Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг на различных горизонтах инвестирования (стохастические модели).

И. А. Карачун (Минск, Беларусь)

Формулировка задачи оптимизации портфеля ценных бумаг состоит в следующем: для инвестирования имеется денежная сумма x_0; определен горизонт инвестирования T; имеется набор m активов для формирования портфеля на период $[0,T]$; максимальная сумма потерь стоимости портфеля ценных бумаг от изменения цен входящих в него активов, допускаемая инвестором в течение фиксированного периода времени, представляет собой сумму C.

Требуется определить такую стратегию $\pi(t) = (\pi^0(t), \pi^1(t), ..., \pi^m(t))'$, чтобы получить максимальную ожидаемую стоимость портфеля $X(T)$ в конце горизонта инвестирования (для описания динамики портфеля использована модель динамики цен активов Блека-Шоулза [1]):

$$E\left[X(T)\right] = x_0 e^{rT} \exp\left\{\int_0^T \pi'(s)(\mu - r1)ds\right\} \to \max_{\pi},$$
$$X(t) \geq 0, \quad X(0) = x_0, \quad \sum_{i=0}^{m} \pi^i(t) = 1,$$

для краткосрочного горизонта инвестирования уровень риска ограничивается показателем Conditional Value-at-Risk [3]:

$$\mathrm{CVaR}(\pi, T) = E[X(T)] - E[X(T)\,|X(T) \leq k(\pi)] =$$
$$= x_0 e^{rT} \exp\left\{\int_0^T \pi'(s)(\mu - r1)ds\right\} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\Phi\left(k_\alpha - \sqrt{\int_0^T \left\|\pi'(s)\sigma\right\|^2 ds}\right)\right) \leq C,$$

для долгосрочного горизонта инвестирования – показателем Conditional Capital-at-Risk [2]:

$$\mathrm{CCaR}(\pi, T) = x_0 e^{rT} - E[X(T)\,|X(T) \leq k(\pi)] =$$
$$= x_0 e^{rT} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \exp\left\{\int_0^T \pi'(s)(\mu - r1)ds\right\} \Phi\left(k_\alpha - \sqrt{\int_0^T \left\|\pi'(s)\sigma\right\|^2 ds}\right)\right) \leq C.$$

где $k(\pi)$ – α-квантиль портфеля инвестора (наименьшая возможная стоимость портфеля с вероятностью $1 - \alpha$); μ – ожидаемая доходность; σ – волатильность доходности базовой акции; r – доходность безрискового актива; $\Phi(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения.

Литература.

1. Black, F. The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // J. of Polit. Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637–654.

2. Continuous time portfolio selection under conditional capital at risk / G. Dmitrasinovic-Vidovic [et al.]. – Calgary, 2004. – 45 p. – (Preprint / The Math. a. Computational Finance Lab., Univ. of Calgary. – Canada ; T2N 1N4).

3. Rockafellar, R. Optimization of conditional value-at-risk / R. Rockafellar, S. Uryasev // The J. of Risk. – 2000. – Vol. 2, № 3. – P. 21–41.