удаления всех изолированных вершин. Следующие леммы 1–6 приведены в [9].

Лемма 1. *Если* $\deg v \geqslant 19$ *для* v *из* VG, *то в* G *есть большая клика, содержащая вершину* v.

Лемма 2. *Если вершина* v *графа* G *покрыта точно двумя кластерами* C_1 *и* C_2 *из* F *и*

$$C = N(v) \setminus (C_1 \cup C_2) \neq \emptyset,$$

то $C \cup \{v\} \in Q \setminus F$.

Лемма 3. *Если вершина* v *графа* G *смежна с не меньше, чем четырьмя вершинами, входящими в один и тот же кластер* C *фрагмента* F, *то* $v \in C$. *В частности,* C *является максимальной кликой графа, если* $|C| \geqslant 4$.

Лемма 4. *Каждая предбольшая клика графа* H, *касающаяся фрагмента* F, *включается в* $Q \setminus F$.

Лемма 5. *Пусть* C *– максимальная клика графа* H, $v \in VH \setminus C$. *Пусть, далее, в* C *есть вершина* b, *смежная с* v, *и не менее пяти вершин, не смежных с* v. *Тогда* $C \in Q \setminus F$.

Замечание 2 [9]. Лемма 5 интересна применительно к предбольшим кликам, когда из условия леммы вытекает соотношение

$$C \cap N(v) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad |C| = 6, \\ 2 & \text{для} \quad |C| = 7. \end{cases}$$

Приведем еще (в слегка видоизмененной форме) понятие хорошей клики из [9]. Пусть b – непокрытая вершина, C – клика в H и $b \in C$. Вершину b (клику C) назовем *хорошей*, если выполняется какое-либо из следующих условий:

1) C – большая клика;

2) C – предбольшая клика, касающаяся фрагмента F;

3) b и C такие, как в лемме 5 (замечание 2).

Следствие 1. *Каждая хорошая клика является кластером любого крауссова расширения фрагмента F.*

Лемма 6. *Если $\deg_H(v) \geqslant 15$ для $v \in VH$, то v – хорошая вершина.*

Фиксируем в H вершину a, покрытую F. Пусть $\mathrm{ecc}(a)$ – эксцентриситет вершины a в графе H, $N_k[a]$ – шар в графе H радиуса k с центром в вершине a,

$$N_k(a) = N_k[a] \setminus \{a\},\ N_k\{a\} = N_k[a] \setminus N_{k-1}[a],\ N_0[a] = \{a\}.$$

Пусть $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{ecc}(a)$. Список

$$F_k = \{C_1, C_2, \ldots, C_l\}$$

клик C_i графа H назовем *k-квазифрагментом* (или просто *квазифрагментом*), а сами эти клики – *кластерами* квазифрагмента F_k, если выполняются следующие условия:

1) каждое ребро графа H, инцидентное вершине из $N_{k-1}[a]$, покрыто F_k;

2) при $k < \mathrm{ecc}(a)$ каждый кластер C_i содержит вершину из $N_{k-1}[a]$;

3) при $k = \mathrm{ecc}(a)$ каждое ребро, оба конца которого включаются в $N_k[a]$, покрыто F_k;

4) никакие два кластера C_i не имеют более одной общей вершины;

5) каждая вершина графа H принадлежит не больше, чем трем кластерам из $F \cup F_k$.

Следующие очевидные свойства квазифрагментов ниже используются без ссылок:

i) объединение кластеров k-квазифрагмента совпадает с $N_k[a]$;

ii) каждый k-квазифрагмент F_k однозначно определяет убывающую последовательность

$$F_k \supset F_{k-1} \supset \cdots \supset F_1$$

k-, $k-1$-, ..., 1-квазифрагментов.

Назовем F_1 *основой* квазифрагмента F_k.

iii) $F_{\mathrm{ecc}(a)} \cup F$ является фрагментом;

iv) для любого расширения Q фрагмента F существует единственный квазифрагмент $F_{\mathrm{ecc}(a)}$, включающийся в $Q \setminus F$.

Заметим, что леммы 2 и 3 верны и для квазифрагментов, при этом сохраняются доказательства из [9].

Ниже $D_k(v)$ $(D'_k(v))$ означает число кластеров квазифрагмента F_k (соответственно F'_k), покрывающих вершину v.

Лемма 7. *Пусть G удовлетворяет следующим условиям:*

1) для некоторого $k \geqslant 2$ существует $k+1$-квазифрагмент;

2) для каждой последовательности

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{k-1} \subset F_k \subset F_{k+1} \tag{2}$$

квазифрагментов и любой вершины $v \in N_{k-1}\{a\}$ верно неравенство $D_{k-1}(v) \geqslant 2$;

3) $\delta(G) \geqslant 9$;

4) в $N_k[a]$ нет хороших вершин.

Тогда для каждой последовательности (2) $F_1 \cup F$ является фрагментом .

Доказательство. В силу условия 1) $\mathrm{ecc}(a) \geqslant k+1$, поэтому существует последовательность квазифрагментов

$$F'_1 \subset F'_2 \subset \cdots \subset F'_{k+1},$$

включающихся в $Q \setminus F$. Ясно, что $F'_k \cup F$ – фрагмент. Пусть (2) – произвольная последовательность квазифрагментов. Нетривиальна ситуация $F_1 \neq F'_1$. Покажем, что в этом случае $F_k \cup F$ также является фрагментом.

Пусть X – список клик, дополняющий объединение $F'_k \cup F$ до некоторого крауссова 3-разбиения. Покажем, что список $F_k \cup F \cup X$ также является крауссовым 3-разбиением. По условию 2) каждая вершина v из $N_{k-1}\{a\}$ принадлежит не больше, чем одному кластеру как для $F_k \setminus F_{k-1}$, так и для $F'_k \setminus F'_{k-1}$. Следовательно, ребро xy из EH, где $x, y \in N_k\{a\}$, покрывается фрагментом F_k, если и только если в $N_{k-1}\{a\}$ есть вершина, смежная одновременно с x и y. Аналогично для F'_k. Поэтому F_k и F'_k покрывают одни и те же множества вершин и ребер. Теперь очевидно, что единственным обстоятельством, нарушающим определение крауссова 3-разбиения применительно к $F_k \cup F \cup X$, могло бы оказаться следующее: существует не покрытая фрагментом F вершина x из $N_k\{a\}$, входящая точно в один кластер из F'_k и в два кластера из F_k. Пусть x – такая вершина,

$$x \in C',\ C' \in F'_k,\ x \in C_i \cap N_k\{a\},\ C_i \in F_k,\ v_i \in C_i \cap N_{k-1}\{a\},\ i = 1, 2.$$

Очевидно, что $\{x\} = C_i \cap N_k\{a\}$, $i = 1, 2$. Действительно, пусть, например,

$$y \in C_1 \cap N_k\{a\},\ y \neq x.$$

Поскольку каждая вершина из $N_{k-1}\{a\}$, смежная с x, должна входить в C', то

$$v_i \in C',\ i = 1, 2,\ \text{ и }\ y \in C'.$$

Значит, $y \sim v_2$ и $y \in C_2 \cap N_2\{a\}$. Таким образом, $\{x, y\} \subseteq C_1 \cap C_2$. Последнее противоречит определению квазифрагмента.

Ясно, что каждое из множеств $C' \setminus \{x\}$ и $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ совпадает с множеством вершин из $N_{k-1}\{a\}$, смежных с x. Так что

$$C' = C_1 \cup C_2,$$

и каждая вершина из C_1, отличная от x, смежна с каждой вершиной из C_2. Согласно лемме 3,

$$|C_i| \leqslant 3,\ i = 1, 2.$$

С другой стороны, вершина x не покрыта. Поэтому существует единственный кластер C из $F_{k+1} \setminus F_k$, покрывающий x. По условию 3) леммы $|C| \geqslant 6$ и x – хорошая вершина. Последнее противоречит условию 4). Доказано, что $F_k \cup F$, а вместе с тем и $F_1 \cup F$ являются фрагментами. Лемма доказана.

Клику графа H, содержащуюся в $N_k[a]$, назовем *особой*, если она является кластером каждого $k+1$-квазифрагмента.

Лемма 8. *Пусть b – вершина из $N_1(a)$, не являющаяся хорошей, а*

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \tag{3}$$

– последовательность квазифрагментов. Пусть, далее, в $F_2 \setminus F_1$ есть кластер C, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $b \in C$;

2) $|C \cap N_2\{a\}| \geqslant 4$;

3) клика C не является особой.

Тогда

$$D_3(v) \geqslant 2, \tag{4}$$

если $v \in N_3\{a\} \cap N(\alpha)$ для какой-либо вершины α из $N_2\{a\} \cap N(b)$.

Доказательство. Положим $B = C \cap N_2\{\alpha\}$. В силу условий 1), 2) и леммы 3 получаем: $|B| = 4$, $C \subseteq N_2(a)$, клика C максимальна в H. Согласно условию 3), существует 3-квазифрагмент F'_3, для которого C не является кластером. Относительно последовательности квазифрагментов

$$F'_1 \subset F'_2 \subset F'_3$$

элементы множества B распределятся по двум кластерам C'_1 и C'_2, причем

$$b \in C'_i,\ C'_i \in F'_2 \setminus F'_1,\ |C'_i \cap B| = 2,\ i = 1,2.$$

Вершина α из формулировки леммы должна входить в один из кластеров C'_i. Например, пусть $\alpha \in C'_1$. Положим

$$C'_1 \cap B = \{\alpha_1, \alpha_2\},\ \ C'_2 \cap B = \{\alpha_3, \alpha_4\}. \tag{5}$$

Если $\alpha \in C$, то ребра $\alpha\alpha_3$ и $\alpha\alpha_4$ не покрываются квазифрагментом F'_2, а ребро $\alpha_3\alpha_4$ покрывается. Следовательно, упомянутые ребра должны входить в разные кластеры из F'_3. Итак,

$$C'_{\alpha\alpha_3},\ C'_{\alpha\alpha_4} \in F'_3 \setminus F'_2.$$

Один из этих кластеров содержит вершину v, например, $v \in C'_{\alpha\alpha_3}$. Но тогда $v \sim \alpha_3$, вершина v принадлежит двум разным кластерам квазифрагмента F_3, неравенство (4) доказано.

Если же $\alpha \notin C$, то, согласно (5), $\alpha \sim \alpha_1$ и $\alpha \sim \alpha_2$, v входит в один из кластеров $C'_{\alpha\alpha_i}$, $i = 1,2$. Пусть, например, $v \in C'_{\alpha\alpha_1}$. Но тогда вершина v смежна с вершиной α_1 из C, и имеем ситуацию, описанную выше. Лемма доказана.

Скажем, что вершина b из $N_1\{a\}$ *удовлетворяет* 7*-условию*, если $\deg_{N_2\{a\}}(b) \geqslant 7$. Вершину α из $N_2\{a\}$ назовем *подходящей*, если она смежна с какой-либо из вершин, удовлетворяющих 7-условию. Из леммы 8 вытекает

Следствие 2. *Если в $N_1[a]$ нет хороших вершин, а в $N_2[a]$ нет особых клик, то для каждой вершины v из $N_3\{a\}$, смежной с некоторой подходящей вершиной, и любой последовательности квазифрагментов (3) верно неравенство (4).*

Доказательство. Очевидно, что каждая вершина b, для которой выполняется 7-условие, покрывается кластером C, удовлетворяющим условиям леммы 8.

Пусть $v \in N_3\{a\} \cap N(\alpha)$, где $\alpha \in N_2\{a\} \cap N(b)$. Если $\alpha \notin C$, то, как показано в конце доказательства леммы 8, v смежна еще и с вершиной из $N_2\{a\} \cap N(b)$, входящей в C. В любом случае нужное непосредственно вытекает из леммы 8.

Положим $p = |N_1[a]|$. Заметим, что если в $N_1[a]$ нет хороших клик, то $p \leqslant 9$.

Теорема 4. *Пусть $G \in L^l_3$, $\delta(G) \geqslant 11$. Пусть, далее, в $N_k[a]$ нет хороших вершин и особых клик, если*

$$k = \begin{cases} 3 & \text{при } p = 8 \text{ или } p = 9, \\ 4 & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Тогда для любого $k+1$-квазифрагмента F_{k+1} с основой F_1 объединение $F \cup F_1$ является фрагментом.

Доказательство. Заметим, что при $p \geqslant 6$ никакой из 1-квазифрагментов F_1 не содержит $\geqslant 6$-кластеров, ибо вершина a не является хорошей. Так что для $p \geqslant 6$

$$F_1 = \{C_1, C_2\},\ |C_i| \leqslant 5,\ i = 1,2,\ p \leqslant 9.$$

Поскольку в $N_2[a]$ нет особых клик, то существуют два 3-квазифрагмента с разными основами. Пусть

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3,\ F'_1 \subset F'_2 \subset F'_3$$

– две последовательности квазифрагментов с $F_1 \neq F'_1$,

$$F'_1 = \{C'_1, C'_2\},\ |C'_i| = p'_i,\ |C_i| = p_i,\ i = 1,2.$$

Имеем $p_i \leqslant 5$, $p'_i \leqslant 5$. Кластер квазифрагмента F_i, содержащий вершины x и y, обозначим через C_{xy}. Тот же смысл имеет C'_{xy} для квазифрагмента F'_i.

Пусть теперь α – произвольная вершина из $N_2\{a\}$. Отдельно рассмотрим варианты 1)–5), соответствующие разным значениям p.

В случаях $p = 9, 8$ мы покажем, что $D_2(\alpha) \geqslant 2$. Тогда утверждение теоремы будет следовать из леммы 7 при $k = 3$.

1) Очевидно, что при $p = 9$ $(p_1, p_2) = (p_1', p_2') = (5, 5)$. Положим

$$C_1 = \{a, b, c, d, e\}, \ C_2 = \{a, f, g, h, i\}. \tag{6}$$

Будем считать без ограничения общности (с учетом леммы 3), что

$$C_1' = \{a, b, c, f, g\}, \ C_2' = \{a, d, e, h, i\}. \tag{7}$$

Переходим к 2-квазифрагментам. Из определения квазифрагмента и формул (6) и (7) вытекает, что F_2' должен покрывать все ребра bd, be, cd, ce, fh, fi, gh, gi, а F_2 – bf, bg, cf, cg, dh, di, eh, ei. Следовательно, есть кластеры

$$C_{bf}, \ C_{bg}, \ C_{cf}, \ C_{cg}, \ C_{dh}, \ C_{di}, \ C_{eh}, \ C_{ei};$$

$$C_{bd}', \ C_{be}', \ C_{cd}', \ C_{ce}', \ C_{fh}', \ C_{fi}', \ C_{gh}', \ C_{gi}'.$$

Других кластеров в F_2 и F_2' нет, ибо каждая вершина из $N_1[a]$ вошла ровно в три кластера. Итак,

$$F_2 \setminus F_1 = \{C_{bf}, \ C_{bg}, \ C_{cf}, \ C_{cg}, \ C_{dh}, \ C_{di}, \ C_{eh}, \ C_{ei}\},$$

$$F_2' \setminus F_1' = \{C_{bd}', \ C_{be}', \ C_{cd}', \ C_{ce}', \ C_{fh}', \ C_{fi}', \ C_{gh}', \ C_{gi}'\}.$$

Квазифрагменты F_2 и F_2' показаны на рис. 6. Здесь максимальный прямолинейный отрезок изображает кластер, а точка – вершину, входящую в этот кластер. Только для кластеров F_1 и F_1' отмечены все составляющие их вершины. Легко понять, что

$$D_2(\alpha) \geqslant 2 \quad \text{и} \quad D_2'(\alpha) \geqslant 2. \tag{8}$$

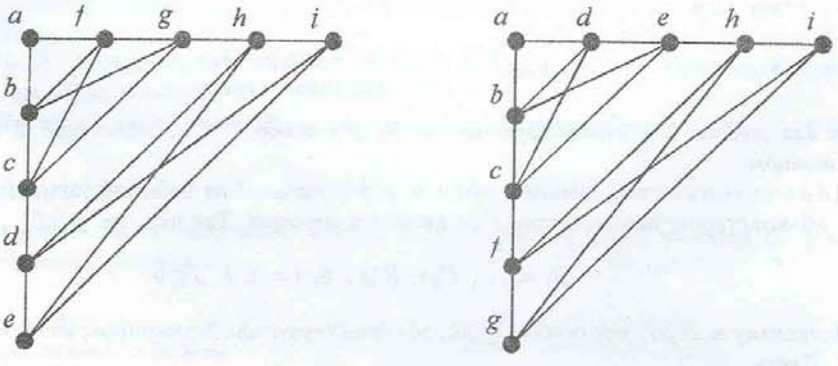


Рис. 6.

Например, пусть $\alpha \in C_{bf}$. Но $\{b, f\} \subseteq C_1'$, значит, $D_2'(\alpha) \geqslant 2$. Далее, α входит в один из кластеров C_{bd}', C_{be}', но $\{b, d\}$, $\{b, e\} \subseteq C_1$, значит, $D_2(\alpha) \geqslant 2$. Аналогично в ситуации, когда α принадлежит другим кластерам квазифрагмента.

2) При $p = 8$ рассуждения аналогичны (см. рис. 7). На рис. 7, как и ниже, отмечены не все кластеры.

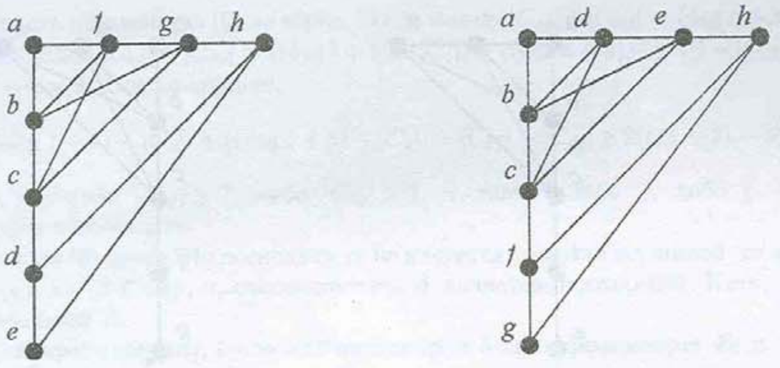


Рис. 7.

При условии $\alpha \sim h$ вершина α покрывается одним из двух кластеров C_{hd}, C_{he}, равно как C'_{hf}, C'_{hg}. Если для определенности

$$\alpha \in C_{hd} \cap C'_{hf},$$

то вершина α покрывается еще одним из кластеров C'_{db}, C'_{dc}, как и одним из C_{fb}, C_{fc}, неравенство (8) доказано.

При $\alpha \not\sim h$ верно какое-либо из следующих утверждений: $\alpha \sim d$, $\alpha \sim e$, $\alpha \sim f$, $\alpha \sim g$. Пусть, например, $\alpha \sim d$. Тогда вершина α покрывается одним из кластеров C'_{db}, C'_{dc}, например $\alpha \in C'_{db}$. Тогда $\alpha \sim b$ и, следовательно, $\alpha \in C_{bf}$ или $\alpha \in C_{bg}$. Но в $F_2 \setminus F_1$ должен быть еще кластер $C_{d\alpha}$, поскольку $\alpha \notin C_{dh}$. Тем самым $D_2(\alpha) \geqslant 2$.

Далее, если для определенности $\alpha \in C_{bf}$, то $\alpha \sim f$. Следовательно, $\alpha \in C'_{f\alpha}$ и $D'_2(\alpha) \geqslant 2$.

Ниже (при $p \leqslant 7$) наша цель – показать, что любая вершина из $N_3\{a\}$ смежна с какой-нибудь подходящей вершиной. Тогда будут выполняться условия следствия 2. А в этом случае утверждение теоремы будет вытекать из леммы 7 при $k = 4$.

3) $p = 7$. Согласно лемме 3, каждая из пар (p_1, p_2), (p'_1, p'_2) по отдельности может совпадать с (4,4) и (5,3).

Предположим, что

$$(p_1, p_2) = (p'_1, p'_2) = (5, 3).$$

Не ограничивая общности (со ссылкой на лемму 3), положим

$$C_1 = \{a, b, c, d, e\},\ C_2 = \{a, f, g\},\ C'_1 = \{a, b, c, f, g\},\ C'_2 = \{a, d, e\}.$$

Тогда

$$F_2 \setminus F_1 \supset \{C_{bf}, C_{bg}, C_{cf}, C_{cg}\},$$

$$F'_2 \setminus F'_1 \supset \{C'_{bd}, C'_{be}, C'_{cd}, C'_{ce}\} \text{ (рис. 8)}.$$

Очевидно, что вершины d, e, f, g удовлетворяют 7-условию, а любая вершина из $N_2\{a\}$ смежна с какой-либо из них и, следовательно, является подходящей.

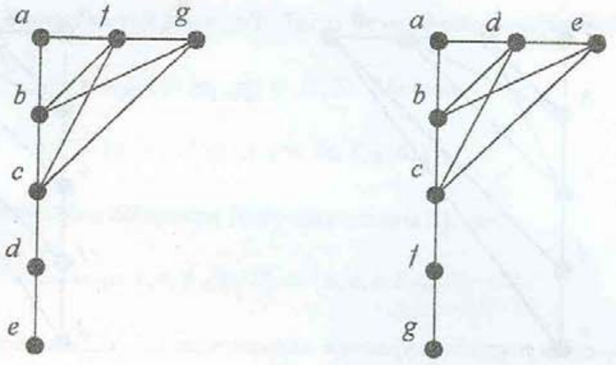


Рис. 8.

Пусть

$$(p_1, p_2) = (5, 3),\ (p'_1, p'_2) = (4, 4).$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что

$$C_1 = \{a, b, c, d, e\},\ C_2 = \{a, f, g\},\ C'_1 = \{a, b, c, f\},\ C'_2 = \{a, d, e, g\}.$$

Тогда получим ситуацию, изображеную на рис. 9.

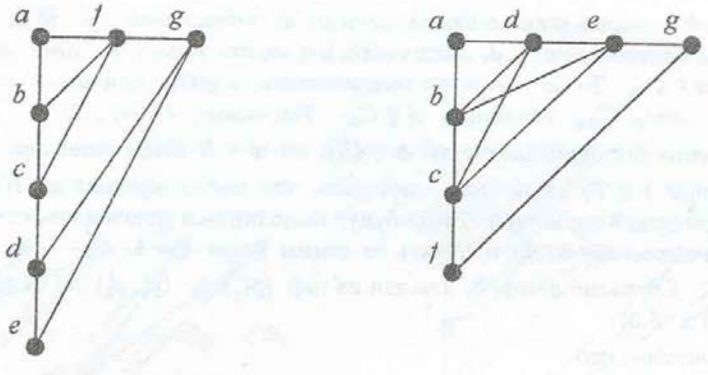


Рис. 9.

Если $\alpha \sim f$ или $\alpha \sim g$, то вершина α является подходящей, поскольку очевидно, что f и g удовлетворяют 7-условию. Не ограничивая общности, положим $\alpha \in C'_{bd}$. Тогда

$$\alpha \in C_{\alpha b} \cap C_{\alpha d}.$$

Считаем, что $\deg b = \deg d = 11$, поскольку в противном случае α – подходящая вершина. Пусть $v \in N_3\{a\}$, $v \sim \alpha$. Тогда v покрывается кластером

$$C_{v\alpha} = (N(\alpha) \setminus (C_{\alpha b} \cup C_{\alpha d})) \cup \{\alpha\}.$$

Покажем вначале, что

$$|C_{v\alpha}| \geqslant 6. \tag{9}$$

Действительно, пусть неравенство (9) не верно. Тогда имеем $|C_{\alpha b}|+|C_{\alpha d}|=(\deg\alpha+3)-|C_{v\alpha}|\geqslant$ $\geqslant(11+3)-5+9$. Далее $|C_{bf}|+|C_{dg}|=((\deg b+3)-|C_1|)+((\deg d+3)-|C_1|)-|C_{\alpha b}|-|C_{\alpha d}|\leqslant$ $\leqslant 2((11+3)-5)-9=9$. Следовательно,

$$|C_{cf}|+|C_{eg}|=((\deg f+3)-|C_2|)+((\deg g+3)-|C_2|)-|C_{bf}|-|C_{dg}|\geqslant 2((11+3)-3)-9=13.$$

Отсюда следует, что либо $|C_{cf}|\geqslant 7$, либо $|C_{eg}|\geqslant 7$, и, значит, либо f, либо g – хорошая вершина. Последнее невозможно.

Итак, неравенство (9) верно. Но поскольку α не является хорошей вершиной, то в $C_{v\alpha}$ есть вершина $\beta\in N(b)$, т.е. $\beta\in C_{bf}$, и, следовательно, β является подходящей. Итак, v смежна с подходящей вершиной β.

Остается рассмотреть вариант, когда для любых двух 3-квазифрагментов F_3 и F_3' верно

$$(p_1,p_2)=(p_1',p_2')=(4,4).$$

Не ограничивая общности, положим

$$C_1=\{a,b,c,d\},\ C_2=\{a,e,f,g\},\ C_1'=\{a,b,c,e\},\ C_2'=\{a,d,f,g\}$$

и придем к ситуации, показанной на рис. 10.

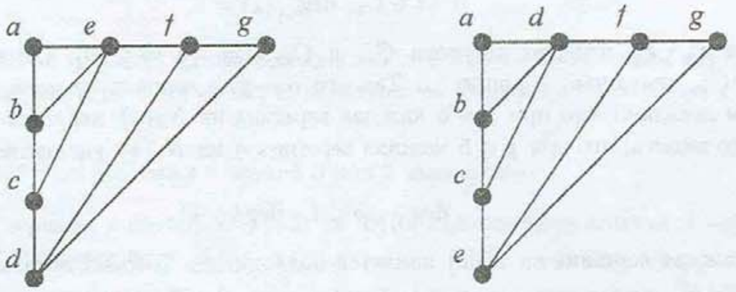


Рис. 10.

Предположим, что в графе H есть еще какое-либо из ребер bf, bg, cf, cg. Для определенности пусть $bf\in EH$. Тогда

$$C_{bf}\in F_2\setminus F_1,\ C_{bf}'\in F_2'\setminus F_1'.$$

Поскольку C_{bf} не есть особая клика, то будем считать, что $C_{bf}\notin F_2'$ или, что то же,

$$C_{bf}\neq C_{bf}'.$$

Если $A'=C_{bf}'\setminus C_{bf}$, то $A'\subseteq C_{be}$ и $A'\subset C_{df}$, откуда получаем, что $|A'|\leqslant 1$. Аналогично $|A|\leqslant 1$ для $A=C_{bf}\setminus C_{bf}'$.

Положим $A=\{\alpha\}$. Имеем $\alpha\in C_{bf}$, $\alpha\in C_{fe}'$. По лемме 3 $|C_{bf}'\cap C_{bf}|\leqslant 3$. Отсюда

$$|C_{bf}|=|C_{bf}'\cap C_{bf}|+|A|\leqslant 4.$$

Аналогично по симметрии $|C_{bf}'|\leqslant 4$. Далее,

$$|C_{fe}'|=(\deg f+3)-4-|C_{bf}'|\geqslant 6.$$

Аналогично $|C_{fd}|\geqslant 6$. Получаем

$$|C_{fd}\cap C_{fe}'|=|C_{fd}|-|A'|\geqslant 5.$$

Таким образом, $\alpha \in C_{bf}$ и смежна не меньше, чем с пятью вершинами из C_{fd}. Получили противоречие с леммой 3.

Таким образом, в графе H нет ребер bf, bg, cf, cg, а в этом случае легко заметить, что вершины b, c, f, g удовлетворяют 7-условию, и потому все вершины из $N_2\{a\}$ являются подходящими.

4) При $p = 6$ каждая из пар (p_1, p_2), (p_1', p_2') по отдельности может совпадать с (5, 2) или с (4, 3), причем сочетание (5, 2) и (5, 2) исключается леммой 3. Так что можно считать, что $|C_1'| = 4$, $|C_2'| = 3$. Если теперь

$$\alpha \in N_2\{a\},\ x \in N_1(a) \text{ и } x \sim \alpha,$$

то для $x \in C_2'$ верно неравенство

$$\deg_{N_1[a]}(x) \leqslant 4, \tag{10}$$

откуда легко видеть, что x удовлетворяет 7-условию.

Неравенство (10) верно и тогда, когда вершина x входит в C_1' и смежна с не более чем одной вершиной из C_2', отличной от a.

Остается вариант

$$x \in C_1',\ \deg_{C_2'}(x) = 3.$$

Но тогда в $F_2' \setminus F_1'$ есть два кластера C_{xy} и C_{xz}, где $\{y, z\} \subset C_2'$. Один из этих кластеров, например C_{xy}, включает вершину α. Так что $\alpha \sim y$, а вершина y удовлетворяет 7-условию. Тем самым доказано, что при $p = 6$ каждая вершина из $N_2\{a\}$ является подходящей.

5) Легко видеть, что при $p \leqslant 5$ каждая вершина b из $N_1\{a\}$ удовлетворяет 7-условию, так как

$$\deg_{N_1[a]} b \leqslant 4, \quad \deg b \geqslant 11.$$

Поэтому каждая вершина из $N_2[a]$ является подходящей. Теорема доказана.

3. Алгоритм

Наша цель состоит в сведении распознавательной задачи (1) для графов G с минимальной степенью вершин $\delta(G) \geqslant 11$ к распознавательной задаче $H \in L_2^l$, решение которой известно [4, 7, 13, 15].

Пусть F – некоторое семейство клик графа G, которое является фрагментом, если и только если $G \in L_3^l$. Например, в качестве F можно взять произвольное семейство больших клик, поскольку по теореме 2 все большие клики графа должны быть кластерами каждого его крауссова 3-покрытия.

Если F не покрывает все множество VG вершин графа G, то алгоритм 1 расширяет семейство F, добавляя на каждом шаге одну клику.

Пусть F покрывает множество VG вершин графа G. Причем по лемме 2 несложно обеспечить, чтобы каждая вершина графа была покрыта одной или тремя кликами из F. Обозначим через H граф, получившийся из графа G после удаления всех ребер, покрытых семейством F, т.е. $H = G - EF$. Теперь $G \in L_3^l$, если и только если $H \in L_2^l$. И если J – линейное 2-покрытие графа H, то $F \cup J$ – линейное 3-покрытие графа G.

Таким образом, остается выбрать начальное семейство F. Зафиксируем произвольную вершину z графа G. Если $\deg z \geqslant 19$, то рассмотрим множество $S \subseteq N[z]$ с $|S| \geqslant 20$. В S должна быть $\geqslant 8$-клика, расширим ее до большой клики C' и положим $F = \{C'\}$. Если $\deg z \leqslant 18$, то в качестве C' берем произвольную максимальную клику из $N[z]$, удовлетворяющую условиям

$$z \in C',\quad |C'| \geqslant 5. \tag{11}$$

Если алгоритму 1 не удалось расширить F до семейства F', покрывающего все вершины, или граф $H = G - EF'$ не является реберным, то C' не является кластером никакого фрагмента. Значит, если C' было большой кликой, то $G \notin L^l_3$. В случае же, когда C' не было большой кликой, выбираем в качестве C' другую клику, удовлетворяющую (11). В худшем случае придется проверить все клики из $N[z]$, удовлетворяющие (11), причем $|N[z]| \leqslant 19$.

Алгоритм 1.

Вход: Связный граф G с $\delta(G) \geqslant 11$ и максимальная клика C' графа G.

Выход: Один из двух вариантов (a) или (b), где

(a) семейство клик F, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $C' \in F$;
2) F – фрагмент, если и только если $H = G - EF \in L^l_2$;
3) каждая вершина графа G покрыта одной или тремя кликами из F;

(b) утверждение, что фрагмента, содержащего C' в качестве кластера, не существует.

(1) Инициализация

$$F := \{C'\},\ H := G - EF,\ l(v) := \begin{cases} 1 & \text{для} \quad v \in C' \\ 0 & \text{для} \quad v \notin C'. \end{cases}$$

Если какое-либо из условий, которые должны будут выполняться ниже, нарушается, то фрагмента, содержащего C' в качестве кластера, не существует, и алгоритм завершает свою работу.

(2) Пока в графе H есть вершины с меткой 0 или 2 выполняем:

(2.1) Если v – вершина с меткой $l(v) = 2$, то $N_1[v]$ должно быть кликой. Тогда полагаем $C = N_1[v]$ и переходим к (2.5).

(2.2) Пусть a – вершина графа H такая, что $l(a) > 0$, и в окружении $N_1(a)$ есть вершины с нулевой меткой l.

(2.3) Последовательно для i от $i = 1$ до $i = \min\{5, \mathrm{ecc}(a)\}$ выполняем:

(2.3.1) Если в $N_i[a]$ есть большая клика C, то переходим к (2.5).

(2.3.2) Если в $N_i[a]$ нет большой клики, то должно выполняться неравенство

$$|N_i(a)| \leqslant 18|N_{i-1}[a]|.$$

Тогда в $N_i[a]$ ищем хорошую клику C и если находим, то переходим к (2.5).

(2.4) На этом шаге в $N_{k=\min\{4,\mathrm{ecc}(a)\}}(a)$ нет хороших вершин и $|N_k(a)| \leqslant \mathrm{const}$.

(2.4.1) Находим в $N_k[a]$ особую клику C и переходим к (2.5).

(2.4.2) Если в $N_k[a]$ нет особых клик, то берем в качестве C произвольный кластер из основы F_1 какого-либо квазифрагмента F_k и переходим к (2.5).

(2.5) Расширяем семейство F, изменяем текущий граф H и пересчитываем метки вершин:

$$F := F \cup \{C\};\ H := H - EC;\ l(v) := l(v) + 1, \quad \text{где} \quad v \in C.$$

(3) На этом шаге в графе H нет вершин с меткой 0 или 2.

Если в графе H есть вершина v, для которой выполняется одно из условий

1) $l(v) > 3$,
2) $l(v) = 3$ и $N(v) \neq \emptyset$,

то фрагмента, содержащего C' в качестве кластера, не существует. Если таких вершин нет, то F – искомое семейство.

Теорема 5. *Существует алгоритм с временной сложностью* $\mathcal{O}(nm)$, *решающий задачу распознавания (1) в классе графов* G *с минимальной степенью вершин* $\delta(G) \geqslant 11$.

Доказательство. Существование полиномиального алгоритма вытекает из алгоритма 1 и рассуждений, приведенных выше. Сложность алгоритма 1 определяется сложностью нахождения большой клики, содержащей некоторую вершину x. А это можно реализовать за время $\mathcal{O}(m)$ тем способом, как это сделано при выборе начальной большой клики. Таким образом, сложность алгоритма 1 – $\mathcal{O}(nm)$. Значит, алгоритм, решающий задачу (1), будет иметь ту же сложность, поскольку алгоритм 1 будет повторяться не более C_{18}^{4} раз.

Авторы благодарят профессора Брандштадта и участников его семинара (университет г. Ростока) за обсуждение проблем, затронутых в статье. Особенно благодарят Ю. Л. Орловича за помощь в подготовке текста.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS и Правительства Республики Беларусь (проект INTAS-BELARUS 97-0093).

Литература

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.

2. **Метельский Ю. М.** Расщепляемые реберные графы от гиперграфов ограниченного ранга // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 117–122.

3. **Berge C.** Graphs and Hypergraphs. North-Holland, 1973.

4. **Degiorgi D. G., Simon K.** A dynamic algorithm for line graph recognition // Lecture notes in Computer Science, Springer-Verlag. 1995. № 1017.

5. **Hliněný P., Kratochvíl J.** Computational complexity of the Krausz dimension of graphs // Lecture notes in Computer Science, Springer-Verlag. 1997. № 1335. P. 214–228.

6. **Jacobson M. S., Kezdý A. E., Lehel J.** Recognizing intersection graphs of linear uniform hypergraphs // Graphs and Combinatorics. 1997. V. 3. P. 359–367.

7. **Lehot P. G. H.** An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph // J. Assoc. Comput. Math. 1974. V. 21. P. 569–575.

8. **Levin A., Tyshkevich R.** Line hypergraphs // Discrete Math. Appl. 1993. V. 3. P. 407–427.

9. **Metelsky Yu., Prisner E., Suzdal S., Tyshkevich R.** Recognizing large-degree intersection graphs of linear 3-uniform hypergraphs (submitted to J. Graph Theory).

10. **Metelsky Yu., Suzdal S., Tyshkevich R.** Intersection graphs of linear 3-uniform hypergraphs: polinomial recognizability // Proc. International Workshop Discrete Optimization Methods in Scheduling and Computer-Aided Design, Minsk, 2000. P. 151–154.

11. **Metelsky Yu., Tyshkevich R.** Line graphs of linear 3-uniform hypergraphs // J. Graph Theory. 1997. V. 25. P. 243–251.

12. **Naik R. N., Rao S. B., Shrikhande S. S., Singhi N. M.** Intersection graphs of k-uniform linear hypergraphs // Ann. Discrete Math. 1980. V. 6. P. 275–279.

13. **Naik R. N., Rao S. B., Shrikhande S. S., Singhi N. M.** Intersection graphs of k-uniform linear hypergraphs // Europ. J. Combin. 1982. V. 3. P. 159–172.

14. **Naor J., Novick M. B.** An efficient reconstruction of a graph from its line graph in parallel // J. Algorithms. 1990. V. 11. P. 132–143.

15. **Prisner E.** The role of clique multigraphs in intersection graph theory, manuscript, 1998.

16. **Roussopoulos N. D.** A max {m,n} algorithm for determining the graph H from its line graph G // Inform. Process. Lett. 1973. V. 2. P. 108–112.

Юрий Михайлович Метельский
Станислав Валерьевич Суздаль
Регина Иосифовна Тышкевич
Белорусский государственный университет
г. Минск, пр. Ф.Скорины, 4
220050, Республика Беларусь
e-mail: {metelsky, suzdal, regina}@mmf.bsu.unibel.by