В.В. Беняш-Кривец, О.В. Мельников

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ:

ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

Учебное пособие
для студентов математических специальностей

МИНСК
2008

УДК 512(075.8)
ББК 22.143
Б

Рекомендовано Ученым советом
механико-математического факультета
27 ноября 2007 г., протокол № 3

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор О.И. Тавгень;
кандидат физико-математических наук, доцент О.А. Баркович

Беняш-Кривец В.В.
Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: учебное пособие для студентов математических специальностей / В.В. Беняш-Кривец, О.В. Мельников. — Минск: БГУ, 2008. — 116 с.
ISBN 978-985-518-049-5

В учебном пособии излагаются основы теории групп, колец и полей. Этот материал изучается в рамках курса "Алгебра и теория чисел"на математических специальностях в вузах. Кроме большого числа примеров, иллюстрирующих теорию, в книгу включено много упражнений. Пособие предназначено для студентов и преподавателей математических специальностей университетов.

УДК 512(075.8)
ББК 22.143

ISBN 978-985-518-049-5

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие предназначено для завершающего этапа алгебраического образования всех студентов-математиков. Материал в нем посвящен изложению ряда понятий и результатов теории абстрактных групп, колец и полей.

Необходимость знакомства с этими абстрактными алгебраическими объектами обусловлена тем, что в последнее время процесс, связанный с переходом математики на теоретико-множественную основу и выходом на передний план аксиоматических методов исследования, изменил представления об алгебре как математической дисциплине.

Начиная со своего возникновения алгебра понималась как наука о решении уравнений или систем уравнений сначала для чисел, позднее для других конкретных математических объектов. В настоящее время основной объект исследования алгебры — свойства операций, производимых над объектами произвольной природы. Возникающие на этом пути абстрактные алгебраические системы достаточно универсальны, чтобы конкретные их реализации можно было найти в разных областях как математики, так и других наук.

В пособии изложены результаты лишь о классических алгебраических системах. Группы и поля — первые алгебраические системы, возникшие в математике в связи с решением алгебраических уравнений. Сегодня теория групп и теория полей наиболее развиты в алгебре, а полученные в них результаты наиболее используются в других областях математики.

Отбирая материал для пособия, авторы стремились представить широкий спектр результатов, которые можно использовать как в общих, так и в специальных курсах по другим разделам математики, а также для самостоятельного изучения студентами специальной литературы.

Пособие содержит две главы. Первая глава посвящена основам теории групп. Рассматриваются основные теоретико-групповые понятия: группы, подгруппы, факторгруппы, гомоморфизма и изоморфизма, прямого произведения групп, коммутанта. Доказываются классические теоремы Лагранжа и Кэли. Подробно изучаются два класса групп — циклические группы и конечно порожденные абелевы группы.

Во второй главе изучаются кольца и поля. В теории колец вводятся такие понятия, как кольцо, подкольцо, идеал, факторкольцо, прямое произведение колец, гомоморфизм и изоморфизм колец. Изучается кольцо многочленов от нескольких переменных и доказывается основная теорема о симметрических многочленах. Рассматривается теория полей. Вводятся основные понятия теории: поле, характеристика поля, расширение полей, степень расширения, простое поле, алгебраический и трансцендентный элемент. Изучаются простые алгебраические и трансцендентные расширения полей. Значительное внимание уделяется конечным полям.

В пособии представлены лекции, читавшиеся на протяжении ряда последних лет для студентов 2-го курса механико-математического факультета БГУ. У потенциальных читателей книги предполагается наличие определенных алгебраических знаний. К их числу относятся, прежде всего, теория делимости многочленов одной переменной, исчисление матриц и основные факты об определителях, ряд элементарных понятий и результатов линейной алгебры.

Глава 1
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП

§ 1. МНОЖЕСТВА С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Определение 1.1. *Пусть X — произвольное множество.* ***Бинарной алгебраической операцией*** *на X называется некоторое отображение $\tau : X \times X \to X$ декартова квадрата $X \times X$ в X.*

Таким образом, любой упорядоченной паре элементов $a, b \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $\tau(a, b)$ того же множества X. Часто вместо $\tau(a, b)$ пишут $a\tau b$, еще чаще бинарную операцию на X обозначают специальным символом, например, $a \circ b$ (или используют другой специальный символ вместо $\circ$: $*$, $\cdot$, $\otimes$, $\oplus$, $+$, $-$ и т.д.). Чаще всего используют две формы записи операции: *аддитивная* и *мультипликативная.* При аддитивной форме записи операцию называют сложением и вместо $c = a \circ b$ пишут $c = a + b$. При мультипликативной форме записи операцию называют умножением и вместо $c = a\circ b$ пишут $c = a\cdot b$ (или вообще опускают точку: $c = ab$). В дальнейшем при изложении теории будем использовать мультипликативную форму записи операции и лишь в некоторых случаях — аддитивную.

На X может быть задано много разных операций. Желая выделить одну из них, используют скобки $(X, \circ)$ и говорят, что операция $\circ$ определяет на X алгебраическую структуру или $(X, \circ)$ — *алгебраическая структура* (алгебраическая система). В направлении конструирования разных бинарных операций на множестве X открывается простор для фантазии. Но задача изучения произвольных алгебраических структур слишком общая, чтобы представлять реальную ценность. По этой причине рассматривают естественные ограничения на алгебраические операции.

Определение 1.2. *Бинарная операция* $\circ$ *на множестве* X *называется* ***ассоциативной****, если*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

для всех $a, b, c \in X$*;* ***коммутативной****, если*

$$a \circ b = b \circ a$$

для всех $a, b \in X$*. Те же названия присваиваются и соответствующей алгебраической структуре* $(X, \circ)$*.*

Требования ассоциативности и коммутативности независимы. Например, операция $*$ на $\mathbb{Z}$, заданная правилом $n * k = -n - k$, очевидно, коммутативна, но

$$(1 * 2) * 3 = (-1 - 2) * 3 = -(-1 - 2) - 3 = 0 \neq 4 = 1 * (2 * 3),$$

так что условие ассоциативности не выполняется. На множестве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка $n > 1$ определена операция умножения — ассоциативная, но некоммутативная.

Определение 1.3. *Элемент* $e \in X$ *называется* ***нейтральным*** *относительно бинарной операции* $\circ$*, если*

$$e \circ x = x \circ e = x$$

для всех $x \in X$*.*

Предложение 1.1. *В алгебраической структуре* $(X, \circ)$ *может существовать не более одного нейтрального элемента.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2 — два нейтральных элемента. Тогда, как следует из определения, $e_1 e_2 = e_1$, поскольку e_2 — нейтральный элемент, и $e_1 e_2 = e_2$, поскольку e_1 — нейтральный элемент. Поэтому $e_1 = e_2$. $\square$

Определение 1.4. *Пусть* $(X, \circ)$ *— алгебраическая структура с нейтральным элементом* e*. Элемент* $a \in X$ *называется* ***обратимым****, если найдется элемент* $b \in X$*, для которого*

$$ab = ba = e.$$

Элемент b *называется* ***симметричным*** *к* a*.*

Если b — симметричный элемент к a, то и a — симметричный элемент к b.

Предложение 1.2. *Пусть* $(X, \circ)$ *— ассоциативная алгебраиче-*

ская структура с нейтральным элементом e. Тогда для любого элемента $a \in X$ может существовать не более одного симметричного элемента.

Доказательство. Пусть $b_1,\ b_2$ — два симметричных элемента к a. Тогда, как следует из определения,

$$(b_1 \circ a) \circ b_2 = e \circ b_2 = b_2 = b_1 \circ (a \circ b_2) = b_1 \circ e = b_1. \qquad \square$$

Пусть $(X, \circ)$ — произвольная алгебраическая структура с бинарной операцией $\circ$ и $x_1, \ldots, x_n$ — упорядоченная последовательность элементов из X. Не меняя порядка, можно разными способами составлять произведения длины n. Пусть l_n — число таких способов:

$l_2 = 1:\ \ x_1 \circ x_2;$

$l_3 = 2:\ \ (x_1 \circ x_2) \circ x_3,\ x_1 \circ (x_2 \circ x_3);$

$l_4 = 5:\ \ ((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ x_4,\ (x_1 \circ x_2) \circ (x_3 \circ x_4),\ x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ x_4)),$
$(x_1 \circ (x_2 \circ x_3)) \circ x_4,\ x_1 \circ ((x_2 \circ x_3) \circ x_4).$

Очевидно, что, перебирая все произведения $x_1 \circ \cdots \circ x_k$, $x_{k+1} \circ \cdots \circ x_n$ длин k и $n-k$, $1 \le k \le n-1$, а затем соединяя их нашей бинарной операцией в данном порядке, мы исчерпаем все l_n возможностей.

Однако для ассоциативной алгебраической операции расстановка скобок оказывается излишней.

Теорема 1.1. *Если бинарная операция на X ассоциативна, то результат ее последовательного применения к n элементам множества X не зависит от расстановки скобок.*

Доказательство. При $n = 1,\ 2$ доказывать нечего. При $n = 3$ утверждение теоремы совпадает с законом ассоциативности. Далее рассуждаем индукцией по n. Предположим, что $n > 3$ и что для числа элементов $< n$ справедливость утверждения установлена. Достаточно показать, что

$$(x_1 \circ \cdots \circ x_k) \circ (x_{k+1} \circ \cdots \circ x_n) = ((\ldots (x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \cdots \circ x_{n-1}) \circ x_n$$

при любом k, $1 \le k \le n-1$. В левой части мы выписали только внешние пары скобок, поскольку по предположению индукции расстановка внутренних скобок несущественна. В частности, при $k < n$ независимо от расстановки скобок в левой части имеем

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k = ((\dots(x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots \circ x_{k-1}) \circ x_k.$$

Рассмотрим два случая:

а) $k = n - 1$; тогда имеем очевидное равенство

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}) \circ x_n = ((\dots(x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots \circ x_{n-1}) \circ x_n.$$

б) $k < n - 1$; ввиду ассоциативности и учитывая предположение индукции, имеем

$$(x_1 \circ \dots \circ x_k) \circ (x_{k+1} \circ \dots \circ x_{n-1} \circ x_n) = (x_1 \circ \dots \circ x_k) \circ ((x_{k+1} \circ \dots \circ x_{n-1}) \circ x_n) =$$
$$= ((x_1 \circ \dots \circ x_k) \circ (x_{k+1} \circ \dots \circ x_{n-1})) \circ x_n = ((\dots(x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots \circ x_{n-1}) \circ x_n.$$

$\square$

Упражнения

1. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M, если

а) $M = \mathbb{N},\ x * y = x^y$; г) $M = \mathbb{Z},\ x * y = x - y$;

б) $M = \mathbb{N},\ x * y = \text{НОД}(x, y)$; д) $M = \mathbb{Z},\ x * y = x^2 + y^2$;

в) $M = \mathbb{N},\ x * y = 2xy$; е) $M = \mathbb{R},\ x * y = \sin x \cdot \sin y$.

2. На множестве M определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Ассоциативна ли эта операция? Что можно сказать о нейтральном и обратимых элементах M?

3. На множестве M^2, где M — некоторое множество, определена операция $\circ$ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Ассоциативна ли эта операция? Существует ли в M^2 нейтральный элемент?

§ 2. ПОНЯТИЕ ГРУППЫ, ПОДГРУППЫ, ПРИМЕРЫ

Определение 2.1. *Непустое множество G с определенной на нем бинарной операцией $\circ$ называется **группой**, если*

1) операция $\circ$ ассоциативна;

2) существует нейтральный элемент e;

3) любой элемент a из G имеет симметричный элемент $b \in G$.

Группа с коммутативной операцией называется коммутативной, или абелевой (в честь норвежского математика Абеля).

Для обозначения групповой операции чаще всего используют два символа:

1) точку; тогда вместо $a \cdot b$ пишут просто ab и говорят об умножении элементов из группы; группу называют *мультипликативной*, для обозначения нейтрального элемента используют символ 1, а элемент, симметричный к a, называют обратным к a и обозначают a^{-1};

2) знак сложения $+$; тогда говорят о сложении элементов из группы; группу называют *аддитивной*, для обозначения нейтрального элемента используют символ 0, а элемент, симметричный к a, называют противоположным к a и обозначают $-a$.

В дальнейшем будем использовать (если не оговорено противное) мультипликативную запись.

Удивительно, что одна из старейших и богатейших по результатам область алгебры, играющая фундаментальную роль в геометрии и в приложениях математики к вопросам естествознания, основывается на столь простых аксиомах. Идеи теории групп «носились в воздухе» (как это бывает с основополагающими математическими идеями) задолго до Галуа, и некоторые из теорем теории групп в наивной форме были доказаны еще Лагранжем. Гениальные работы Галуа оказались непонятыми, и возрождение интереса к ним началось после книги К. Жордана «Курс теории перестановок и алгебраических уравнений» (1870).

Порядком группы G называется мощность $|G|$ множества G.

Благодаря ассоциативности в группе произведение любых ее элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в заданном порядке не зависит от расстановки скобок и поэтому может быть записано как $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Определение 2.2. *Пусть a — элемент группы G. Для произвольного целого числа n положим*

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ a \ldots a, & \text{если } n > 0 \ (n \text{ множителей}), \\ (a^{-n})^{-1}, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Предложение 2.1. *Пусть a — элемент некоторой группы и $n, m \in \mathbb{Z}$. Тогда $a^{n+m} = a^n a^m$ и $(a^n)^m = a^{nm}$.*

Определение 2.3. *Непустое подмножество H группы G называется **подгруппой** группы G (пишут $H \leq G$), если H является* *группой относительно той же операции, которая определена на G.*

Теорема 2.1 (Критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *если $a, b \in H$, то $ab \in H$;*

2) *если $a \in H$, то $a^{-1} \in H$.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа в G, т. е. H — группа относительно той же операции, которая определена на G. На H определена алгебраическая операция, поэтому $ab \in H$ для всех $a, b \in H$.

Проверим, совпадает ли единица 1_H подгруппы H с единицей 1_G группы G. Ясно, что

$$1_H 1_G = 1_G 1_H = 1_H,$$

поскольку 1_H — элемент группы G. В G для 1_H имеется обратный элемент 1_H^{-1}, т. е. $1_H^{-1} 1_H = 1_H 1_H^{-1} = 1_G$. Так как 1_H — единица в H, то $1_H 1_H = 1_H$.Умножив обе части последнего равенства на 1_H^{-1}, получим

$$1_H^{-1}(1_H 1_H) = 1_H^{-1} 1_H = 1_G = (1_H^{-1} 1_H) 1_H = 1_G 1_H = 1_H.$$

Поскольку H — подгруппа, то для любого $a \in H$ существует обратный элемент $a^{-1} \in H$, т. е. такой, что $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$, где 1 — единичный элемент в группе G и подгруппе H. Это означает, что элемент a^{-1} является обратным к a в группе G.

Докажем обратное утверждение. Пусть $ab \in H$ и $a^{-1} \in H$ для всех $a, b \in H$. Тогда на H задана алгебраическая операция $\tau : H \times H \to H$, где $\tau(h_1, h_2) = h_1 h_2$. Она ассоциативна, так как ассоциативность справедлива для всех элементов из G. Так как $a, a^{-1} \in H$, то $aa^{-1} = 1_G \in H$ и H содержит единичный элемент. Значит, H — подгруппа в G, что и требовалось доказать. $\square$

Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то подгруппу H называют *собственной подгруппой* группы G и пишут $H < G$. Любая группа G содержит подгруппы $\{1\}$ и G; их называют *тривиальными*. В случае $\{1\} < H < G$ подгруппу H называют *нетривиальной подгруппой* группы G.

Приведем примеры групп и их подгрупп. Далее в пособии используется следующее определение композиции двух отображений: $(fg)(x) = f(g(x))$, т. е. подстановки перемножаются справа налево.

Пример 1. Множества $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — абелевы группы относительно сложения. При этом $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$. Множество классов вычетов $\mathbb{Z}_n$ по модулю n — абелева группа порядка n относительно сложения.

Пример 2. Множества $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ — абелевы группы относительно умножения. При этом $\mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$, $C_n < T < \mathbb{C}^*$.

Пример 3. Множество всех подстановок на множестве $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ относительно умножения подстановок является группой. Она называется *симметрической группой* степени n и обозначается S_n. Все четные подстановки в S_n образуют подгруппу, которая обозначается A_n и называется *знакопеременной группой* степени n. Порядок группы S_n равен $n!$, а порядок группы A_n равен $n!/2$ при $n \geq 2$.

Этот пример можно обобщить на бесконечное множество X. Пусть $S(X)$ — множество всех биективных отображений $f : X \to X$. Тогда $S(X)$ — группа с естественной бинарной операцией, являющейся композицией отображений. Сама по себе группа $S(X)$ и различные ее подгруппы, называемые *группами преобразований* множества X, — стартовая площадка, с которой начинаются всевозможные применения теории групп. Достаточно упомянуть о знаменитой «Эрлангенской программе» Ф. Клейна (1872), положившей понятие группы преобразований в основу классификации различных типов геометрий.

Пример 4. Множество $GL_n(K)$ всех невырожденных матриц размера $n \times n$ над полем K является группой относительно умножения матриц. Она называется *общей линейной группой.* Ее подгруппа $SL_n(K)$, состоящая из всех матриц с определителем 1, называется *специальной линейной группой.* Группа $SL_n(K)$ содержит подгруппу $T_n(K)$, состоящую из всех матриц с нулями под главной диагональю, и подгруппу $UT_n(K)$, состоящую из всех матриц с единицами на главной диагонали и нулями под ней.

Надо сказать, что группа $GL_n(K)$, будучи вместилищем многих интересных групп, является для математиков как бы нескончаемым источником новых идей и нерешенных задач.

Пример 5. Множество $O_n(\mathbb{R})$ всех ортогональных матриц порядка n (т. е. таких матриц $A \in GL_n(\mathbb{R})$, что $AA^\top = E$) образует подгруппу в $GL_n(\mathbb{R})$, которая называется *ортогональной группой.*

Действительно, если $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, то
$$AB(AB)^\top = A(BB^\top)A^\top = AA^\top = E.$$
Значит, $AB \in O_n(\mathbb{R})$. Далее, по определению $A^\top = A^{-1}$, поэтому, транспонируя обе части последнего равенства, получаем $A = (A^{-1})^\top$. Следовательно, $A^{-1}(A^{-1})^\top = A^{-1}A = E$ и $A^{-1} \in O_n(K)$.

Множество $SO_n(\mathbb{R})$ всех ортогональных матриц порядка n с определителем 1, очевидно, образует подгруппу в $O_n(\mathbb{R})$, которая называется *специальной ортогональной группой.*

Пример 6. Множество $U_n(\mathbb{C})$ всех унитарных матриц порядка n (т. е. таких матриц $A \in GL_n(\mathbb{C})$, что $AA^* = E$) образует подгруппу в $GL_n(\mathbb{C})$, которая называется *унитарной группой.* Множество $SU_n(\mathbb{C})$ всех унитарных матриц порядка n с определителем 1, очевидно, образует подгруппу в $U_n(\mathbb{C})$, которая называется *специальной унитарной группой.*

Пример 7. Целочисленные матрицы с определителем 1 образуют подгруппу в группе $SL_n(\mathbb{R})$, обозначаемую через $SL_n(\mathbb{Z})$.

Пример 8. Множество невырожденных диагональных матриц порядка n является абелевой подгруппой группы $GL_n(K)$.

Пример 9. Движением евклидовой плоскости называется любое отображение этой плоскости на себя, сохраняющее расстояния между точками. Пусть F — произвольная фигура на евклидовой плоскости. Множество всех движений евклидовой плоскости, переводящих F на себя, с операцией «композиция двух движений», есть группа. Она называется группой симметрий фигуры F. Аналогично можно рассматривать группы симметрий фигур в пространстве.

В группе симметрий правильного n-угольника имеется ровно $2n$ элементов: n вращений по часовой стрелке на углы $\dfrac{2\pi k}{n}$, $0 \le k \le n-1$, вокруг его центра и n отражений относительно прямых, проходящих через центр и одну из его вершин или середину одной из его сторон (в зависимости от четности n). Эта группа называется *группой диэдра D_n*

порядка $2n$. Все вращения в группе D_n образуют подгруппу, которая называется *группой вращений* данного n-угольника.

Пример 10. Пусть f — какой-либо многочлен от n переменных. Тогда

$$\mathrm{Sym}(f) = \{\sigma \in S_n \mid f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

есть подгруппа группы S_n. В самом деле, пусть $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(f)$. Положим $x_{\sigma(i)} = y_i$. Тогда

$$f(x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(n)}) = f(y_{\tau(1)}, \ldots, y_{\tau(n)}) = f(y_1, \ldots, y_n) = \\ = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

значит $\tau\sigma \in \mathrm{Sym}(f)$. Другая аксиома подгруппы выполнена очевидным образом.

В частности, многочлен f является симметрическим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sym}(f) = S_n$. В качестве примера многочлена с менее богатой, но нетривиальной симметрией рассмотрим многочлен $f = x_1x_2 + x_3x_4$ (от 4 переменных). Легко видеть, что группа $\mathrm{Sym}(f)$ состоит из 8 подстановок, сохраняющих разбиение множества $\{1, 2, 3, 4\}$ на два подмножества $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$. Допускается перестановка этих подмножеств и перестановка элементов в каждом из них.

Определение 2.4. *Группы G и G_1 называют изоморфными и пишут $G \simeq G_1$, если существует биективное отображение $f : G \to G_1$, называемое **изоморфизмом**, которое обладает свойством*

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

для любых a, b из G.

Пример 11. Из курса линейной алгебры известно, что имеется взаимно однозначное соответствие между квадратными матрицами порядка n над полем K и линейными преобразованиями n-мерного векторного пространства V над K при выборе в V фиксированного базиса. При этом невырожденным матрицам отвечают обратимые линейные преобразования, а умножению матриц соответствует умножение линейных преобразований. Следовательно, группа $GL_n(K)$ изоморфна группе $GL(V)$ невырожденных линейных преобразований пространства V.

Упражнения

1. Докажите, что для любого элемента a из группы G отображения $l_a : G \to G$, $r_a : G \to G$, заданные правилами $l_a(g) = ag$, $r_a(g) = ga$, являются биекциями. Отображение l_a называется *левым сдвигом*, а r_a — *правым сдвигом*.

2. Доказать предложение 2.1.

3. Доказать, что:

а) в любой группе$(ab)^{-l} = b^{-1}a^{-l}$, $(a^{-1})^{-1} = a$;

б) для любых элементов a, b из группы G уравнение $ax = b$ имеет единственное решение, равное $a^{-1}b$, а уравнение $xa = b$ имеет единственное решение, равное ba^{-1}.

4. Доказать, что группа симметрий правильного треугольника изоморфна группе S_3.

5. Доказать, что группа вращений правильного n-угольника изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$.

6. Пусть G — группа относительно операции $\circ$. Операцию $*$ определим так: $a*b = b\circ a$. Доказать, что относительно операции $*$ множество G также является группой.

7. Пусть

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что:

а) $I^2 = J^2 = K^2 = -E$, $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$, $JI = -K$, $KJ = -I$, $IK = -J$;

б) 8 матриц $\pm E$, $\pm I$, $\pm J$, $\pm K$ образуют подгруппу *кватернионов* Q_8 в группе $SL_2(\mathbb{C})$.

8. Доказать, что если H_i, $i \in I$, — подгруппы группы G, то $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ — подгруппа группы G.

9. Доказать, что непрерывные строго возрастающие вещественные функции f, определенные на отрезке $[0, 1]$ и имеющие значения $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, образуют группу относительно суперпозиции.

10. Доказать, что если в мультипликативно записанной группе квадрат любого элемента равен 1, то эта группа — абелева.

11. Обозначим через G множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ где } a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0.$$

Доказать, что G — группа относительно матричного умножения.

12. Доказать, что квадратные матрицы n-го порядка, у которых в каждой строке и в каждом столбце один элемент равен 1, а остальные равны 0, образуют группу относительно умножения.

13. Доказать, что непустое подмножество конечной группы, произведение любых элементов которого снова содержится в нем, является подгруппой.

15. Пусть $F, H \leq G$. Доказать, что $F \cup H \leq G$ тогда и только тогда, когда либо $F \subset H$, либо $H \subset F$.

16. Группа V_4 из четырех элементов задана таблицей Кэли

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(*четверная группа Клейна*). Найти все ее подгруппы.

17. Для произвольного подмножества M группы G обозначим через $N_G(M)$ множество всех тех $g \in G$, для которых $gmg^{-1} \in M$ для любого элемента $m \in M$. Доказать, что $N_G(M)$ — подгруппа G (*нормализатор множества M в G*).

18. Найти все подгруппы симметрической группы S_3.

§ 3. СИСТЕМЫ ПОРОЖДАЮЩИХ. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Пусть S — какое-либо подмножество группы G. Обозначим через $\langle S \rangle$ совокупность всех конечных произведений элементов из $\langle S \rangle$ и обратных к ним, т. е. элементов вида

$$g_1^{\varepsilon_1} \ldots g_k^{\varepsilon_k} \quad (g_1, \ldots, g_k \in S, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k = \pm 1). \tag{3.1}$$

Предложение 3.1. *Множество $\langle S \rangle$ — наименьшая подгруппа группы G, содержащая S.*

Доказательство. Если какая-либо подгруппа H содержит S, то она содержит и все указанные произведения, т. е. $H \supset \langle S \rangle$. С другой стороны, само множество $\langle S \rangle$ является подгруппой, как показывают следующие равенства:

$$(g_1^{\varepsilon_1} \dots g_k^{\varepsilon_k})(g_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}} \dots g_{k+l}^{\varepsilon_{k+l}}) = g_1^{\varepsilon_1} \dots g_k^{\varepsilon_k} g_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}} \dots g_{k+l}^{\varepsilon_{k+l}},$$
$$(g_1^{\varepsilon_1} \dots g_k^{\varepsilon_k})^{-1} = g_k^{-\varepsilon_k} \dots g_1^{-\varepsilon_1}.$$

Значит, $\langle S \rangle$ — наименьшая подгруппа группы G, содержащая S. □

Подгруппу $\langle S \rangle$ называют подгруппой, *порожденной подмножеством* S. В частности, если $G = \langle S \rangle$, то группа G порождается своим подмножеством S, а S — система порождающих (элементов) группы G.

Обычно для сокращения записи вместо $\langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle$ пишут $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ и говорят, что эта подгруппа порождается элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Допустимы и другие вольности в обозначениях. Например, если A и B — подмножества группы G, c — ее элемент, то вместо $\langle A \cup B \cup \{c\} \rangle$ пишут $\langle A, B, c \rangle$.

Группа называется *конечно порожденной*, если она может быть порождена конечным множеством элементов.

Определение 3.1. *Пусть S состоит из одного элемента $a \in G$, тогда подгруппа $\langle a \rangle$ называется* ***циклической подгруппой****, порожденной элементом a. Если в группе G существует такой элемент a, что $G = \langle a \rangle$, то группа G называется* ***циклической****.*

Конечно, любая группа G порождается подмножеством $S = G$, однако представляет интерес найти возможно меньшую систему порождающих.

Пример 1. Группа диэдра D_n порождается поворотом φ на угол $\dfrac{2\pi}{n}$ и (любым) отражением $\psi \in D_n$. В самом деле, φ порождает циклическую подгруппу C_n всех поворотов, содержащихся в группе D_n; умножая элементы этой подгруппы на ψ, получим все отражения, входящие в группу D_n.

Пример 2. Группа S_n порождается транспозициями. Это утверждение эквивалентно тому, что любая подстановка разлагается в произведение транспозиций.

П р и м е р 3. Напомним, что *элементарной матрицей* называется матрица вида $E + cE_{ij}$, где $c \neq -1$ при $i = j$, E_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) находится 1, а все остальные элементы равны нулю. Справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2. *Группа $GL_n(K)$ порождается элементарными матрицами.*

Доказательство. Отметим, что матрица, обратная к элементарной, также элементарна. Поэтому утверждение предложения означает, что любая невырожденная матрица разлагается в произведение элементарных матриц. Умножение матрицы $A \in GL_n(K)$ слева на элементарную матрицу вызывает соответствующее элементарное преобразование ее строк. Мы знаем из курса линейной алгебры, что с помощью элементарных преобразований строк любую невырожденную матрицу можно привести к единичной матрице. Таким образом, существуют такие элементарные матрицы $U_1, U_2, \ldots, U_s$, что

$$U_s \ldots U_2 U_1 A = E.$$

Значит,

$$A = U_1^{-1} U_2^{-1} ... U_s^{-1} -$$

произведение элементарных матриц, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим циклические подгруппы данной группы G. Пусть $\langle a \rangle \leq G$. Возможны два принципиально разных случая: либо все степени элемента a различны (в частности, $a^k \neq 1$ при $k \neq 0$), либо нет.

Определение 3.2. *Наименьшее натуральное число n, для которого $a^n = 1$, называется* ***порядком*** *элемента $a \in G$ и обозначается* $\operatorname{ord} a$. *Если такого натурального m не существует, полагают* $\operatorname{ord} a = \infty$ *и говорят, что элемент a имеет бесконечный порядок.*

П р и м е р 4. Найдем порядок матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ как элемента группы $GL_2(\mathbb{R})$. Имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = -E,$$

откуда

$$A^4 = -A, \quad A^5 = -A^2, \quad A^6 = -A^3 = E,$$

так что $\operatorname{ord} A = 6$. Конечно, этот пример подобран специально: вероятность того, что порядок наудачу выбранной матрицы $A \in GL_2(\mathbb{R})$ будет конечен, равна нулю.

П р и м е р 5. Порядок комплексного числа a в группе $\mathbb{C}^*$ конечен тогда и только тогда, когда это число есть корень некоторой степени из единицы.

В случае $\operatorname{ord} a = \infty$ подгруппа $\langle a \rangle$ бесконечна. Рассмотрим подробнее случай $\operatorname{ord} a = n < \infty$.

Предложение 3.3. *Если* $\operatorname{ord} a = n$, *то*

1) $a^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$*;*

2) $a^k = a^l \Leftrightarrow k - l$ *делится на* n*.*

Доказательство. 1) Разделим m на n остатком:

$$m = nq + r, \qquad 0 \leq r < n.$$

Тогда в силу определения порядка

$$a^m = (a^n)^q a^r = a^r = 1 \Leftrightarrow r = 0.$$

2) В силу пункта 1

$$a^k = a^l \Leftrightarrow a^{k-l} = 1 \Leftrightarrow n \mid (k - l),$$

что и требуется. □

Следствие 3.1. *Если* $\operatorname{ord} a = n$, *то циклическая подгруппа* $\langle a \rangle$, *порожденная элементом* a, *содержит* n *элементов.*

Доказательство. Действительно,

$$\langle a \rangle = \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\},$$

причем все перечисленные элементы различны. Действительно, если бы $a^k = a^s$ при некоторых k, s, $0 \leq k < s < n$, то тогда, умножая обе части этого равенства на a^{-k}, мы имели бы $a^{s-k} = 1$ и $0 < s - k < n$. Это противоречит тому, что $\operatorname{ord} a = n$ по условию. □

Предложение 3.4. *Если* $\operatorname{ord} g = n$, *то* $\operatorname{ord} g^k = \dfrac{n}{(n,k)}$.

Доказательство. Пусть

$$(n, k) = d, \quad n = n_1 d, \quad k = k_1 d.$$

Тогда $(n_1, k_1) = 1$ и

$$(g^k)^m = 1 \Leftrightarrow n \mid km \Leftrightarrow n_1 \mid k_1 m \Leftrightarrow n_1 \mid m.$$

Следовательно, $\operatorname{ord} g^k = n_1$. □

Отметим, что $\operatorname{ord} e = 1$; порядки же всех остальных элементов группы больше 1. В аддитивной группе говорят не о степенях элемента a, а о его *кратных*, которые обозначают через ka, т. е. ka — аддитивный аналог для a^k. В соответствии с этим порядок элемента a аддитивной группы G — это наименьшее из натуральных чисел n (если такие существуют), для которых

$$na = \underbrace{a + a + \cdots a}_{n} = 0.$$

Пусть $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа, порожденная элементом a. Тогда G состоит из всех степеней элемента a, т. е. $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\operatorname{ord} a = \infty$, то в циклической группе $\langle a \rangle$ элементы a^n и a^m различны при $n \neq m$ (иначе мы имели бы $a^{n-m} = 1$) и, следовательно, группа $\langle a \rangle$ бесконечна. Если же $\operatorname{ord} a = n$, то по следствию 3.1 $\langle a \rangle = \{1 = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Значит, порядок группы $\langle a \rangle$ равен n. По предложению 3.3 элементы a^k и a^l совпадают тогда и только тогда, когда $k - l$ делится на n.

Циклические группы — наиболее простые группы, которые можно себе представить (в частности, они абелевы). Примером бесконечной циклической группы является группа $\mathbb{Z}$ всех целых чисел относительно обычной операции сложения (в качестве образующей a можно взять 1 или -1). Пример конечной циклической группы порядка n — группа $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n (в качестве образующей a можно взять класс вычетов $\overline{1}$). Оказывается, с точностью до изоморфизма этими группами исчерпываются все циклические группы.

Теорема 3.1. *Любая бесконечная циклическая группа изоморфна группе $\mathbb{Z}$, а любая конечная циклическая группа порядка n изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$.*

Доказательство. Если $\langle a \rangle$ — бесконечная циклическая группа, то отображение $f : \mathbb{Z} \to \langle a \rangle$, заданное правилом $f(k) = a^k$, является изоморфизмом. Если $\langle a \rangle$ — циклическая группа порядка n, то отображение $f : \mathbb{Z}_n \to \langle a \rangle$, заданное тем же правилом $f(\overline{k}) = a^k$, является изоморфизмом. Сюръективность f очевидна. Проверим инъективность f. Предположим противное: $f(\overline{k}) = f(\overline{l})$, т. е. $a^k = a^l$ при некоторых

$0 \leq k < l \leq n-1$. Но тогда мы должны иметь $k \equiv l \pmod{n}$, что невозможно. $\square$

Легко видеть, что в бесконечной циклической группе $\langle a \rangle$ порождающими элементами являются только a и a^{-1}. Поскольку порядок конечной циклической группы равен порядку ее порождающего элемента, то из предложения 3.4 следует предложение 3.5.

Предложение 3.5. *Элемент g^k циклической группы $G = \langle g \rangle$ порядка n является порождающим тогда и только тогда, когда n и k взаимно просты, т. е. $(n, k) = 1$.*

Пример 6. Мультипликативная группа C_n комплексных корней n-й степени из 1 является циклической. В самом деле, эти корни есть числа

$$\alpha_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ясно, что $\alpha_k = (\alpha_1)^k$. Следовательно, группа C_n — циклическая и порождается элементом α_1. В частности, $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$. Порождающие элементы группы C_n называются *первообразными* корнями n-й степени из 1. Это корни вида α_k, где $(n, k) = 1$. Например, первообразные корни 12-й степени из 1 — это $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_{11}$.

Для понимания строения какой-либо группы важную роль играет знание ее подгрупп. Все подгруппы циклической группы могут быть легко описаны.

Теорема 3.2. 1. *Любая подгруппа циклической группы — циклическая.*

2. *В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка n для любого натурального делителя d числа n существует одна подгруппа H порядка d. Подгруппа H порождается элементом $a^{\frac{n}{d}}$.*

Доказательство. 1. Очевидно, единичная подгруппа — циклическая. Пусть H — неединичная подгруппа циклической группы $\langle a \rangle$, и пусть k — наименьшее натуральное число с условием $a^k \in H$. Очевидно, $\langle a^k \rangle \subset H$. Докажем, что $\langle a^k \rangle = H$. Возьмем в H произвольный элемент, он имеет вид a^t. Поделим t на k с остатком: $t = kq + r$, $0 \leq r < k$. Тогда $a^r = a^{t-kq} = a^t(a^k)^{-q} \in H$. В силу минимальности k получаем, что $r = 0$. Тогда $a^t = (a^k)^q \in \langle a^k \rangle$.

2. Пусть $n = dn_1$. Тогда в силу предложения 3.4 элемент a^{n_1} имеет порядок d и порождает циклическую подгруппу порядка d. Покажем, что любая подгруппа $H \leq \langle a \rangle$ порядка d совпадает с $\langle a^{n_1} \rangle$. В силу пункта 1 H — циклическая подгруппа в $\langle a \rangle$, порожденная элементом a^t. Нам достаточно показать, что $a^t \in \langle a^{n_1} \rangle$. Так как a^t имеет порядок d, то $a^{td} = 1$. По условию a имеет порядок n, следовательно, по предложению 3.3 $n|td$, т. е. $td = ns = dn_1 s$. Отсюда получаем, что $t = n_1 s$ и $a^t = (a^{n_1})^s \in \langle a^{n_1} \rangle$. □

Следствие 3.2. *В циклической группе простого порядка любая неединичная подгруппа совпадает со всей группой.*

Упражнения

1. Доказать, что число решений уравнения $x^k = 1$ в циклической группе порядка n равно наибольшему общему делителю чисел n и k.

2. Если a и b — перестановочные элементы группы G, т. е. $ab = ba$, и их порядки взаимно просты, то $\operatorname{ord} ab = \operatorname{ord} a \operatorname{ord} b$.

3. Найти порядки элементов $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ группы $GL_2(\mathbb{C})$.

4. Выписать все элементы группы $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ и указать их порядки.

5. Доказать, что порядки $\operatorname{ord}(g)$ и $\operatorname{ord}(hgh^{-1})$ элементов g и hgh^{-1} группы G одинаковы.

6. Доказать, что для любого элемента g группы G $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} g^{-1}$.

7. Доказать, что для любых элементов g_1, g_2 группы G $\operatorname{ord}(g_1 g_2) = \operatorname{ord}(g_2 g_1)$.

8. Пусть G — неединичная группа, в которой все неединичные элементы имеют один и тот же порядок p. Доказать, что p — простое число.

9. В группе $GL_2(\mathbb{R})$ найти две матрицы a и b, имеющие конечные порядки, для которых произведение ab было бы элементом бесконечного порядка. Доказать, что в абелевой группе такое невозможно, т. е. элементы конечного порядка в абелевой группе образуют подгруппу (*подгруппу кручения*).

10. Доказать, что в абелевой группе множество тех элементов, порядки которых делят фиксированное число n, является подгруппой. Привести пример неабелевой группы, для которой это утверждение неверно.

11. Обозначим через G множество всех ненулевых вещественных чисел a, для каждого из которых a^n — рациональное число при некотором натуральном n. Доказать, что G — подгруппа $\mathbb{R}^*$. Является ли она циклической?

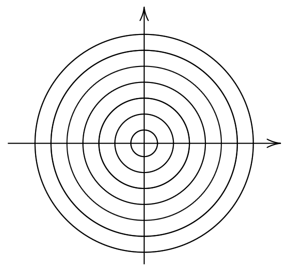
12. Пусть G — группа порядка n. Доказать, что группа G — циклическая тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка n.

13. Пусть $\mathbb{Z}_n$ — циклическая группа порядка n. Найти количество элементов порядка p^m в $\mathbb{Z}_{p^n}$ $(0 < m < n$, p — простое).

§ 4. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ И ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

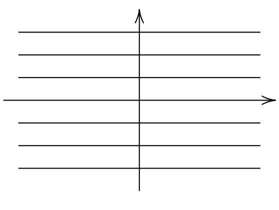
Определение 4.1. *Пусть H — подгруппа в группе G, и $g \in G$.* ***Левым смежным классом*** *gH называется подмножество $\{gh \mid h \in H\}$ в G.* ***Правым смежным классом*** *Hg называется подмножество $\{hg \mid h \in H\}$ в G.*

Пример 1. Смежными классами группы $\mathbb{C}^*$ по подгруппе $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ являются множества $xT = \{xz \mid |z| = 1\}$, где $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Записав z в тригонометрической форме $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, получим



$$xT = \{r(\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Эти смежные классы изображаются на комплексной плоскости окружностями с центром в начале координат.

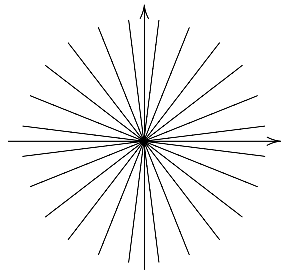


Пример 2. Смежными классами аддитивной группы $\mathbb{C}$ по подгруппе $\mathbb{R}$ являются множества $a+bi+\mathbb{R} = \{a + bi + x \mid x \in \mathbb{R}\}$. Эти смежные классы изображаются на комплексной плоскости прямыми, параллельными вещественной оси.

Пример 3. Смежными классами мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ по подгруппе $\mathbb{R}^+$ положительных вещественных чисел являются множества

$$x\mathbb{R}^+ = \left\{xz \mid z \in \mathbb{R}^+\right\}, \text{ где } x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Эти смежные классы изображаются на комплексной плоскости лучами, исходящими из начала координат.



Предложение 4.1. *Пусть H — подгруппа в группе G и $x, y \in G$. Если $y \in xH$, то $yH = xH$. Аналогично, если $y \in Hx$, то $Hy = Hx$. В частности, если $x \in H$, то $xH = H = Hx$.*

Доказательство. Докажем предложение для левых смежных классов (для правых смежных классов доказательство проводится аналогично). По условию $y = xh$ для некоторого $h \in H$. Тогда для любого элемента $h_1 \in H$ имеем $yh_1 = x(hh_1) \in xH$, значит, $yH \subset xH$. Поскольку $x = yh^{-1}$, то аналогично получаем $xH \subset yH$. Значит, $xH = yH$. □

Предложение 4.2 (Критерий равенства смежных классов). *Пусть H — подгруппа в группе G и $x, y \in G$. Тогда*

$$xH = yH \quad \Leftrightarrow \quad x^{-1}y \in H, \tag{4.1}$$

$$Hx = Hy \quad \Leftrightarrow \quad yx^{-1} \in H. \tag{4.2}$$

Доказательство. Если $xH = yH$, то $y = y \cdot 1 \in yH = xH$. Следовательно, $y = xh$ для некоторого $h \in H$, т. е. $x^{-1}y = h \in H$. Обратно, если $x^{-1}y = h \in H$, то $y = xh$ и в силу предложения 4.1 $xH = yH$. □

Пример 4. В случае $G = GL_n(K)$, $H = SL_n(K)$ условия равенства смежных классов 4.1 и 4.2 означают, что $\det g_1 = \det g_2$. Поэтому левые смежные классы в данном случае совпадают с правыми (хотя группа $GL_n(K)$ не абелева); каждый из них представляет собой совокупность всех матриц с определителем, равным определенному фиксированному числу.

Следствие 4.1. *Пусть H — подгруппа в группе G. Тогда два левых (правых) смежных класса G по H либо совпадают, либо не пересекаются. В частности, группа G является объединением непересекающихся левых (правых) смежных классов G по H.*

Доказательство. Предположим, что $z \in xH \cap yH$. Тогда из предложения 4.1 следует, что $xH = zH = yH$. $\square$

Представление конечной группы G в виде объединения непересекающихся левых (правых) смежных классов G по H называют *разложением Лагранжа.*

Определение 4.2. *Множество левых смежных классов группы G по подгруппе H обозначается через G/H. Мощность множества G/H называется* ***индексом*** *подгруппы H и обозначается через $[G : H]$.*

Мощность множества левых смежных классов группы G по подгруппе H совпадает с мощностью множества правых смежных классов (см. упражнение 1).

Теорема 4.1 (Лагранж). *Если G — конечная группа и H — ее подгруппа, то $|G| = [G : H]|H|$.*

Доказательство. Покажем, что $|xH| = |H|$. Действительно, если $H = \{h_1, \ldots, h_s\}$, то $xH = \{xh_1, \ldots, xh_s\}$ и ясно, что $xh_i \neq xh_j$ при $i \neq j$.

Разобьем G на левые смежные классы по H. Тогда каждый элемент $x \in G$ лежит в некотором классе, а именно, в xH. Поскольку различные смежные классы не пересекаются, то порядок группы G равен произведению их числа на $|H|$. $\square$

Следствие 4.2. *Порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок группы.*

Следствие 4.3. *Порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы.*

Доказательство вытекает из следствия 4.2 и того, что порядок элемента равен порядку порождаемой им циклической подгруппы. $\square$

Следствие 4.4. *Всякая конечная группа простого порядка является циклической.*

Доказательство. В силу следствия 4.2 такая группа должна совпадать с циклической подгруппой, порожденной любым элементом, отличным от единицы. $\square$

Следствие 4.5. *Если $|G| = n$, то $g^n = 1$ для любого $g \in G$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{ord} g = m$. В силу следствия 4.3 имеем $m \mid n$. Значит, $g^n = (g^m)^{\frac{n}{m}} = 1$. □

Следствие 4.6. *Пусть A, B — подгруппы в G, причем $B \le A$. Тогда*

$$[G : B] = [G : A][A : B].$$

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$|G| = [G : A][A] = [G : B][B] \quad \text{и} \quad |A| = [A : B][B],$$

откуда и получаем требуемое равенство. □

Упражнения

1. Доказать, что соответствие $xH \leftrightarrow Hx^{-1}$ задает биекцию между множествами левых и правых смежных классов группы G по подгруппе H.

2. Взяв какую-нибудь подгруппу второго порядка в симметрической группе S_3, найти левое и правое разложение Лагранжа по этой подгруппе.

3. Найти левые и правые смежные классы симметрической группы S_4 по ее подгруппе $H\,\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 1\}$.

4. Пусть K — правый смежный класс группы G по подгруппе H. Доказать, что для любых $x, y, z \in K$ имеем $xy^{-1}z \in K$.

5. Доказать, что верно и обратное утверждение: если K — непустое подмножество группы G и для всех $x, y, z \in K$ имеем $xy^{-1}z \in K$, то K — правый смежный класс группы G по некоторой ее подгруппе H.

6. Доказать, что если H_1 и H_2 — подгруппы конечных индексов в группе G, то $H_1 \cap H_2$ — также подгруппа конечного индекса в G.

7. Пусть G — группа, H_1 и H_2 — ее подгруппы порядков m_1 и m_2, НОД$(m_1, m_2) = 1$. Доказать, что $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

8. Пусть G — группа порядка $2k$, H — ее подгруппа порядка k. Доказать, что квадраты всех элементов G принадлежат H.

§ 5. ГОМОМОРФИЗМЫ ГРУПП

Связи между различными алгебраическими структурами одного типа устанавливаются при помощи гомоморфизмов. Понятие гомоморфизма отличается от понятия изоморфизма тем, что не требует биективности. В одном случае мы уже встречались с этим понятием. А именно, гомоморфизмы векторных пространств — не что иное, как их линейные отображения. Дадим точное определение гомоморфизма групп.

Определение 5.1. *Отображение групп $f : G \to H$ называется* ***гомоморфизмом****, если $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in G$. Инъективный гомоморфизм называют* ***мономорфизмом****, сюръективный гомоморфизм —* ***эпиморфизмом****, биективный гомоморфизм —* ***изоморфизмом****, изоморфизм группы на себя —* ***автоморфизмом****, гомоморфизм группы в себя — ее* ***эндоморфизмом****.*

Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм. Установим общие свойства гомоморфизмов групп.

Предложение 5.1. *Пусть $a \in G$. Тогда*

$$f(1) = 1, \qquad f(a^{-1}) = f(a)^{-1}.$$

Доказательство. По определению гомоморфизма

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1).$$

Умножая обе части на $f(1)^{-1}$ слева, получаем $f(1) = 1$. Далее,

$$f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(1) = 1.$$

Значит, элемент $f(a^{-1})$ является обратным к $f(a)$. □

Предложение 5.2. *Если K — подгруппа в G, то множество*

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$$

является подгруппой в H, называемой ***образом*** *K. В частности, образ $\operatorname{Im} f = f(G)$ гомоморфизма f является подгруппой группы H.*

Доказательство следует из определения гомоморфизма и предложения 5.1.

Предложение 5.3. *Множество*

$$\operatorname{Ker}(f) = \{a \in G \mid f(a) = 1\}$$

является подгруппой группы G и называется ***ядром*** *гомоморфизма f.*

Если K — подгруппа в H, то множество

$$f^{-1}(K) = \{x \in G \mid f(x) \in K\}$$

является подгруппой в G, называемой ***полным прообразом*** *K, при этом* $\mathrm{Ker}(f) \le f^{-1}(K)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $f^{-1}(K) \le G$, поскольку $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{1\})$ — полный прообраз единичной подгруппы. Для произвольных элементов $a, b \in f^{-1}(K)$ имеем $f(a), f(b) \in K$. Так как K — подгруппа, то $f(ab) = f(a)f(b) \in K$ и $f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \in K$, откуда $ab, a^{-1} \in f^{-1}(K)$. Следовательно, $f^{-1}(K) \le G$. Далее, поскольку $1 \in K$, то $f^{-1}(1) = \mathrm{Ker}(f) \le f^{-1}(K)$. □

Таким образом, гомоморфизм $f : G \to H$ является мономорфизмом (т. е. инъективен) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$; f — эпиморфизм (т. е. сюръективен) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\ f = H$; f — изоморфизм (т. е. биективен) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\ f = H$ и $\mathrm{Ker}\, f = \{1\}$.

Предложение 5.4. *Пусть $a, b \in G$. Тогда*

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a\,\mathrm{Ker}\, f = b\,\mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow a^{-1}b \in \mathrm{Ker}\, f.$$

Доказательство. Учитывая критерий равенства смежных классов (предложение 4.2) и то, что f — гомоморфизм, получаем

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(a)^{-1}f(b) = f(a^{-1})f(b) = f(a^{-1}b) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^{-1}b \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow a\,\mathrm{Ker}\, f = b\,\mathrm{Ker}\, f.$$

Предложение доказано. □

Предложение 5.5. *Пусть $f : G \to H$ — изоморфизм групп. Тогда обратное отображение $f^{-1} : H \to G$ — также изоморфизм.*

Доказательство. Ясно, что f^{-1} — биекция. Пусть $x, y \in H$ и $f^{-1}(x) = a$, $f^{-1}(y) = b$. Тогда

$$f(ab) = f(a)f(b) = xy.$$

Следовательно,

$$f^{-1}(xy) = ab = f^{-1}(x)f^{-1}(y),$$

а это и означает, что f^{-1} — гомоморфизм. □

Приведем примеры гомоморфизмов групп.

1. Пусть G — произвольная абелева группа. Тогда для любого

$n \in \mathbb{Z}$ отображение $f : G \to G$, $f(x) = x^n$ является эндоморфизмом группы G (для неабелевой группы это неверно). В случае $G = C^*$ отображение f является эпиморфизмом, а его ядром является группа C_n корней степени n из 1.

2. Согласно основному свойству экспоненты отображение exp является гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{R}$ в мультипликативную группу $\mathbb{R}^*$. Его образ — это подгруппа $\mathbb{R}^{*+}$ положительных чисел, а ядро тривиально.

3. Отображение $x \mapsto \cos x + i \sin x$ является гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{R}$ в группу $\mathbb{C}^*$. Его образ — подгруппа $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ в $\mathbb{C}^*$ (окружность радиуса 1 с центром в начале координат), а ядро — все вещественные числа вида $2k\boldsymbol{\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Формула умножения определителей означает, что отображение $\det : GL_n(K) \to K^*$, $A \mapsto \det A$, есть гомоморфизм. Его ядро — это группа $SL_n(K)$ матриц с определителем 1.

6. Отображение $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in \mathbb{Z}$ соответствующий класс вычетов $\overline{x}$ по модулю n, является гомоморфизмом циклических групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$. Его ядром является циклическая подгруппа $\langle n \rangle < \mathbb{Z}$, порожденная n. Фактически, $\langle n \rangle = \{nt \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

7. Рассмотрим отображение $\operatorname{sgn} : S_n \to H = \{\pm 1\}$, где H — циклическая группа порядка 2, определенное по правилу

$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \boldsymbol{\sigma} \text{ — четная подстановка,} \\ -1, & \text{если } \boldsymbol{\sigma} \text{ — нечетная подстановка.} \end{cases}$$

Легко проверить, что sgn является гомоморфизмом из G в H. Ядром этого гомоморфизма является *знакопеременная группа* A_n степени n, состоящая из всех четных подстановок.

Предложение 5.6. *Пусть $f : G \to H$, $g : H \to K$ — гомоморфизмы. Тогда*

1) *$gf : G \to K$ — гомоморфизм;*

2) *если f и g — изоморфизмы, то gf также изомоморфизм.*

Доказательство. 1) Следующее вычисление показывает, что gf — гомоморфизм:

$$gf(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = gf(x)gf(y).$$

2) Достаточно заметить, что композиция биективных отображений — биективное отображение. □

Рассмотрим автоморфизмы групп. Обозначим через $\operatorname{Aut} G$ множество всех автоморфизмов группы G.

Предложение 5.7. $\operatorname{Aut} G$ *является группой относительно операции композиции автоморфизмов.*

Доказательство немедленно следует из предложений 5.5 и 5.6.

Пусть G — группа и $g \in G$. Рассмотрим отображение

$$i_g : G \to G, \qquad i_g(x) = gxg^{-1}.$$

Предложение 5.8. i_g *является автоморфизмом группы* G *и называется* ***внутренним*** *автоморфизмом (или* ***сопряжением*** *при помощи* g*).*

Доказательство. Справедливы равенства

$$i_g(xy) = gxyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = i_g(x)i_g(y),$$
$$i_g i_{g^{-1}} = i_{gg^{-1}} = i_1 = \mathrm{id}\,.$$

Следовательно, $i_g^{-1} = i_{g^{-1}}$ — также внутренний автоморфизм. □

Множество всех внутренних автоморфизмов обозначается $\operatorname{Inn} G$ и $\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$. Действительно, для $g, h \in G$, $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ имеем

$$i_g i_h = i_{gh} \in \operatorname{Inn} G, \quad i_g^{-1} = i_{g^{-1}} \in \operatorname{Inn} G, \quad \varphi i_g \varphi^{-1} = i_{\varphi(g)}.$$

Теорема 5.1 (Кэли). *Любая конечная группа* G *порядка* n *изоморфна подгруппе симметрической группы* S_n*.*

Доказательство. Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Будем рассматривать группу S_n как группу подстановок множества G. Любой элемент $\alpha \in S_n$ можно записать в виде таблицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ g_{i_1} & \cdots & g_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Поставим в соответствие элементу $a \in G$ подстановку

$$\sigma_a = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ ag_1 & \ldots & ag_n \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\sigma}_a$ — действительно подстановка, так как элементы $ag_1, \ldots, ag_n$ второй строки попарно различны. Пусть $H = \{\boldsymbol{\sigma}_{g_1}, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_{g_n}\} \subset S_n$. Так как для любых элементов $a, b, g \in G$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_{a^{-1}}(g) = \boldsymbol{\sigma}_a(a^{-1}g) = aa^{-1}g = g, \\ \boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_b(g) = \boldsymbol{\sigma}_a(bg) = abg = \boldsymbol{\sigma}_{ab}(g), \end{aligned} \tag{5.1}$$

то $(\boldsymbol{\sigma}_a)^{-1} = \boldsymbol{\sigma}_{a^{-1}} \in H$ и $\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_b = \boldsymbol{\sigma}_{ab} \in H$. Значит, H — подгруппа в S_n. Остается проверить, что отображение

$$f : G \to H, \qquad f(a) = \boldsymbol{\sigma}_a,$$

является изоморфизмом. То, что f — гомоморфизм, следует из (5.1). Сюръективность f очевидна. Если же $f(a) = f(b)$, то $\boldsymbol{\sigma}_a = \boldsymbol{\sigma}_b$ и

$$\boldsymbol{\sigma}_a(1) = a = \boldsymbol{\sigma}_b(1) = b,$$

что доказывает инъективность f. □

Упражнения

1. Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп, $x \in G$. Доказать, что $f^{-1}(f(x)) = x \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f)x$.

2. Пусть $f : G \to H$, $g : H \to K$ — гомоморфизмы групп. Доказать, что:

а) если gf — мономорфизм, то и f — тоже мономорфизм;

б) если gf — эпиморфизм, то и g — тоже эпиморфизм.

3. Пусть $f : G \to H$ — эпиморфизм группы G на группу H. Доказать, что если G — абелева, то абелева и H. Верно ли обратное утверждение?

4. Доказать, что отображение $f : G \to G$, $f(x) = x^2$ является гоморфизмом группы в себя тогда и только тогда, когда G — абелева.

5. Пусть G — конечная группа, $f : G \to H$ — гомоморфизм групп. Доказать, что для любого $g \in G$ справедливо $\operatorname{ord}(f(g)) \mid \operatorname{ord}(g)$.

6. Доказать, что группа $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}$ изоморфна циклической группе второго порядка.

7. Найти $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_n$ при $n = 4, 6, 8, 9$.

8. Доказать, что отношение изморфизма групп является отношением эквивалентности.

§ 6. НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ. ФАКТОРГРУППЫ

Пусть H — подгруппа группы G и $g \in G$. Рассмотрим множество $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$. Равенства

$$(gxg^{-1})(gyg^{-1}) = gxyg^{-1} \in gHg^{-1}, \qquad (gxg^{-1})^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$$

показывают, что gHg^{-1} есть подгруппа в G.

Определение 6.1. *Говорят, что H —* ***нормальная подгруппа*** *в G и пишут $H \lhd G$, если $gHg^{-1} \subset H$ для любого $g \in G$.*

Если $H \lhd G$, то в действительности $gHg^{-1} = H$ для любого $g \in G$. Достаточно убедиться в том, что $H \subset gHg^{-1}$. Для любого $h \in H$ имеем $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$, поскольку $g^{-1}hg \in H$ в силу нормальности подгруппы H.

Рассмотрим примеры нормальных подгрупп.

1. $SL_n(K) \lhd GL_n(K)$. Если $g \in GL_n(K)$, $h \in SL_n(K)$, то

$$\det(ghg^{-1}) = \det(g)\det(h)(\det(g))^{-1} = 1,$$

следовательно, $ghg^{-1} \in GL_n(K)$.

2. В абелевой группе G любая подгруппа H нормальна.

3. $\{1\} \lhd G$, $G \lhd G$ — нормальные подгруппы в любой группе G.

Предложение 6.1. *Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп. Тогда* $\operatorname{Ker} f \lhd G$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $\operatorname{Ker} f \le G$ (см. предложение 5.3). Пусть $g \in G$, $x \in \operatorname{Ker} f$. Тогда

$$f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = 1,$$

следовательно, $gxg^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Ker} f \lhd G$. □

Предложение 6.2. *Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп и $K \lhd G$, $T \lhd H$. Тогда $f(K) \lhd f(G)$, $f^{-1}(T) \lhd G$.*

Доказательство. Пусть $g \in f(G)$, $x \in f(K)$. Тогда $g = f(h)$, $x = f(y)$ для некоторых элементов $h \in G$, $y \in K$. Тогда

$$gxg^{-1} = f(h)f(y)f(h)^{-1} = f(hyh^{-1}) \in f(K),$$

поскольку в силу нормальности K элемент $hyh^{-1} \in K$. Это доказывает, что $f(K) \lhd f(G)$.

Пусть теперь $z \in f^{-1}(T)$ и $a \in G$. Тогда

$$f(aza^{-1}) = f(a)f(z)f(a)^{-1} \in T,$$

потому что $f(z) \in T$ и $T \lhd H$. Поэтому $aza^{-1} \in f^{-1}(T)$, что и доказывает нормальность $f^{-1}(T)$. $\square$

Предложение 6.3. *Пусть $H \leq G$. Тогда $H \lhd G$ тогда и только тогда, когда левый смежный класс xH совпадает с правым смежным классом Hx для произвольного элемента x из G.*

Доказательство. Для любого элемента $h \in H$ справедливо $xh = (xhx^{-1})x = h_1x$, где $h_1 = xhx^{-1} \in H$ в силу нормальности H. Значит, $xH \subset Hx$. Аналогично $Hx \subset xH$. Следовательно, $xH = Hx$.

Если $xH = Hx$ для произвольного элемента x из G, то для произвольного элемента $h \in H$ имеем $xh = h_1x$ для некоторого элемента $h_1 \in H$. Следовательно, $xhx^{-1} = h_1 \in H$ и $H \lhd G$. $\square$

Определение 6.2. *Если A, B — произвольные подмножества группы G, то их произведением называется множество*

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Предложение 6.4. *Пусть $H \lhd G$ и $K \leq G$. Тогда*

1. *$H \cap K$ — нормальная подгруппа в K.*

2. *Множество HK совпадает с KH и является подгруппой в G, а если $K \lhd G$, то и $HK \lhd G$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из определения нормальной подгруппы.

Докажем, что $HK = KH$. Множество HK (соответственно KH) есть объединение смежных классов Hk (соответственно kH), $k \in K$. По предложению 6.3 $kH = Hk$. Значит, KH и HK состоят из одних и тех же смежных классов. Поэтому $HK = KH$.

Докажем, что $HK \leq G$. Пусть $hk, h_1k_1 \in HK$. Тогда

$$hkh_1k_1 = h(kh_1k^{-1})kk_1 = (hh_2)(kk_1),$$

где $h_2 = kh_1k^{-1} \in H$ в силу нормальности H. Следовательно, $hh_2 \in H$, $kk_1 \in K$ и поэтому $(hh_2)(kk_1) \in HK$. Кроме того,

$$(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} = (k^{-1}h^{-1}k)k^{-1} \in HK,$$

поскольку снова в силу нормальности H имеем $k^{-1}h^{-1}k \in H$. Значит, HK является подгруппой в G.

Предположим теперь, что $K \lhd G$. Тогда для любых элементов $h \in H$, $k \in K$, $x \in G$ имеем

$$xhkx^{-1} = (xhx^{-1})(xkx^{-1}) \in HK$$

в силу того, что H и K — нормальные подгруппы по условию, а поэтому $xhx^{-1} \in H$, $xkx^{-1} \in K$. Значит, $HK \lhd G$. □

Замечание 1. Если обе подгруппы H и K не являются нормальными подгруппами в G, то не всегда HK — подгруппа в G. Например, рассмотрим симметрическую группу S_3 и в ней две циклические подгруппы $H = \langle(12)\rangle$ и $K = \langle(13)\rangle$. Тогда множество $HK = \{1, (12), (13), (132)\}$ состоит из четырех элементов и не является подгруппой в S_3, поскольку 4 не делит порядок S_3, который равен 6.

Предложение 6.5. *Пусть $H \lhd G$ и $a, b \in G$. Тогда*

$$(aH)(bH) = abH. \tag{6.1}$$

Доказательство. Из равенства $abh = (a \cdot 1)(bh)$ следует, что $abH \subset (aH)(bH)$. Пусть $z \in (aH)(bH)$. Тогда

$$z = ah_1bh_2 = ab(b^{-1}h_1b)h_2.$$

Так как H — нормальная подгруппа, то $b^{-1}h_1b \in H$; значит, $z \in abH$ и $(aH)(bH) \subset abH$. Из двух противоположных включений следует, что $(aH)(bH) = abH$. □

Замечание 2. Отметим, что если выполнено свойство (6.1) для любых элементов $a, b \in G$, то нетрудно доказать, что $H \lhd G$.

Обозначим через G/H множество левых смежных классов группы G по подгруппе H. Предложение 6.5 позволяет задать на G/H алгебраическую операцию формулой (6.1).

Теорема 6.1. *Множество G/H с введенной выше операцией умножения смежных классов является группой, которая называется* ***факторгруппой*** *группы G по нормальной подгруппе H. При этом смежный класс $1H = H$ является единичным элементом в G/H, а смежный класс $a^{-1}H$ — обратным элементом к aH.*

Доказательство. Так как

$$(aHbH)cH = abHcH = (ab)cH, \qquad aH(bHcH) = aHbcH = a(bc)H$$

и умножение в группе ассоциативно, т. е. $(ab)c = a(bc)$, то

$$(ab)cH = a(bc)H.$$

Следовательно, умножение смежных классов ассоциативно. Далее,

$$aHH = HaH = aH,$$

значит, H — единица в G/H. Непосредственным умножением проверяется, что $a^{-1}H$ — обратный элемент к aH. □

Определим отображение

$$f : G \to G/H, \qquad f(g) = gH.$$

Предложение 6.6. *Отображение f является сюръективным гомоморфизмом группы G на факторгруппу G/H и называется* ***каноническим гомоморфизмом****, при этом* $\operatorname{Ker} f = H$.

Доказательство. Равенства

$$f(xy) = xyH = xHyH = f(x)f(y)$$

доказывают, что f — гомоморфизм. Очевидно, f сюръективен. Найдем ядро f.

$$f(x) = xH = H \Leftrightarrow x \in H.$$

Таким образом, $\operatorname{Ker} f = H$. □

В предложении 6.1 мы доказали, что ядро любого гомоморфизма — нормальная подгруппа. Предложение 6.6 утверждает обратное: любая нормальная подгруппа — ядро некоторого гомоморфизма, а именно, канонического гомоморфизма.

Изучая циклические группы, мы установили в теореме 3.2, что подгруппа циклической группы — циклическая. Рассмотрим теперь факторгруппы циклических групп.

Предложение 6.7. *Пусть $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа и $H \leq G$. Тогда G/H — циклическая группа.*

Доказательство. Так как G абелева, то $H \lhd G$. Любой элемент из G/H имеет вид $a^n H = (aH)^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Значит, $G/H = \langle aH \rangle$ — циклическая группа, порожденная смежным классом aH. □

Обозначим через $L(G, H)$ совокупность подгрупп группы G, содержащих подгруппу H. В частности, $L(G, 1) = L(G)$ — совокупность всех подгрупп группы G, $L(G, G) = \{G\}$.

Теорема 6.2 (О соответствии подгрупп). *Пусть $f : G \to H$ — сюръективный гомоморфизм групп.*

1. Отображение $\psi : L(G, \mathrm{Ker}\, f) \to L(H)$, сопоставляющее подгруппе $K \in L(G, \mathrm{Ker}\, f)$ подгруппу $\psi(K) = f(K) \in L(H)$, является биекцией, сохраняющей включение. В частности, $f^{-1}(f(K)) = K$.

2. Эта биекция сохраняет нормальность: если $K \in L(G, \mathrm{Ker}\, f)$, то

$$K \lhd G \Leftrightarrow f(K) \lhd H.$$

3. Эта биекция сохраняет индексы: если $\mathrm{Ker}\, f \le K \le G$, то $[G : K] = [H : f(K)]$.

Доказательство. 1. Отображение ψ сюръективно, так как по предложению 5.3 полный прообраз $K = f^{-1}(T)$ подгруппы T группы H является подгруппой в G, содержащей $\mathrm{Ker}\, f$, и очевидно, что $\psi(K) = f(K) = T$. Проверим инъективность ψ.Пусть K_1, K_2 — две подгруппы в G, содержащие $\mathrm{Ker}\, f$, и $K_1 \ne K_2$. Предположим, что $f(K_1) = f(K_2)$. Так как $K_1 \ne K_2$, то найдется элемент x, лежащий в одной из этих групп и не лежащий в другой. Пусть, например, $x \in K_1$ и $x \notin K_2$. Тогда $f(x) \in f(K_1) = f(K_2)$, значит, $f(x) = f(y)$ для некоторого элемента $y \in f(K_2)$. Следовательно, $1 = f(x)f(y)^{-1} = f(xy^{-1})$, т. е. $xy^{-1} = z \in \mathrm{Ker}\, f$. Таким образом, $x = zy \in \mathrm{Ker}\, f \subset K_2$ — противоречие, доказывающее биективность ψ.

2. Утверждение этого пункта следует из более общего предложения 6.2.

3. Отображение из множества левых смежных классов G по K в множество левых смежных классов H по $f(K)$, заданное правилом $xK \mapsto f(x)f(K)$, очевидно, является сюръективным отображением. Это отображение инъективно, так как из $f(x)f(K) = f(y)f(K)$ следует $f(x)^{-1}f(y) = f(x^{-1}y) \in f(K)$, т. е. $x^{-1}y \in K$ в силу пункта 1 нашей теоремы. Следовательно, $xK = yK$. □

Упражнения

1. Пусть $C(G) = \{g \in G \mid gh = hg$ *для всех* $h \in G\}$ — *центр* группы G. Доказать, что $C(G)$ — нормальная подгруппа в G.

2. Знакопеременная группа A_n — нормальная подгруппа симметрической группы S_n.

3. Пусть $H_i,\ i \in I,$ — нормальные подгруппы в группе G. Доказать, что $H = \bigcap\limits_{i\in I} H_i \lhd G$.

4. Доказать, что если G — абелева группа и $H \lhd G$, то факторгруппа G/H — абелева.

5. Найти все нормальные подгруппы группы S_3.

6. Верно ли, что $GL_n(\mathbb{Q}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$?

7. Доказать, что в любой группе подгруппа индекса 2 является нормальной.

8. Пусть M — подмножество группы G. Положим $C_G(M) = \{g \in G \mid gm = mg$ для любого $m \in M\}$ (*централизатор* M в G). Доказать, что если $H \lhd G$, то $C_G(H) \lhd G$.

9. Доказать, что для циклической группы G из $G/A = G/B$ следует, что $A = B$.

10. Группа называется *периодической*, если каждый ее элемент имеет конечный порядок. Доказать, что если нормальная подгруппа H и факторгруппа G/H группы G периодические, то и сама группа G — периодическая.

11. Доказать, что в факторгруппе $\mathbb{Q}^+/\mathbb{Z}^+$ каждый элемент имеет конечный порядок. Конечна ли эта факторгруппа?

12. Пусть $H_1, H_2 \lhd G$, причем G/H_1 и G/H_2 — абелевы. Доказать, что $G/(H_1 \cap H_2)$ также абелева.

§ 7. ТЕОРЕМЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ

Теорема 7.1 (Основная теорема о гомоморфизмах групп). *Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп. Тогда*

$$f(G) \simeq G/\operatorname{Ker} f.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\psi : G/\operatorname{Ker} f \to f(G), \qquad \psi(g \operatorname{Ker} f) = f(g).$$

Убедимся, что ψ корректно определено, т. е. если $g \operatorname{Ker} f = h \operatorname{Ker} f$, то $\psi(g \operatorname{Ker} f) = \psi(h \operatorname{Ker} f)$ или, что эквивалентно, $f(g) = f(h)$. По предложению 4.2 равенство смежных классов $g\operatorname{Ker} f = h\operatorname{Ker} f$ означает, что $g^{-1}h \in \operatorname{Ker} f$. Значит, $f(g^{-1}h) = f(g^{-1})f(h) = 1$, откуда $f(g) = f(h)$. Отображение ψ — гомоморфизм, поскольку

$$\psi(g\operatorname{Ker} f\ h\operatorname{Ker} f) = \psi(gh\operatorname{Ker} f) = f(gh) =$$
$$= f(g)f(h) = \psi(g\operatorname{Ker} f)\psi(h\operatorname{Ker} f).$$

Очевидно, ψ сюръективно, поскольку для любого элемента $f(g) \in \in f(G)$ имеем $f(g) = \psi(g\operatorname{Ker} f)$.

И наконец, ψ инъективно, поскольку если $\psi(g\operatorname{Ker} f) = \psi(h\operatorname{Ker} f)$, то $f(g) = f(h)$ и, следовательно, $1 = f(g)^{-1}f(h) = f(g^{-1}h)$. Значит, $g^{-1}h \in \operatorname{Ker} f$, поэтому по предложению 4.2 $g\operatorname{Ker} f = h\operatorname{Ker} f$. $\square$

***Теорема 7.2* (*Вторая теорема о гомоморфизмах групп*).** *Если H и N — нормальные подгруппы группы G, причем $N \leq H$, то H/N — нормальная подгруппа группы G/N и*

$$(G/N)/(H/N) \simeq G/H.$$

Доказательство. По теореме о соответствии 6.2 подгруппа H/N нормальна в G/N. Факторгруппа $(G/N)/(H/N)$ состоит из смежных классов $gN(H/N)$, где gN — элемент факторгруппы G/N. Рассмотрим отображение $f : G \to (G/N)/(H/N)$, определяемое равенством $f(g) = = gN(H/N)$. Очевидно, f сюръективно. Из равенств

$$f(gt) = gtN(H/N) = gN(H/N)tN(H/N) = f(g)f(t).$$

следует, что f является гомоморфизмом. Докажем, что $\operatorname{Ker}(f) = H$. Очевидно, $H \subset \operatorname{Ker}(f)$, поскольку если $h \in H$, то $f(h) = hN(H/N) = = H/N$ — единичный элемент группы $(G/N)/(H/N)$. Докажем противоположное включение. Пусть $f(g) = gN(H/N) = H/N$. Тогда $gN \in H/N$, откуда $gN = hN$ для некоторого элемента $h \in H$. Значит, по предложению 4.2 $h^{-1}g = h_1 \in H$, следовательно, $g = hh_1 \in H$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(f) \subset H$ и мы имеем равенство $\operatorname{Ker} f = H$. Применяя основную теорему о гомоморфизмах, получаем $G/H \simeq (G/N)/(H/N)$. $\square$

Замечание 1. Отметим, что теорема 7.2 дополняет теорему 6.2. Биекция ψ из теоремы 6.2 сохраняет не только номальность подгрупп и индексы, но также индуцирует биекцию между множеством факторгрупп группы G по нормальным подгруппам H, содержащим N, и множеством факторгрупп группы G/N.

Теорема 7.3 (Третья теорема о гомоморфизмах групп). *Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда для любой подгруппы A пересечение $A \cap H$ является нормальной подгруппой в A и*

$$A/A \cap H \simeq AH/H.$$

Доказательство. В силу предложения 6.4 $A \cap H \lhd A$, $AH \leq$ $\leq G$. Поскольку $H \lhd G$, то тем более $H \lhd AH$. Поэтому определены рассматриваемые в теореме факторгруппы AH/H и $A/A \cap H$. Любой элемент факторгруппы AH/H имеет вид $ahH = aH$ для некоторого $a \in A$. Зададим отображение $f : A \to AH/H$ формулой $f(a) = aH$.

Следующее вычисление показывает, что f — гомоморфизм.

$$f(ab) = abH = aHbH = f(a)f(b).$$

Очевидно, f — сюръективное отображение. Найдем ядро f. Так как $f(h) = hH = H$, то $H \subset \operatorname{Ker} f$. Если $x \in \operatorname{Ker} f$, то $f(x) = xH = H$. Следовательно, $x \in H$, откуда получаем $H = \operatorname{Ker} f$. Применяя основную теорему о гомоморфизмах, получаем $AH/H \simeq A/A \cap H$. $\square$

Упражнения

1. Пусть E — единичная подгруппа группы G. Доказать, что $G/E \simeq G$.

2. Пусть U обозначает мультипликативную группу комплексных чисел с модулем, равным 1. Доказать, что $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+ \simeq U$.

3. Для натурального n рассмотрим отображение $f : U \to U$, $x \mapsto x^n$. Доказать, что f — гомоморфизм, найти ядро f и доказать, что $U/\operatorname{Ker} f \simeq U$.

4. Пусть $F = \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)\}$ — подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}^n$. Найти факторгруппу $\mathbb{R}^n/F$.

5. Пользуясь основной теоремой о гомоморфизмах, доказать, что:

а) $S_n/A_n \simeq \{\pm 1\}$;

б) $GL_n(K)/SL_n(K) \simeq K^*$.

6. Пусть $M_n(R)$ — кольцо квадратных матриц n-го порядка с элементами из кольца R. Найти фактогруппу (т. е. указать, какой из известных групп она изоморфна):

а) $M_2(\mathbb{R})^+/H$, где $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

б) $M_2(\mathbb{R})^+/H$, где $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \right\}$;

в) $GL_n(\mathbb{C})/H$, где $H = \{a \mid \det a = \pm 1\}$;

г) $GL_n(\mathbb{R})/H$, где $H = \{a \mid \det a > 0\}$.

§ 8. КОММУТАНТ

Определение 8.1. *Выражение* $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ *называется* ***коммутатором*** *элементов* x, y *группы* G.

Коммутатор служит корректирующим множителем, необходимым для того, чтобы поменять местами x и y:

$$xy = [x, y]yx.$$

Отсюда следует простое, но полезное

Предложение 8.1. *Элементы* x *и* y *перестановочны тогда и только тогда, когда коммутатор* $[x, y] = 1$.

Определение 8.2. Коммутантом *группы* G *называют подгруппу* $[G, G]$, *порожденную множеством всех коммутаторов* $[x, y]$, $x, y \in G$.

Хотя $[x, y]^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$ — снова коммутатор, однако произведение двух коммутаторов быть им уже не обязано. Таким образом, $[G, G]$ состоит из всевозможных произведений вида

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \ldots [x_k, y_k], \qquad x_i, y_i \in G.$$

Предложение 8.2. *Если* $K \lhd G$, *то* $[K, K] \lhd G$. *В частности,* $[G, G] \lhd G$.

Доказательство. Вычисление показывает, что для любых элементов $x_i, y_i \in K$, $1 \leq i, j \leq n$, и любого $g \in G$

$$g[x_1, y_1] \ldots [x_k, y_k]g^{-1} = [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}] \ldots [gx_kg^{-1}, gy_kg^{-1}] \in [K, K],$$

поскольку по условию $K \lhd G$, и поэтому gx_ig^{-1}, $gy_ig^{-1} \in K$ для всех i. $\square$

Докажем общее утверждение, вскрывающее внутренний смысл понятия «коммутант».

Теорема 8.1. *Факторгруппа $G/[G,G]$ абелева. Любая подгруппа $K \leq G$, содержащая коммутант $[G,G]$, нормальна в G и факторгруппа G/K абелева. Обратно, если $K \lhd G$ и факторгруппа G/K абелева, то $[G,G] \leq K$ (в частности, если G — конечная группа, то максимальный порядок абелевой факторгруппы G/K равен индексу $[G:[G,G]]$).*

Доказательство. Докажем, что факторгруппа $G/[G,G]$ абелева.

$$[a[G,G], b[G,G]] = a[G,G] \cdot b[G,G] \cdot a^{-1}[G,G] \cdot b^{-1}[G,G] = \\ = aba^{-1}b^{-1}[G,G] = [a,b][G,G] = [G,G],$$

т. е. коммутатор любых двух элементов факторгруппы G/K равен единичному элементу K. По предложению 8.1 любые два элемента факторгруппы G/K перестановочны. Значит, $G/[G,G]$ — абелева группа.

Докажем, что если $[G,G] \leq K$, то $K \lhd G$. Если $x \in K$, $g \in G$, то

$$gxg^{-1} = (gxg^{-1}x^{-1})x = [g,x]x \in [G,G]K = K,$$

откуда $K \lhd G$.

Докажем, что G/K — абелева. Для любых элементов $aK, bK \in K$ имеем

$$[aK, bK] = (aK)(bK)(a^{-1}K)(b^{-1}K) = aba^{-1}b^{-1}K = [a,b]K = K, \quad (8.1)$$

поскольку по условию $[a,b] \in K$. По предложению 8.1 G/K — абелева.

Обратно, если $K \lhd G$ и факторгруппа G/K абелева, то в силу (8.1) $[a,b]K = [aK,bK] = K$ для всех $a,b \in G$. Значит, $[a,b] \in K$ и $[G,G] \leq K$, поскольку $[G,G]$ порождается коммутаторами $[a,b]$. $\square$

Определение 8.3. *Пусть H и K — подгруппы группы G.* ***Взаимным коммутантом*** *групп H и K называется подгруппа $[H,K]$, порожденная всеми комутаторами вида $[h,k]$, $h \in H$, $k \in K$.*

Предложение 8.3. *Пусть $H \lhd G$, $K \lhd G$ и $H \cap K = \{1\}$. Тогда $[H,K] = 1$. В частности, любой элемент $h \in H$ перестановочен с любым элементом $k \in K$.*

Доказательство. Для произвольных элементов $h \in H$, $k \in K$ рассмотрим элемент $[h,k] = hkh^{-1}k^{-1}$. Так как $kh^{-1}k^{-1} \in H$ в силу нормальности H, то $[h,k] \in H$. С другой стороны, $hkh^{-1} \in K$ в силу нормальности K, поэтому $[h,k] \in K$. Следовательно, $[h,k] \in H \cap K = \{1\}$, откуда получаем $[H,K] = 1$. $\square$

Упражнения

1. Доказать, что если H, K — нормальные подгруппы группы G, то их взаимный коммутант $[H,K]$ является нормальной подгруппой в G.

2. Найти коммутант следующих групп:

а) S_3; в) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$;

б) $GL_2(\mathbb{R})$; г) S_n.

3. Пусть $f : G \to H$ — эпиморфизм групп. Доказать, что $f([G,G]) = [H,H]$. Верно ли, что $[G,G] = f^{-1}(H)$?

4. Доказать, что если H — подгруппа индекса 2 группы G, то H содержит коммутант $[G,G]$.

5. Пусть коммутант группы G содержится в ее центре. Доказать, что для любых $a, b, c \in G$ $[ab,c] = [a,c][b,c]$.

§ 9. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП

Рассмотрим конструкцию, позволяющую строить новые группы с помощью уже известных. Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — произвольные группы,

$$G = G_1 \times \cdots \times G_n = \{(g_1, \ldots, g_n) \mid g_i \in G_i, i = 1, \ldots, n\} —$$

их декартово произведение. Определим на G алгебраическую операцию формулой

$$(g_1, \ldots, g_n) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = (g_1h_1, \ldots, g_nh_n). \tag{9.1}$$

Теорема 9.1. *Декартово произведение $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ с введенной выше алгебраической операцией является группой, которая называется* ***(внешним) прямым произведением*** *групп $G_1, \ldots, G_n$.*

Доказательство. Умножение в G, определяемое формулой (9.1), ассоциативно, поскольку фактически сводится к умножению элементов в каждой из групп G_i. Элемент $e = (1_{G_1}, \ldots, 1_{G_n})$, где 1_{G_i} —

единичный элемент группы G_i, очевидно, является нейтральным элементом относительно введенной операции. Наконец, $(g_1, \dots, g_n)^{-1} = (g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1})$ — элемент, обратный к $(g_1, \dots, g_n)$. $\square$

При аддитивной записи групповой операции в $G_1, \dots, G_n$ говорят о *прямой сумме* групп $G_1, \dots, G_n$ и пишут $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$.

Отметим простейшие свойства прямых произведений групп.

1. Если $G_1, \dots, G_n$ — конечные группы, то $G = G_1 \times \dots \times G_n$ — конечная группа и

$$|G| = |G_1| \dots |G_n|.$$

2. Если $G_1 \simeq H_1, \dots, G_n \simeq H_n$, то $G_1 \times \dots \times G_n \simeq H_1 \times \dots \times H_n$.

Действительно, если $f_i : G_i \to H_i$ — изоморфизм, то отображение

$$f : G_1 \times \dots \times G_n \to H_1 \times \dots \times H_n, \quad f(g_1, \dots, g_n) = (f_1(g_1), \dots, f_n(g_n)),$$

очевидно, является требуемым изоморфизмом.

3. Для каждой группы G_i рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi_i : G_i \to G, \qquad \varphi_i(g) = (1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1)$$

(g находится на i-м месте). Ясно, что φ_i инъективен и, по основной теореме о гомоморфизмах, группа G_i изоморфна подгруппе $G_i' = \varphi_i(G_i) \leq G$. Кроме того, $G_i' \lhd G$, поскольку

$$(g_1, \dots, g_n)(1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1)(g_1, \dots, g_n)^{-1} = \\ = (1, \dots, 1, g_i g g_i^{-1}, 1, \dots, 1) \in G_i'.$$

Непосредственно из определения подгрупп G_i' следует, что если $i \neq j$, то $G_i' \cap G_j' = \{1\}$. Легко проверить, что при $i \neq j$ любые элементы $x \in H_i$, $y \in H_j$ перестановочны, т. е. $xy = yx$.

Предложение 9.1. *Произвольный элемент $x \in G$ единственным образом представляется в виде произведения $y_1 \dots y_n$, где $y_i \in G_i'$.*

Доказательство. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$. Положим

$$y_i = (1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) \in H_i.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $x = y_1 \dots y_n$. Если бы мы имели другое разложение $x = z_1 \dots z_n$, где

$$z_i = (1, \dots, 1, x_i', 1, \dots, 1) \in H_i,$$

то тогда

$$x = (x_1', \dots, x_n') = (x_1, \dots, x_n),$$

откуда $x_i = x_i'$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $y_i = z_i$, что и доказывает единственность разложения. $\square$

Предложение 9.1 подводит нас к следующему определению.

Определение 9.1. *Пусть $G_1, \dots, G_n$ — нормальные подгруппы группы G. Говорят, что G —* ***внутреннее прямое произведение*** *своих подгрупп $G_1, \dots, G_n$, если каждый элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде произведения $g = g_1 \dots g_n$, где $g_i \in G_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Учитывая это определение, можно сказать, что внешнее прямое произведение групп $G_1, \dots, G_n$ является внутренним прямым произведением своих нормальных подгрупп $G_1', \dots, G_n'$, причем каждая из групп G_i' — изоморфная копия группы G_i.

Предложение 9.2. *Если G является внутренним прямым произведением своих нормальных подгрупп $G_1, \dots, G_n$, то*

1) *$G_i \cap G_j = \{1\}$ при $i \neq j$;*

2) *$xy = yx$ для любых элементов $x \in G_i$, $y \in G_j$, $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть $z \in G_i \cap G_j$. Элемент z можно двумя способами представить в виде произведения элементов из подгрупп $G_1, \dots, G_n$:

$$z = 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot z \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot z \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$$

(в первом случае z стоит на i-ом месте, во втором — на j-ом). Из единственности такого представления следует, что $z = 1$.

Утверждение 2) немедленно следует из предложения 8.3. $\square$

Теорема 9.2. *Если G — внутреннее прямое произведение своих нормальных подгрупп $G_1, \dots, G_n$, то $G \simeq G_1 \times \dots \times G_n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $f : G_1 \times \dots \times G_n \to G$, $f((g_1, \dots, g_n)) = g_1 \dots g_n$. Поскольку каждый элемент $g \in G$ представляется в виде произведения $g = g_1 \dots g_n$, то отображение f сюръективно. Из единственности такого представления следует инъективность f.

Пусть $x = (g_1, \dots, g_n)$, $y = (h_1, \dots, h_n)$. В силу пункта 2 предложения 9.2 элементы g_i и h_j перестановочны при $i \neq j$. Тогда следующее вычисление показывает, что f — гомоморфизм:

$$f(xy) = f((g_1h_1, \ldots, g_nh_n)) = g_1h_1 \ldots g_nh_n =$$
$$= g_1 \ldots g_nh_1 \ldots h_n = f(x)f(y).$$

Значит, f — искомый изоморфизм. $\square$

Отличие внутреннего прямого произведения от внешнего состоит в том, что в первом случае G содержит сами нормальные подгруппы $G_1, \ldots, G_n$, а во втором — подгруппы $G'_1, \ldots, G'_n$, которые изоморфны группам $G_1, \ldots, G_n$.

Теорема 9.2 показывает, что если группа G есть внутреннее прямое произведение своих нормальных подгрупп $G_1, \ldots, G_n$, то изучение G полностью сводится к изучению ее подгрупп $G_1, \ldots, G_n$.

Рассмотрим подробнее случай двух множителей.

Теорема 9.3. *Группа G разлагается в прямое произведение своих подгрупп G_1 и G_2 тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) подгруппы G_1 и G_2 нормальны;

2) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$;

3) $G = G_1G_2$, т. е. каждый элемент $g \in G$ представляется в виде $g = g_1g_2$, где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$.

Доказательство. Утверждение «только тогда» доказано выше. Пусть выполнены условия 1)–3) предложения. Остается проверить единственность представления элемента $g \in G$ в виде $g = g_1g_2$, где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. Пусть

$$g_1g_2 = g'_1g'_2 \qquad (g_1, g'_1 \in G_1,\ g_2, g'_2 \in G_2).$$

Тогда

$$g_1^{-1}g'_1 = g_2{g'_2}^{-1} \in G_1 \cap G_2 = \{1\},$$

откуда

$$g_1 = g'_1, \quad g_2 = g'_2,$$

что и требуется доказать. $\square$

Пример 1. Пусть $G = \{1, a, b, c\}$ — нециклическая группа порядка 4. Легко видеть, что квадрат любого из элементов a, b, c равен единице, а произведение любых двух из них (в любом порядке) равно третьему. Отсюда следует, что G есть прямое произведение любых двух различных циклических подгрупп второго порядка, например,

$$G = \{1, a\} \times \{1, b\}.$$

П р и м е р 2. Возможность и единственность представления комплексного числа, отличного от нуля, в тригонометрической форме означает, что

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^* \times T,$$

где $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

П р и м е р 3. Пусть $G = GL_n^+(\mathbb{R})$ — группа матриц с положительным определителем, G_1 — подгруппа скалярных матриц λE с $\lambda > 0$ и $G_2 = SL_n(\mathbb{R})$. Тогда $G = G_1 \times G_2$. В самом деле, G_1 и G_2 — нормальные подгруппы, $G_1 \cap G_2 = \{E\}$ и $G = G_1 G_2$, так как каждая матрица $A \in G$ может быть представлена в виде

$$A = \lambda A_1 = (\lambda E) A_1,$$

где $\lambda = \sqrt[n]{\det A}$, $A_1 = \dfrac{1}{\lambda} A \in G_2 = SL_n(\mathbb{R})$.

В следующей теореме описывается строение факторгрупп прямых произведений по нормальным подгруппам специального вида. Эта теорема используется в следующем параграфе при доказательстве теоремы о строении конечно порожденных абелевых групп.

Теорема 9.4. *Пусть $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ и $H_i \leq G_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

1. Прямое произведение $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ — подгруппа в G.

2. Если $H_i \lhd G_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $H \lhd G$ и

$$G/H \simeq G_1/H_1 \times \cdots \times G_n/H_n.$$

Доказательство. 1. Непосредственная проверка показывает, что $H \leq G$.

2. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in G$. Тогда

$$yxy^{-1} = (y_1 x_1 y_1^{-1}, \ldots, y_n x_n y_n^{-1}) \in H$$

в силу того, что $H_i \lhd G_i$, откуда $H \lhd G$.

Рассмотрим отображение

$$f : G \to G_1/H_1 \times \cdots \times G_n/H_n,$$

$$f((g_1, \ldots, g_n)) = (g_1 H_1, \ldots, g_n H_n).$$

Несложное вычисление показывает, что f — гомоморфизм. Очевидно, f сюръективно. Найдем ядро f. Имеем следующие эквивалентные утверждения:

$$g = (g_1, \dots, g_n) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(g) = (g_1H_1, \dots, g_nH_n) =$$
$$= (H_1, \dots, H_n) \Leftrightarrow g_i \in H_i,\ i = 1, \dots, n \Leftrightarrow g \in H.$$

Значит, $\operatorname{Ker} f = H$ и по основной теореме о гомоморфизмах $G/H \simeq \simeq G_1/H_1 \times \dots \times G_n/H_n$. $\square$

Замечание 1. Отметим, что если H — произвольная подгруппа в $G = G_1 \times \dots \times G_n$, то не обязательно $H = H_1 \times \dots \times H_n$ для некоторых подгрупп $H_i \le G_i$. Например, если $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка 2 и $K = G \times G$, то циклическая подгруппа $H = \langle (a, a) \rangle < K$ имеет порядок 2 и, очевидно, не может быть прямым произведением двух групп, порядок каждой из которых больше единицы.

В заключение исследуем вопрос, какие циклические группы раскладываются в прямое произведение своих подгрупп.

Определение 9.2. *Конечная группа G называется p-группой, если $|G| = p^k$, где p — простое число.*

Теорема 9.5. *Пусть n — натуральное число и $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ — его разложение на простые множители.*

1. Если G — циклическая группа порядка n, то

$$G \simeq H = C_1 \times \dots \times C_s,$$

где C_i — циклическая p_i-группа порядка $p_i^{k_i}$, $i = 1, \dots, s$.

2. Циклическая группа $G = \langle a \rangle$ порядка p^k, где p — простое число, неразложима в прямое произведение нетривиальных подгрупп.

3. Бесконечная циклическая группа неразложима в прямое произведение нетривиальных подгрупп.

Доказательство. 1. Пусть a_i — образующая циклической группы C_i, $i = 1, \dots, s$. Тогда $\operatorname{ord} a_i = p_i^{k_i}$. В группе H рассмотрим элемент $h = (a_1, \dots, a_n)$ и найдем его порядок. Если

$$h^k = (a_1^k, \dots, a_n^k) = (1, \dots, 1),$$

то это эквивалентно тому, что $a_i^k = 1$ для $i = 1, \dots, s$. Значит, k делится на каждое из чисел $\operatorname{ord} a_i = p_i^{k_i}$ и поэтому является их общим кратным. Наименьшее такое k является наименьшим общим кратным чисел $p_1^{k_1}, \ldots, p_s^{k_s}$ и равно их произведению в силу того, что $p_1, \ldots, p_s$ — попарно различные простые числа. Значит, $k = n = \operatorname{ord} h$. Поскольку n — это порядок группы H, то $H = \langle h \rangle$ — циклическая группа порядка n. Так как все циклические группы одного и того же порядка изоморфны, то $G \simeq H$.

2. Пусть H и K — нетривиальные подгруппы в $G = \langle a \rangle$. По теореме 3.2 H и K — циклические подгруппы в G и, согласно теореме Лагранжа, их порядки делят p^k. Значит, $|H| = p^l$, $|K| = p^m$, где $0 < l, m < k$. Снова в силу теоремы 3.2 группа H порождается элементом $h = a^t$, где $t = p^k/p^l = p^{k-l}$, а группа K — элементом $k = a^r$, где $r = p^k/p^m = p^{k-m}$. Пусть для определенности $t \leq r$. Тогда $l \geq m$ и

$$k = a^r = a^{p^{k-m}} = (a^{p^{k-l}})^{p^{l-m}} = h^{p^{l-m}} \in H.$$

Значит, любые две нетривиальные подгруппы в G имеют нетривиальное пересечение и G не может быть их прямым произведением.

3. В качестве бесконечной циклической группы возьмем $\mathbb{Z}$. Пусть H и K — ненулевые подгруппы в $\mathbb{Z}$. Тогда H и K — циклические группы с образующими n и m соответственно и $0 \neq nm \in H \cap K$. Значит, любые две ненулевые подгруппы в $\mathbb{Z}$ имеют ненулевое пересечение и $\mathbb{Z}$ не может быть их прямым произведением. □

Упражнения

1. Выяснить, при каких n

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\} \times SL_n(\mathbb{R}).$$

2. Элементы каких порядков встречаются в группе:

а) $S_3 \times \mathbb{Z}_4$; б) $S_3 \times S_3$; в) $A_4 \times \mathbb{Z}_5$.

3. Найти все подгруппы в группе $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

4. Сколько элементов порядка 2 содержится в группе $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$?

5. Найти число подгрупп в группе:

а) $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, p, q — различные простые;

б) $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, p — простое.

6. Доказать, что $[G \times H, G \times H] = [G, G] \times [H, H]$.

7. Доказать, что $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$, где $Z(G)$ — центр группы G.

8. Доказать, что если группа $A \times B$ циклическая, то A и B — конечные циклические.

§ 10. КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

В этом параграфе описывается строение конечно порожденных абелевых групп. Все абелевы группы будут предполагаться аддитивными, т. е. групповая операция — сложение, нейтральный элемент — 0.

Определение 10.1. *Множество элементов $e_1, \ldots, e_n$ является базисом абелевой группы A, если*

1) *элементы $e_1, \ldots, e_n$ целочисленно независимы, т. е. из того, что*

$$m_1 e_1 + \cdots + m_n e_n = 0, \quad \text{где } m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z},$$

следует, что $m_1 = \cdots = m_n = 0$;

2) *элементы $e_1, \ldots, e_n$ порождают группу A, т. е. каждый элемент $x \in A$ можно представить в виде $x = m_1 e_1 + \cdots + m_n e_n$.*

Группа A свободна, *если обладает базисом.* Рангом *свободной абелевой группы A называется число элементов в базисе A.*

Предложение 10.1. *Если A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \ldots, e_n$, то A — прямая сумма своих бесконечных циклических подгрупп $\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle$, т. е.*

$$A = \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_n \rangle .$$

Доказательство. Из определения свободной абелевой группы следует, что элементы e_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют бесконечный порядок, т. е. $\langle e_i \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Каждый элемент $x \in A$ можно представить единственным образом в виде

$$x = m_1 e_1 + \cdots + m_n e_n, \tag{10.1}$$

при этом $m_i e_i \in \langle e_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$. Значит, A является прямой суммой подгрупп $\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle$. □

Предложение 10.2. 1. *Группа $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$ — свободная абелева группа ранга n.*

2. *Если A — свободная абелева группа ранга n, то $A \simeq \mathbb{Z}^n$.*

Доказательство. 1. Элементарная проверка показывает, что элементы

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где 1 находится на i-м месте, образуют базис $\mathbb{Z}^n$.

2. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис A, то зададим $f : A \to \mathbb{Z}^n$ по правилу: если $x \in A$ имеет представление (10.1), то $f(x) = (m_1, \ldots, m_n)$. Очевидно, f является биекцией. Если $y = l_1e_1 + \cdots + l_ne_n$, то $x + y = (m_1 + l_1)e_1 + \cdots + (m_n + l_n)e_n$, откуда

$$f(x + y) = (m_1 + l_1, \ldots, m_n + l_n) =$$
$$= (m_1, \ldots, m_n) + (l_1, \ldots, l_n) = f(x) + f(y).$$

Значит, f — искомый изоморфизм. □

Теорема 10.1. *Пусть A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Предположим, что $c_1, \ldots, c_n$ — элементы произвольной абелевой группы C. Тогда существует, и притом единственный, гомоморфизм $f : A \to C$, такой, что $f(e_i) = c_i$, $1 \le i \le n$.*

Доказательство. Вначале докажем существование гомоморфизма f. Каждый элемент $x \in A$ представим единственным образом в виде $x = m_1e_1 + \cdots + m_ne_n$. Поэтому имеем корректно определенное отображение

$$f : A \to C, \qquad f(x) = m_1c_1 + \cdots + m_nc_n.$$

Если $y = l_1e_1 + \cdots + l_ne_n$, то $x + y = (m_1 + l_1)e_1 + \cdots + (m_n + l_n)e_n$, откуда

$$f(x + y) = (m_1 + l_1)c_1 + \cdots + (m_n + l_n)c_n =$$
$$= (m_1c_1 + \cdots + m_nc_n) + (l_1c_1 + \cdots + l_nc_n) = f(x) + f(y).$$

Значит, f — искомый гомоморфизм.

Если $g : A \to C$ — другой гомоморфизм со свойством $g(e_i) = c_i$, $1 \le i \le n$, то для любого $x = m_1e_1 + \cdots + m_ne_n \in A$ имеем

$$g(x) = m_1g(e_1) + \cdots + m_ng(e_n) = m_1c_1 + \cdots + m_nc_n = f(x).$$

Значит, $f = g$. □

Следствие 10.1. *Пусть A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Тогда число различных гомоморфизмов из A в циклическую* *группу порядка* 2 *равно* 2^n. *В частности, ранг* A *определен однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ — циклическая группа порядка 2. В силу теоремы 10.1 имеется взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами $f : A \to \mathbb{Z}_2$ и наборами $x_1, \ldots, x_n$, состоящими из нулей и единиц. Количество таких наборов равно 2^n, что и доказывает следствие. □

Теорема 10.2 (О согласованных базисах). *Пусть* B — *ненулевая подгруппа в свободной абелевой группе* A *ранга* n. *Тогда в* A *существует такой базис* $e_1, \ldots, e_n$ *и такие ненулевые целые числа* $d_1, \ldots, d_k$, $k \leq n$, *что множество элементов* $d_1e_1, \ldots, d_ke_k$ *образует базис* B. *В частности,* B *свободна и ранг* B *не больше, чем ранг* A.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по рангу A. Если $\operatorname{rank} A = 1$, то $A = \mathbb{Z}$ — бесконечная циклическая группа с базисом 1, а подгруппа B является циклической и порождается некоторым элементом $n = n \cdot 1 \in \mathbb{Z}$, что и утверждается в теореме.

Предположим, что теорема справедлива для всех свободных абелевых групп ранга $< n$. Выберем в A базис

$$v = \{v_1, \ldots, v_n\}\,. \tag{10.2}$$

Любой элемент $b \in B$ можно единственным образом записать в виде $b = m_1(b)v_1 + \cdots + m_n(b)v_n$, где $m_i(b) \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $S(v)$ следующее множество натуральных чисел:

$$S(v) = \{|m_i(b)| \mid 1 \leq i \leq n,\ b \in B,\ m_i(b) \neq 0\}\,.$$

Пусть $d(v) = \min\limits_{a \in S(v)} a$ и пусть $d_1 = \min\limits_{v} d(v)$, где минимум ищется по всем базисам v. Поскольку любое подмножество во множестве натуральных чисел имеет наименьший элемент, то этот минимум достигается для некоторого базиса v группы A и некоторого элемента $b_1 \in B$, т. е. $b_1 = d_1v_1 + m_2v_2 + \cdots + m_nv_n$.

Лемма 10.1. $d_1|m_i$, $i = 2, \ldots, n$.

Доказательство. Разделим m_i на d_1 с остатком:

$$m_i = d_1q_i + r_i, \qquad 0 \leq r_i < d_1.$$

Положим $e_1 = v_1 + q_2v_2 + \cdots + q_nv_n$. Ясно, что множество элементов

$$e_1, v_2, \ldots, v_n \tag{10.3}$$

образует базис A (проверьте!) и в этом базисе $b_1 = d_1e_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n$. Если хотя бы один из остатков r_i, $i = 2, \dots, n$, больше нуля, то мы получим противоречие с минимальностью d_1. Значит, $r_i = 0$, $i = 2, \dots, n$, и в базисе (10.3) $b_1 = d_1e_1$. □

Пусть $A_1 = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ — свободная абелева группа ранга $n-1$, $B_1 = A_1 \cap B$, $B_2 = \langle b_1 \rangle < B$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 10.2. *Группа B — прямая сумма подгрупп B_1 и B_2.*

Доказательство. Докажем вначале, что $B = B_1 + B_2$. Пусть $b = l_1e_1 + l_2v_2 + \dots + l_nv_n$ — произвольный элемент из B. Разделим l_1 на d_1 с остатком: $l_1 = m_1q + r$, $0 \le r < d_1$. Тогда

$$b' = b - qb_1 = re_1 + l_2v_2 + \dots + l_nv_n \in B.$$

Если $r \neq 0$, то мы снова имеем противоречие с минимальностью d_1. Значит, $r = 0$ и $b' = l_2v_2 + \dots + l_nv_n \in B_1$. Тогда $b = b' + qb_1 \in B_1 + B_2$.

Покажем теперь, что $B_1 \cap B_2 = \{0\}$. Пусть $0 \neq x \in B_1 \cap B_2$. Так как $x \in B_1 \le A_1$, то $x = m_2v_2 + \dots + m_nv_n$. С другой стороны, $x \in B_2$, поэтому $x = m_1b_1 = m_1d_1e_1$, где $m_1d_1 \neq 0$. Отсюда получаем, что $m_2v_2 + \dots + m_nv_n = m_1d_1e_1$ — нетривиальная целочисленная линейная зависимость между элементами базиса 10.3. Полученное противоречие и доказывает лемму. □

Теперь завершим доказательство теоремы. По предположению индукции в A_1 и B_1 существуют согласованные базисы, т. е. найдется базис $e_2, \dots, e_n$ группы A_1 и отличные от нуля целые числа $d_2, \dots, d_k$, такие, что множество элементов $b_2 = d_2e_2, \dots, b_k = d_ke_k$ образует базис B_1. Тогда множество $b_1, b_2, \dots, b_k$ — базис B. □

Теорема 10.3 **(О строении конечно порожденных абелевых групп).** *Пусть A — конечно порожденная абелева группа. Тогда A изоморфна прямому произведению свободной абелевой группы и конечного числа циклических p-групп, где p пробегает некоторое множество простых чисел.*

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — образующие группы A. По теореме 10.1 существует эпиморфизм $f : \mathbb{Z}^n \to A$. Пусть $B = \mathrm{Ker}(f)$. По основной теореме о гомоморфизмах $A \simeq \mathbb{Z}^n/B$. По теореме 10.2 о согласованных базисах в $\mathbb{Z}_n$ существует базис $e_1, \dots, e_n$, такой, что множество элементов $d_1e_1, \dots, d_ke_k$ образует базис B, где $d_1, \dots, d_k$ — натуральные числа, $1 \le k \le n$. Положим

$$N_i = \begin{cases} \langle d_ie_i \rangle\,, & \text{если } 1 \le i \le k, \\ \{0\}\,, & \text{если } k < i \le n. \end{cases}$$

Тогда по предложению 10.1

$$\mathbb{Z}^n = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle\,, \quad B = N_1 \oplus \dots \oplus N_n, \quad N_i \le \langle e_i \rangle\,.$$

По теореме 9.4 получаем

$$A \simeq \mathbb{Z}^n/B \simeq \langle e_1 \rangle / N_1 \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle / N_n.$$

Если $1 \le i \le k$, то

$$\langle e_i \rangle / N_i \simeq \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$$

(если $d_i = 1$, то $\langle e_i \rangle / N_i \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0\}$ и это прямое слагаемое можно отбросить). По теореме 9.5 циклическая группа $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ разлагается в прямую сумму циклических p-групп, где p пробегает множество простых делителей числа d_i. Если $k < i \le n$, то $N_i = \{0\}$, поэтому $\langle e_i \rangle / N_i = \langle e_i \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Таким образом получаем

$$A \simeq (C_1 \oplus \dots \oplus C_s) \oplus \mathbb{Z}^{n-k}, \tag{10.4}$$

где $C_1, \dots, C_s$ — циклические p-группы и p пробегает некоторое множество простых чисел. □

Определение 10.2. *Группа G не имеет кручения, если в ней нет отличных от нейтрального элементов конечного порядка.*

Следствие 10.2. *Конечно порожденная абелева группа A без кручения свободна.*

Доказательство. Поскольку A без кручения, то в разложении 10.4 нет слагаемых $C_1, \dots, C_s$. Значит, $A \simeq \mathbb{Z}^r$ и по предложению 10.2 A свободна. □

Следствие 10.3. *Если абелева группа конечна, то она разлагается в прямую сумму циклических p-подгрупп, где p пробегает некоторое множество простых чисел.*

Доказательство. Поскольку A конечна, то в разложении 10.4 нет слагаемого $\mathbb{Z}^{n-k}$, значит, $A \simeq C_1 \oplus \dots \oplus C_s$, где $C_1, \dots, C_s$ — циклические p-группы. □

Замечание 1. При разложении конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических p-групп и бесконечных циклических групп набор порядков этих подгрупп определен однозначно.

Упражнения

1. Какие из групп $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$, $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$ и $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24}$ изоморфны?

2. Каков максимальный порядок элемента в группе $\mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{78} \oplus \mathbb{Z}_{36}$?

3. Сколько подгрупп шестого порядка у нециклической абелевой группы порядка 18?

4. Пусть $G = \langle a, b, c\rangle$ — свободная абелева группа ранга 3, H — подгруппа, порожденная элементами $5a + 11b + 7c$ и $2a + 5b + 4c$. Найти в G и H согласованные базисы. Найти разложение в прямую сумму циклических слагаемых (бесконечных и примарных) факторгруппы G/H.

5. Среди всех абелевых групп порядка 72 найти группу с максимальным числом элементов порядка 18.

6. Найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 300, которые не изоморфны прямому произведению группы порядка 6 и группы порядка 50.

7. Указать все абелевы группы порядка 32, в которых есть единственная подгруппа порядка 8.

8. Найти все абелевы группы порядка 64, в которых все подгруппы индекса 2 изоморфны.

9. Разложить в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп абелеву группу $G = \langle a, b, c \mid A(a, b, c)^\top = 0\rangle$, где A — матрица:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & -6 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{в) } \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Пусть $G = \langle a \mid 9a = 0\rangle \oplus \langle b \mid 27b = 0\rangle$. Найти разложение факторгруппы $G/(3a + 9b)$ в прямую сумму примарных циклических слагаемых.

11. Изоморфны ли факторгруппы $G/(2b)$ и $G/(a+2b)$ группы $G = \langle a \mid 2a = 0\rangle \oplus \langle b \mid 4b = 0\rangle$?

12. Пусть $m = \exp(G)$ — экспонента группы G (т. е. наименьшее число k такое, что $x^k = 1$ для всех элементов $x \in G$). Доказать, что если G — конечная абелева, то:

а) для любого $g \in G$ $\mathrm{ord}(g) | m$;

б) m — наибольший из порядков элементов G;

в) m равно наименьшему общему кратному порядков элементов группы G.

13. Пусть G — конечная абелева группа. Доказать, что равносильны два утверждения:

а) G — циклическая;

б) $\exp(G) = |G|$.

14. Доказать, что конечно порожденная абелева группа конечной экспоненты конечна.

Глава 2
ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕЦ И ПОЛЕЙ

§ 11. ПОНЯТИЯ КОЛЬЦА, ПОЛЯ, ПОДКОЛЬЦА, ПОДПОЛЯ, ПРИМЕРЫ

В отличие от групп кольца и поля — это алгебраические структуры с двумя операциями, называемыми обычно сложением и умножением. Их аксиомы подсказаны свойствами операций над вещественными числами.

Определение 11.1. Кольцом *называется непустое множество K с операциями сложения и умножения, обладающими следующими свойствами:*

1) *относительно сложения K есть абелева группа (называемая аддитивной группой кольца K);*

2) *$a(b+c) = ab + ac$ и $(a+b)c = ac + bc$ для любых $a, b, c \in K$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).*

Выведем некоторые следствия аксиом кольца, не входящие в число следствий аксиом аддитивной абелевой группы.

1) $a0 = 0a = 0$ для любого $a \in K$.

В самом деле, пусть $a0 = b$. Тогда

$$b + b = a0 + b0 = a(0+0) = a0 = b,$$

откуда $b = b - b = 0$. Аналогично доказывается, что $0a = 0$.

2) $a(-b) = (-a)b = -ab$ для любых $a, b \in K$.

В самом деле, $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$ и аналогично $ab + (-a)b = 0$.

3) $a(b-c) = ab - ac$ и $(a-b)c = ac - bc$ для любых $a, b, c \in K$.

В самом деле, $a(b-c) + ac = a(b - c + c) = ab$ и аналогично $(a-b)c = ac - bc$.

Определение 11.2. *Кольцо K называется* ***коммутативным****, если умножение в нем коммутативно, т. е. $ab = ba$ для любых $a, b \in K$. Кольцо K называется* ***ассоциативным****, если умножение в нем ассоциативно, т. е. $(ab)c = a(bc)$ для любых $a, b, c \in K$. Кольцо K называется* ***кольцом с единицей****, если в K существует нейтральный элемент относительно умножения, обозначаемый обычно через 1, т. е. $1a = a1 = a$ для любого $a \in K$.*

Так же, как в случае мультипликативной группы, доказывается, что в кольце не может быть двух различных единиц (но может не быть ни одной).

Замечание 1. Если $1 = 0$, то для любого $a \in K$ имеем $a = a1 = a0 = 0$, т. е. кольцо состоит из одного нуля. Таким образом, если кольцо содержит более одного элемента, то $1 \neq 0$.

Пример 1. Числовые множества $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ являются коммутативными ассоциативными кольцами с единицей относительно обычных операций сложения и умножения.

Пример 2. Множество $2\mathbb{Z}$ четных чисел является коммутативным ассоциативным кольцом без единицы.

Пример 3. Множество всех функций, определенных на заданном подмножестве числовой прямой, — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей относительно обычных операций сложения и умножения функций.

Пример 4. Множество векторов пространства $\mathbb{R}^3$ с операциями сложения и векторного умножения образует некоммутативное и неассоциативное кольцо. Однако в нем выполняются следующие тождества, которые в некотором смысле заменяют коммутативность и ассоциативность:

$$a \times b = -b \times a \qquad \text{(антикоммутативность)},$$

$$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0 \qquad \text{(тождество Якоби)}.$$

Пример 5. Множество квадратных матриц $M_n(K)$ над полем K является некоммутативным ассоциативным кольцом с единицей.

Пример 6. Множество классов вычетов $\mathbb{Z}_n$ по модулю n — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

П р и м е р 7. Множество многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$, где K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, — также коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 11.3. *Элемент a^{-1} кольца с единицей называется* ***обратным*** *к элементу a, если $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (в коммутативном кольце достаточно требовать, чтобы $aa^{-1} = 1$).*

Так же, как в случае группы, доказывается, что элемент ассоциативного кольца с единицей не может иметь двух различных обратных элементов (но может не иметь ни одного). Элемент, имеющий обратный, называется обратимым.

Определение 11.4. Полем *называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, содержащее не менее двух элементов, в котором всякий ненулевой элемент обратим.*

Примерами полей служат поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Мы знаем, что если p — простое число, то кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_p$ есть поле. Кольцо $\mathbb{Z}$ не является полем: в нем обратимы только ± 1.

Если a, b — произвольные элементы поля K и $b \neq 0$, то в K определен элемент ab^{-1}. Для этого элемента часто используют запись

$$ab^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{b}.$$

Любое поле обладает следующим важным свойством:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0.$$

В самом деле, если $a \neq 0$, то, умножая обе части равенства $ab = 0$ на a^{-1}, получаем $b = 0$. Существуют и другие кольца, обладающие этим свойством, например, кольцо $\mathbb{Z}$. Они называются кольцами без делителей нуля. В кольце без делителей нуля возможно сокращение:

$$ac = bc \text{ (или } ca = cb) \text{ и } c \neq 0 \;\Rightarrow a = b.$$

В самом деле, равенство $ac = bc$ может быть переписано в виде $(a - b)c = 0$, откуда при $c \neq 0$ получаем $a - b = 0$, т. е. $a = b$.

Определение 11.5. *Ненулевые элементы a, b кольца K называются* ***делителями нуля****, если $ab = 0$.*

Приведем пример коммутативного ассоциативного кольца с делителями нуля.

Пример 8. В кольце функций на подмножестве X числовой прямой (см. пример 3) есть делители нуля, если только X содержит более одной точки. В самом деле, разобьем X на два непустых непересекающихся подмножества X_1, X_2 и положим при $i = 1, 2$

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X_i, \\ 0, & \text{если } x \notin X_i. \end{cases}$$

Тогда $f_1 f_2 = 0$, но $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$.

Кольца $\mathbb{Z}_n$, где n не простое, и $M_n(K)$ также имеют делители нуля.

Отсутствие делителей нуля в поле означает, что произведение любых двух ненулевых элементов также является ненулевым элементом.

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим через K^* множество обратимых элементов кольца K.

Предложение 11.1. *Множество K^* является группой. Она называется* ***мультипликативной группой кольца*** *K.*

Доказательство. Достаточно проверить, что операция умножения определена на K^*. Пусть $a, b \in K^*$. Тогда $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, откуда $ab \in K^*$. □

В поле K все ненулевые элементы обратимы. Они образуют абелеву группу относительно умножения, которая называется **мультипликативной группой поля** K и обозначается через K^*.

Пример 9. $M_n(K)^* = GL_n(K)$, $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.

Пример 10. Если P — поле и $P[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной, то $P[x]^* = P^*$.

Определение 11.6. *Подмножество L кольца K называется* ***подкольцом****, если*

1) L — подгруппа аддитивной группы кольца K;

2) L замкнуто относительно умножения, т. е. для любых $a, b \in L$ элемент $ab \in L$.

Очевидно, что всякое подкольцо L кольца K само является кольцом относительно операций кольца K. При этом оно наследует такие свойства, как коммутативность и ассоциативность.

П р и м е р 11. При любом $n \in \mathbb{Z}$ множество $n\mathbb{Z}$ является подкольцом кольца $\mathbb{Z}$.

П р и м е р 12. Множество $\left\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, где d — фиксированное целое число, является подкольцом в $\mathbb{C}$.

Определение 11.7. *Подмножество $L \neq \{0\}$ поля K называется* ***подполем****, если*

1) *L является подкольцом кольца K;*

2) *$a \in L$, $a \neq 0 \;\Rightarrow\; a^{-1} \in L$;*

Говорят также, что K — ***расширение*** *поля L.*

Очевидно, что всякое подполе L поля K является полем относительно операций поля K.

П р и м е р 13. Поле $\mathbb{Q}$ — подполе поля $\mathbb{R}$, поле $\mathbb{R}$ — подполе поля $\mathbb{C}$.

П р и м е р 14. Множество $\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, где d — фиксированное целое число, является подполем в $\mathbb{C}$.

Упражнения

1. Пусть X — какое-либо множество и 2^X — множество всех его подмножеств. Доказать, что 2^X — кольцо относительно операций симметрической разности $M \triangle N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ и пересечения, взятых в качестве сложения и умножения соответственно. Доказать, что это кольцо коммутативно и ассоциативно.

2. Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо, а какие — поле относительно обычных операций сложения и умножения:

а) множество $n\mathbb{Z}$, $n > 1$;

б) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели делят фиксированное число $n \in \mathbb{N}$;

в) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на фиксированное простое число p;

г) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного простого числа p;

д) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;

е) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;

ж) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;

з) множество комплексных чисел вида $x + yi$, где а) $x, y \in \mathbb{Z}$; б) $x, y \in \mathbb{Q}$;

и) множество всевозможных сумм вида $a_1 z_1 + \cdots a_n z_n$, где $a_i \in \mathbb{Q}$, z_i — комплексный корень степени n из 1, $1 \leq i \leq n$.

3. Какие из указанных множеств матриц образуют кольцо относительно матричного сложения и умножения:

а) множество вещественных симметрических (кососимметрических) матриц порядка n;

б) множество вещественных ортогональных матриц порядка n;

в) множество верхних (нижних) треугольных матриц порядка $n \geq 2$;

г) множество матриц порядка $n \geq 2$, у которых последние две строки нулевые;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ Dy & x \end{pmatrix}$, где D — фиксированное целое число, $x, y \in \mathbb{Z}$;

е) множество комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$.

4. Какие из множеств функций образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения функций:

1) $C[a, b]$;

2) множество функций, имеющих вторую производную на интервале (a, b);

3) множество функций вещественного переменного, обращающихся в 0 на некотором подмножестве $D \subset \mathbb{R}$;

4) множество тригонометрических многочленов

$$a_0 + \sum_{k=1} n(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

с вещественными коэффициентами, где n — произвольное натуральное число.

5. Во множестве многочленов от переменной t с обычным сложением рассматривается операция умножения, заданная правилом

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)).$$

Является ли это множество кольцом?

6. Найти все обратимые элементы и все делители нуля в кольцах: 1) верхних треугольных матриц над полем; 2) $M_2(\mathbb{R})$; 3) $\mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{Z}[i]$.

7. Пусть $K = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Доказать, что группа обратимых элементов K^* бесконечна.

8. Докажите, что матрицы

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с элементами из $\mathbb{Z}_2$ образуют поле относительно обычных операций сложения и умножения матриц.

9. Доказать, что все конечные подмножества множества X образуют подкольцо кольца 2^X из упражнения 1 к § 11.

10. Найдите все подкольца колец $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{20}$ и $\mathbb{Z}_7$.

11. Докажите, что пересечение подколец кольца K является подкольцом кольца K.

12. Докажите, что пересечение подполей поля P — подполе поля P.

13. Может ли в кольце, не являющемся полем, содержаться некоторое подполе?

14. Найдите в $\mathbb{R}$ наименьшее подкольцо с единицей и наименьшее подполе, содержащие число: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{2}$.

§ 12. ГОМОМОРФИЗМ, ИЗОМОРФИЗМ, ЯДРО ГОМОМОРФИЗМА

Определение 12.1. *Отображение f кольца A в кольцо B называется **гомоморфизмом**, если оно сохраняет операции, т. е. если*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

*для любых $x, y \in A$. Если гомоморфизм f является биекцией, то он называется **изоморфизмом**.*

Изоморфизм кольца на себя называется *автоморфизмом*.

Отметим следующие свойства гомоморфизмов и изоморфизмов:

1. Тождественное отображение $\mathrm{id} : A \to A$ является изоморфизмом.

2. Если $f : A \to B$ — изоморфизм, то $f^{-1} : B \to A$ — также изоморфизм.

3. Если $f : A \to B$, $g : B \to C$ — гомоморфизмы, то $g \circ f : A \to C$ — также гомоморфизм. Если f и g — изоморфизмы, то $g \circ f$ — также изоморфизм.

4. Если $f : A \to B$ — гомоморфизм, то f — гомоморфизм аддитивных групп A и B, а значит, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$ для любого $a \in A$.

Предложение 12.1. *Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм колец и $K \subset A$, $K_1 \subset B$ — подкольца. Тогда $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$ — подкольцо в B, а $f^{-1}(K_1) = \{x \in A \mid f(x) \in K_1\}$ — подкольцо в A.*

Доказательство. В самом деле, K — подгруппа аддитивной группы кольца A, значит, $f(K)$ — подгруппа аддитивной группы кольца B. Если $y_1, y_2 \in f(K)$, то существуют $x_1, x_2 \in K$, такие, что $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Тогда

$$y_1 y_2 = f(x_1)f(x_2) = f(x_1 x_2) \Rightarrow y_1 y_2 \in f(K).$$

Значит, $f(K)$ — подкольцо в B.

Во втором случае K_1 — подгруппа аддитивной группы кольца B, значит, по предложению 5.3 $f^{-1}(K_1)$ — подгруппа аддитивной группы кольца A. Если $x_1, x_2 \in f^{-1}(K_1)$, то $f(x_1), f(x_2) \in K_1$ и

$$f(x_1 x_2) = f(x_1)f(x_2) \in K_1 \Rightarrow x_1 x_2 \in f^{-1}(K_1).$$

Значит, $f^{-1}(K_1)$ — подкольцо в A. $\square$

7. Если $f : A \to B$ — гомоморфизм и A — кольцо с единицей 1_A, то $f(1_A)$ — единица кольца $f(A)$.

Действительно,

$$f(1_A)f(a) = f(1_A a) = f(a) = f(a 1_A) = f(a)f(1_A).$$

Отметим, что не всегда $f(1_A)$ будет являться единицей кольца B. Пусть, например, A — множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{R}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц, $B = M_2(\mathbb{R})$ — кольцо матриц второго порядка над $\mathbb{R}$. Тогда $1_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $1_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ясно, что отображение $f : A \to B$, $f(x) = x$, является гомоморфизмом, но $f(1_A) = 1_A \neq 1_B$.

Приведем два примера изоморфизмов колец.

Пример 1. Отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, является изоморфизмом.

Пример 2. Пусть $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Нетрудно проверить, что K — кольцо относительно обычных операций сложения и умножения матриц. Рассмотрим отображение

$$f : \mathbb{C} \to K, \qquad f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Тогда f — изоморфизм.

Определение 12.2. *Если $f : A \to B$ — гомоморфизм, то множество*

$$\operatorname{Ker} f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$$

называется ***ядром*** *гомоморфизма f.*

Предложение 12.2. $\operatorname{Ker} f$ *является подкольцом в A.*

Доказательство. Так как $f : A \to B$ — гомоморфизм аддитивных групп колец A и B, то $\operatorname{Ker} f$ — подгруппа аддитивной группы кольца A. Если $a, b \in \operatorname{Ker} f$, то

$$f(ab) = f(a)f(b) = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow ab \in \operatorname{Ker} f.$$

Значит, $\operatorname{Ker} f$ — подкольцо в A. □

Упражнения

1. Доказать, что образ коммутативного кольца при гомоморфизме является коммутативным кольцом.

2. Пусть K — поле, $c \in K$. Доказать, что отображение $\varphi : K[x] \to K$, $f(x) \mapsto f(c)$, — гомоморфизм. Найти ядро φ.

3. Пусть K — поле, $f \in K[x]$ — фиксированный многочлен. Доказать, что отображение $\varphi : K[x] \to K[x]$, $g(x) \mapsto g(f(x))$, является гомоморфизмом.

4. Найти все гомоморфизмы колец:

1) $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$;	4) кольца $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{Q}$;
2) $2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$;	5) $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6$;
3) $2\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$;	6) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_4$.

§ 13. ИДЕАЛЫ И ФАКТОРКОЛЬЦА

Определение 13.1. *Подкольцо I кольца K называется* ***левым идеалом****, если для любого $a \in K$ множество $aI = \{ax \mid x \in I\}$ содержится в I.*

Подкольцо I кольца K называется ***правым идеалом****, если для любого $a \in K$ множество $Ia = \{xa \mid x \in I\}$ содержится в I.*

Подкольцо I кольца K называется ***двусторонним идеалом*** *(или просто идеалом), если I одновременно является левым и правым идеалом.*

Если K — коммутативное кольцо, то понятия левого, правого и двустороннего идеалов совпадают.

Предложение 13.1. *Если $f : A \to B$ — гомоморфизм колец, то* $\operatorname{Ker} f$ *— идеал в A.*

Доказательство. Для любых элементов $a \in A$, $x \in I = \operatorname{Ker} f$ имеем

$$f(ax) = f(a)f(x) = f(a)0 = 0, \qquad f(xa) = f(x)f(a) = 0f(a) = 0,$$

откуда $ax, xa \in I$. Значит, I — двусторонний идеал. $\square$

Пример 1. $\{0\}$ и K — идеалы в любом кольце K. Их называют *тривиальными идеалами.*

Пример 2. $n\mathbb{Z} = \{nt \mid t \in \mathbb{Z}\}$ является идеалом в $\mathbb{Z}$.

Предложение 13.2. *Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с 1. Для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in K$ множество*

$$I = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$

является идеалом в K. Его называют ***идеалом, порожденным элементами*** *$a_1, \dots, a_n$ и обозначают $(a_1, \dots, a_n)$.*

Доказательство. Если $a = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ и $b = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n$ — произвольные элементы из I, $z \in K$, то

$$a + b = a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) \in I,$$
$$-(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = a_1(-x_1) + \cdots + a_n(-x_n) \in I,$$
$$(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)z = a_1x_1z + \cdots + a_nx_nz \in I,$$

откуда получаем, что I — идеал. □

Определение 13.2. *Идеал, порожденный одним элементом $a \in K$, называют **главным идеалом**, порожденным элементом a, и обозначают (a) (либо aK).*

***Теорема 13.1* (Критерий поля).** *Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с 1 и $1 \neq 0$. Если K не содержит нетривиальных идеалов, то K является полем.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любой ненулевой элемент $a \in K$ имеет обратный a^{-1}. Рассмотрим главный идеал (a). Так как $(a) \neq \{0\}$, то по условию теоремы $(a) = K$. Значит, $1 \in (a)$, т. е. существует элемент $b \in K$, такой, что $1 = ab$. Следовательно, a — обратим. □

Предложение 13.3. *Пусть I — идеал в K, где K — ассоциативное кольцо с 1. Если I содержит обратимый элемент a, то $I = K$.*

Доказательство. Из условия следует, что $1 = aa^{-1} \in I$. Тогда для любого $z \in K$ имеем $1z = z \in I$, откуда $I = K$. □

Следствие 13.1. *Поле K содержит только тривиальные - идеалы.*

Доказательство. Если I — ненулевой идеал в K, то I содержит ненулевой элемент, который обратим по определению поля. По предложению 13.3 $I = K$. □

Пусть K — кольцо, I — идеал в K. Так как I — подгруппа аддитивной группы K, то определена факторгруппа K/I. Элементы этой факторгруппы имеют вид $a+I$, $a \in K$, и называются *смежными классами* K по I. Определим умножение смежных классов формулой

$$(a + I)(b + I) = ab + I. \tag{13.1}$$

Докажем, что таким образом определенное умножение не зависит от выбора представителей в смежных классах.

Предложение 13.4. *Если $a + I = a_1 + I$ и $b + I = b_1 + I$, то $ab + I = a_1b_1 + I$.*

Доказательство. Из равенства смежных классов $a + I = a_1 + I$ и $b + I = b_1 + I$ следует по предложению 4.2, что $a_1 - a, b_1 - b \in I$. Тогда

$$a_1b_1 - ab = a_1b_1 - a_1b + a_1b - ab = a_1(b_1 - b) + (a_1 - a)b \in I,$$

откуда снова по предложению 4.2 $ab + I = a_1b_1 + I$. □

Замечание 1. Когда мы рассматривали умножение смежных классов в факторгруппе G/N, то имели не только формально определенное равенство $gN \cdot hN = ghN$. Фактически множество, состоящее из попарных произведений элементов двух смежных классов gN и hN группы G, совпадало со смежным классом ghN. Иначе обстоит дело в кольцах. В общем случае множество $M = \{xy \mid x \in a + I, y \in b + I\}$ не совпадает со смежным классом $ab+I$, а лишь содержится в нем. Например, поэлементное произведение двух смежных классов $2+4\mathbb{Z}$ и $2+4\mathbb{Z}$ дает множество $M = \{4 + 8t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, и ясно, что $M \subsetneqq 4 + 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$.

Теорема 13.2. *Пусть K — кольцо, I — идеал в K. Множество K/I с операциями $(a+I)+(b+I) = a+b+I$, $(aI)(bI) = abI$ является кольцом, которое называют* ***факторкольцом*** *кольца K по идеалу I.*

Доказательство. Достаточно проверить дистрибутивность умножения относительно сложения. Для любых $a + I, b + I, c + I \in K/I$ имеем

$$(a + I)(b + I + c + I) = (a + I)(b + c + I) = a(b + c) + I = ab + ac + I =$$
$$= (ab + I) + (ac + I) = (a + I)(b + I) + (a + I)(c + I),$$
$$(b + I + c + I)(a + I) = (b + c + I)(a + I) = (b + c)a + I = ba + ca + I =$$
$$= (ba + I) + (ca + I) = (b + I)(a + I) + (c + I)(a + I).$$

Теорема доказана. □

Предложение 13.5. *Пусть K — кольцо, I — идеал в K. Отображение*

$$f : K \to K/I, \qquad f(x) = x + I,$$

является сюръективным гомоморфизмом колец, и $\operatorname{Ker} f = I$. Этот гомоморфизм называется ***каноническим****.*

Доказательство. Для любых $a, b \in K$ имеем

$$f(ab) = ab + I = (a+I)(b+I) = f(a)f(b).$$

Сюръективность f очевидна. Кроме того,

$$a \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(a) = a + I = I \Leftrightarrow a \in I,$$

откуда $\operatorname{Ker} f = I$. □

Теорема 13.3 (Основная теорема о гомоморфизмах колец). *Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм колец, $I = \operatorname{Ker} f$. Тогда*

$$f(A) \simeq A/I.$$

Доказательство. Так как f — гомоморфизм аддитивных групп A и B, то по основной теореме о гомоморфизмах групп $f(A)$ и A/I изоморфны как абелевы группы. Соответствующий изоморфизм $\psi : A/I \to f(A)$ задается формулой $\psi(a+I) = f(a)$. Остается доказать, что ψ сохраняет умножение. Для любых $a+I, b+I \in A/I$ имеем

$$\psi((a+I)(b+I)) = \psi(ab+I) = f(ab) = f(a)f(b) = \psi(a+I)\psi(b+I),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Предложение 13.6. *Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм колец, I — идеал в A, J — идеал в B. Тогда $f(I)$ — идеал в $f(A)$, $f^{-1}(J)$ — идеал в A.*

Доказательство. По предложению 12.1 $f(I)$ и $f^{-1}(J)$ — подкольца в $f(A)$ и A соответственно. Если $x \in f(A)$, $y \in f(I)$, то $x = f(a)$, $y = f(b)$ для некоторых элементов $a \in A$, $b \in I$. Тогда

$$xy = f(a)f(b) = f(ab) \in f(I),$$

поскольку $ab \in I$. Значит, $f(I)$ — идеал в $f(A)$.

Далее, если $x \in f^{-1}(J)$, $a \in A$, то $f(ax) = f(a)f(x) \in J$, поскольку $f(x) \in J$, а J — идеал. Значит, $ax \in f^{-1}(J)$ и $f^{-1}(J)$ — идеал в A. □

Упражнения

1. Доказать, что пересечение идеалов (левых, правых, двусторонних) кольца K является идеалом (соответственно левым, правым, двусторонним).

2. Будут ли следующие множества идеалами указанных ниже колец:

а) $\mathbb{Z}$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$;

б) $n\mathbb{Z}[x]$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$;

в) $\mathbb{Z}[x]$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$;

г) множество I_n многочленов, не содержащих членов вида ax^k для всех $k < n$, где $n > 1$, в кольце $\mathbb{Z}[x]$;

д) множество I многочленов с четными свободными членами в кольце $\mathbb{Z}[x]$;

е) множество I многочленов с четными старшими коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[x]$.

3. Образуют ли идеал необратимые элементы колец:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{C}[x]$; в) $\mathbb{Z}_n$.

4. Доказать, что кольцо целых чисел не содержит минимальных идеалов.

5. Пусть I и J — множества матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & l & 2m \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с целыми коэффициентами $g, h, k, \ldots$ Доказать, что I является идеалом в кольце R верхних треугольных матриц над $\mathbb{Z}$, J — идеал кольца I, но J — не идеал кольца R.

6. Доказать, что множество I_S непрерывных функций, обращающихся в 0 на фиксированном подмножестве $S \subset [a, b]$, является идеалом в кольце функций, непрерывных на $[a, b]$.

7. *Суммой идеалов* $I_1, I_2, \ldots, I_k$ коммутативного кольца R называется множество

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_k = \{x_1 + \cdots + x_k \mid x_s \in I_s,\ s = 1, \ldots, k\}.$$

Доказать, что сумма идеалов является идеалом.

8. *Произведением идеалов* I_1, I_2 коммутативного кольца R называется множество

$$I_1 I_2 = \left\{ \sum_{j=1}^{s} x_j y_j \mid x_j \in I_1, y_j \in I_2, j = 1, \ldots, s, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Доказать, что произведение идеалов является идеалом.

9. Доказать, что если I_1, I_2 — идеалы коммутативного кольца R и $I_1 \cap I_2 = \{0\}$, то $I_1 I_2 = \{0\}$.

10. Доказать, что

а) $F[x]/(x-a) \simeq F$ (F — поле);

б) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{C}$;

в) $\mathbb{R}[x]/(x^2+x+1) \simeq \mathbb{C}$.

11. Пусть $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Доказать, что отображение $f : K \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{tr} A$, — гомоморфизм. Найдите его ядро и фактор-кольцо $K/\ker f$.

§ 14. КОЛЬЦА ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Предположим, что A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 14.1. *Кольцо A без делителей нуля называется кольцом главных идеалов, если любой идеал в A является главным.*

Теорема 14.1. $\mathbb{Z}$ *— кольцо главных идеалов.*

Доказательство. Пусть $I \subset \mathbb{Z}$ — идеал, m — наименьшее натуральное число в I и $a \in I$. Разделим a на m с остатком:

$$a = mq + r, \qquad 0 \leq r < m.$$

Так как $a, m \in I$, то $a - mq = r \in I$, откуда $r = 0$ и $a = mq$. Значит, $I = \{mq \mid q \in \mathbb{Z}\} = \langle m \rangle$. □

Теорема 14.2. *Пусть K — поле. Тогда кольцо многочленов $K[x]$ — кольцо главных идеалов.*

Доказательство. Пусть $I \subset K[x]$ — идеал, $f(x) \neq 0$ — многочлен наименьшей степени в I и $g(x) \in I$. Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x), \qquad \deg r(x) < \deg f(x).$$

Так как $f(x), g(x) \in I$, то $g(x) - f(x)q(x) = r(x) \in I$, откуда $r(x) = 0$ и $g(x) = f(x)q(x)$. Значит, $I = \{f(x)q(x) \mid q(x) \in K[x]\} = \langle f(x) \rangle$. □

Замечание 1. Доказательства этих двух теорем похожи. Фактически все следует из того, что и в $\mathbb{Z}$, и в $K[x]$ существует алгоритм деления с остатком. Кольца, в которых возможно производить деление элементов с остатком, называют евклидовыми. Евклидовы кольца — кольца главных идеалов.

Не все кольца являются кольцами главных идеалов.

Пример 1. Пусть K — поле. Тогда кольцо многочленов от двух переменных $K[x, y]$ не является кольцом главных идеалов. Рассмотрим множество

$$I = \{xf(x, y) + yg(x, y) \mid f(x, y), g(x, y) \in K[x, y]\}.$$

Нетрудно проверить, что I — нетривиальный идеал в $K[x, y]$. Допустим, что I — главный идеал. Тогда $I = (h(x, y))$ для некоторого многочлена $h(x, y) \in K[x, y]$. Поскольку $x, y \in I$, мы должны иметь

$$x = h(x, y)f_1(x, y), \qquad y = h(x, y)f_2(x, y) \tag{14.1}$$

для некоторых многочленов $f_1(x, y), f_2(x, y) \in K[x, y]$. Сравнивая степени левых и правых частей в (14.1), получаем, что либо $\deg h(x, y) = 0$, либо $\deg h(x, y) = 1$.

В первом случае $h(x, y)$ — ненулевая константа, поэтому — обратимый элемент кольца $K[x, y]$. Тогда по предложению 13.3 $I = K[x, y]$ — противоречие, поскольку элементы из K^* не принадлежат I.

Во втором случае мы получаем $\deg f_1(x, y) = \deg f_2(x, y) = 0$, т. е. $f_1(x, y) = a$ и $f_2(x, y) = b$ — ненулевые константы. Тогда из (14.1) получаем

$$h(x, y) = a^{-1}x = b^{-1}y,$$

а это — противоречие.

Упражнения

1. Пусть I — множество всех многочленов с четными свободными членами в кольце $\mathbb{Z}[x]$. Доказать, что:

а) I является идеалом, но не является главным идеалом в $\mathbb{Z}[x]$;

б) $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}_2$.

2. Найти идеал, порожденный множеством M, если:

а) $M = \{4, 9\}$ в кольце $\mathbb{Z}$;

б) $M = \{6, 15\}$ в кольце $\mathbb{Z}$;

в) $M = \left\{x^6 - 1, x^4 - 1\right\}$ в кольце $\mathbb{R}[x]$;

г) $M = \{x, x + 1\}$ в кольце $\mathbb{R}[x]$.

3. В кольце $\mathbb{Z}$ найдите порождающий элемент идеалов:

а) $(4) + (7)$; в) $(6, 9) + (25, 35)$;

б) $(6) \cap (8)$; г) $(9, 15, 18) \cap (12, 21, 33)$.

4. Пусть F — поле и $f, g \in F[x]$. Доказать, что $(f) \subset (g)$ тогда и только тогда, когда g делит (f).

§ 15. МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ

Определение 15.1. *Собственный идеал I коммутативного ассоциативного кольца A с единицей называется* ***максимальным****, если I не содержится ни в одном большем собственном идеале J.*

Теорема 15.1. *Идеал I максимален тогда и только тогда, когда A/I — поле.*

Доказательство. Пусть I максимален. Докажем, что в фактор-кольце A/I нет нетривиальных идеалов. Пусть T — нетривиальный идеал в A/I. Рассмотрим канонический гомоморфизм $f : A \to A/I$. Тогда по предложению 13.6 $J = f^{-1}(T)$ — идеал в A, содержащий I. Следовательно, $J = A$ и $f(J) = T = A/I$ — противоречие. Теперь по теореме 13.1 получаем, что A/I — поле.

Предположим, что A/I — поле, а идеал I — немаксимальный. Тогда существует идеал $J \supset I$, $J \neq A$. По предложению 13.6 образ $T = f(J)$ идеала J является идеалом в A/I, при этом $T \neq \{0\}$ и $T \neq A/I$ — противоречие, поскольку A/I — поле, а поле не содержит нетривиальных идеалов. □

Теорема 15.2. 1. *Идеал $(n) \subset \mathbb{Z}$ максимален $\Leftrightarrow$ n — простое число.*

2. *Идеал $(f(x)) \subset K[x]$, где K — поле, максимален $\Leftrightarrow$ $f(x)$ — неприводимый многочлен.*

Доказательство. Докажем пункт 2 теоремы, пункт 1 доказывается аналогично.

Пусть $(f(x))$ — максимальный идеал в $K[x]$. Предположим, что $f(x) = g(x)h(x)$, где $\deg g(x) > 0$ и $\deg h(x) > 0$. Тогда $(g(x))$ — нетривиальный идеал, содержащий $(f(x))$ и не совпадающий с ним, — противоречие.

Пусть теперь $f(x)$ — неприводимый многочлен. Предположим, что идеал $(f(x))$ не максимален. Тогда найдется нетривиальный идеал $(g(x)) \subsetneqq (f(x))$. Так как $f(x) \in (g(x))$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где $h(x)$ — не константа (иначе бы идеалы $(f(x))$ и $(g(x))$ совпадали). Получили противоречие с неприводимостью $f(x)$. $\square$

Следствие 15.1. 1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *— поле* $\Leftrightarrow$ n *— простое число.*

2. $K[x]/\langle f(x)\rangle$ *— поле* $\Leftrightarrow$ $f(x)$ *— неприводимый многочлен.*

Упражнения

1. Для каких a факторкольцо $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 - a)$ является полем?

2. Является ли факторкольцо K/I полем, если:

а) $K = \mathbb{Z}_2[x]$, $I = (x^3 + x + 1)$;

б) $K = \mathbb{Z}_3[x]$, $I = (x^2 + x + 2)$;

в) $K = \mathbb{Z}_5[x]$, $I = (x^3 + x^2 + 3)$.

3. Доказать, что факторкольцо $K[x]/(x^4 + x^3 + x + 1)$ не может быть полем, каким бы ни было коммутативное кольцо K с единицей.

§ 16. ПРЯМАЯ СУММА КОЛЕЦ

Используя понятие прямой суммы абелевых групп, определим прямую сумму колец.

Определение 16.1. *Говорят, что кольцо A разлагается в прямую сумму своих подколец $A_1, \ldots, A_k$, если*

1) *аддитивная группа кольца A является прямой суммой аддитивных групп колец $A_1, \ldots, A_k$;*

2) $A_iA_j = \{0\}$.

В этом случае пишут $A = A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_k$.

Если кольцо A разлагается в прямую сумму своих подколец $A_1, \ldots, A_k$, то $A_1, \ldots, A_k$ — идеалы. Действительно, произвольный элемент $a \in A$ можно представить в виде суммы $a = a_1 + \cdots + a_k$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда для произвольного элемента $b \in A_i$ имеем

$$ab = (a_1 + \cdots a_k)b = a_1b + \cdots a_kb = a_ib \in A_i.$$

Следовательно, A_i — идеал.

Условие 2 обеспечивает следующее «покомпонентное» правило умножения:

$$(x_1 + \dots + x_k)(y_1 + \dots + y_k) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k. \qquad (16.1)$$

Пусть теперь $A_1, \dots, A_k$ — какие-то кольца.

Определение 16.2. *Прямой суммой колец $A_1, \dots, A_k$ называется их прямая сумма $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ как аддитивных групп с покомпонентной операцией умножения:*

$$(x_1, \dots, x_k)(y_1, \dots, y_k) = (x_1 y_1, \dots, x_k y_k). \qquad (16.2)$$

Очевидно, что определенная таким образом операция умножения в $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ дистрибутивна по отношению к сложению, так что $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ действительно является кольцом. Если все кольца $A_1, \dots, A_k$ коммутативны, ассоциативны или обладают единицей, то и их прямая сумма обладает соответствующим свойством.

Прямая сумма колец в смысле определения 16.1 называется внутренней, а в смысле определения 16.2 — внешней. Между этими двумя понятиями такая же связь, как и в случае групп или векторных пространств.

Для каждого кольца A_i рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi_i : A_i \to A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k, \qquad \varphi_i(x) = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$$

(x находится на i-м месте). Ясно, что φ_i инъективен и по основной теореме о гомоморфизмах колец кольцо A_i изоморфно подкольцу $A'_i = \varphi_i(A_i) \leq A$. Нетрудно проверить, что A'_i — идеал в A. Непосредственно из определения идеалов A'_i следует, что если $i \neq j$, то $A'_i A'_j = \{0\}$. Следовательно, A есть внутренняя прямая сумма своих подколец $A'_1, \dots, A'_k$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 16.1. *Если A — внутренняя прямая сумма своих подколец $A_1, \dots, A_k$, то $A \simeq A_1 \oplus \dots \oplus A_k$.*

Доказательство. Из определения внутренней прямой суммы колец следует, что аддитивная группа кольца A является внутренней прямой суммой аддитивных подгрупп $A_1, \dots, A_k$. По теореме 9.2 A и $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ изоморфны как аддитивные группы, причем изоморфизм задается формулой $f((x_1, \dots, x_k)) = x_1 + \dots + x_k$. В силу формул (16.1) и (16.2) f сохраняет умножение, следовательно, является изоморфизмом колец A и $A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$. $\square$

Теорема 16.2. *Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — ассоциативные кольца с 1. Тогда для мультипликативных групп справедливо равенство*

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k)^* = A_1^* \times \cdots \times A_k^*.$$

Доказательство. Элемент $(x_1, \ldots, x_k) \in (A_1 \oplus \cdots \oplus A_k)^*$ тогда и только тогда, когда существует $(y_1, \ldots, y_k) \in A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, такой, что

$$(x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k) = (x_1y_1, \ldots, x_ky_k) = (1, \ldots, 1).$$

Это равносильно тому, что $x_iy_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. $x_i \in A_i^*$, $i = 1, \ldots, n$. В свою очередь, это эквивалентно тому, что $(x_1, \ldots, x_k) \in$ $\in A_1^* \times \cdots \times A_k^*$. $\square$

Упражнения

1. Пусть $R = I_1 \dot{+} I_2$ — разложение коммутативного кольца R с единицей e в прямую сумму ненулевых идеалов I_1, I_2. Доказать, что если $e = e_1 + e_2$, где $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$, то e_1, e_2 — единицы колец I_1, I_2 соответственно, но не единицы кольца R.

2. Пусть K — поле. Доказать, что если многочлены $f, g \in K[x]$ взаимно просты, то $K[x]/(fg) \simeq K[x]/(f) \oplus K[x]/(g)$.

3. Доказать, что если $R = I_1 \dot{+} I_2$, то $R/I_1 \simeq I_2$, $R/I_2 \simeq I_1$.

4. Разложите кольца $\mathbb{R}[x]/(x^2 + x)$, $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ в прямую сумму собственных идеалов.

§ 17. СТРОЕНИЕ КОЛЬЦА $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Теорема 17.1. *Пусть $n = mk$, где m, k — взаимно простые натуральные числа. Тогда*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \qquad \psi(a + n\mathbb{Z}) = (a + m\mathbb{Z}, a + k\mathbb{Z}).$$

Вычисления показывают, что ψ — гомоморфизм. Проверим, что ψ инъективно. Учитывая, что m и k взаимно просты, получаем:

$$\psi(a + n\mathbb{Z}) = (0 + m\mathbb{Z}, 0 + k\mathbb{Z}) \Leftrightarrow m|a,\ k|a \Leftrightarrow n = mk|a \Leftrightarrow a + n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}.$$

Поскольку $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$ и $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}| = mk = n$, то ψ должно быть сюръективным отображением, а значит, является изоморфизмом. $\square$

Следствие 17.1. *Пусть n — натуральное число, $n = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ — его разложение на простые множители. Тогда*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p_1^{s_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k^{s_k}\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Очевидная индукция по k. $\square$

Теорема 17.2. *Элемент $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ обратим $\Leftrightarrow (a, n) = 1$.*

Доказательство. Пусть $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Тогда $\overline{ax} = \overline{1}$ для некоторого элемента $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Это означает, что $ax+n\mathbb{Z} = 1+n\mathbb{Z}$, т. е. $ax = 1+nt$. Следовательно, $ax + n(-t) = 1$, откуда $(a, n) = 1$.

Обратно, пусть $(a, n) = 1$. Тогда существуют $x, t \in \mathbb{Z}$, такие, что $ax + nt = 1$, откуда $\overline{ax} = \overline{1}$ и $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. $\square$

Напомним понятие функции Эйлера. Если n — натуральное число, то через $\varphi(n)$ обозначают количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Полученная функция φ, определенная на множестве натуральных чисел, называется *функцией Эйлера*.

Следствие 17.2. $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(n)$.

Теорема 17.3. 1) *Функция Эйлера обладает свойством* ***мультипликативности****, т. е. $\varphi(mk) = \varphi(m)\varphi(k)$ для взаимно простых натуральных чисел m и k.*

2) *если $n = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ — каноническое разложение натурального n на простые множители, то*

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k}(p_i^{s_i} - p_i^{s_i-1}) = n\prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i}).$$

Доказательство. 1) По теореме 17.1

$$\mathbb{Z}/mk\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},$$

а по теореме 16.2

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*.$$

Учитывая теорему 17.2, получаем

$$\varphi(mk) = |(\mathbb{Z}/mk\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*| =$$
$$= |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*||(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*| = \varphi(m)\varphi(k),$$

что и доказывает пункт 1) теоремы.

2) Очевидная индукция по k показывает, что если $n = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$, то справедливо равенство

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(p_i^{s_i}).$$

Поэтому достаточно уметь вычислять $\varphi(p^t)$, где p — простое число. По определению функции Эйлера $\varphi(p^t)$ — это количество целых чисел в промежутке от 1 до p^t, взаимно простых с p^t, т. е. не делящихся на p. Количество целых чисел из этого промежутка, делящихся на p, равно p^{t-1}, поскольку это числа вида pa, где $1 \leq a \leq p^{t-1}$. Следовательно,

$$\varphi(p^t) = p^t - p^{t-1},$$

откуда мы получаем

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{s_i} - p_i^{s_i-1}).$$

Вынося в разности $p_i^{s_i} - p_i^{s_i-1}$ множитель $p_i^{s_i}$ за скобки и учитывая, что $p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k} = n$, получаем второе утверждение теоремы. □

Следствие 17.3. 1) *Если a и $n > 1$ — взаимно простые натуральные числа, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, т. е. остаток от деления $a^{\varphi(n)}$ на n равен 1 (теорема Эйлера).*

2) *Для простого числа p и произвольного a число $a^p - a$ делится на p (теорема Ферма).*

Доказательство. 1) Так как $(a, n) = 1$, то $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Поскольку $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(n)$, то по следствию 4.5 из теоремы Лагранжа получаем $\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}$ в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Следовательно, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

2) Если p делит a, то, очевидно, $a^p - a$ делится на p. Если p не делит a, то a и p взаимно просты. Так как $\varphi(p) = p - 1$, то по теореме Эйлера $a^{p-1} - 1$ делится на p. Значит, $a^p - a$ также делится на p. □

Упражнения

1. Доказать, что любая подгруппа аддитивной группы кольца $\mathbb{Z}_n$ является идеалом кольца $\mathbb{Z}_n$ и что $\mathbb{Z}_n$ — кольцо главных идеалов.

2. Найти все идеалы колец $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{15}$. Какие из них максимальны?

3. Разложите в прямую сумму собственных идеалов кольца:

а) $\mathbb{Z}_{10}$; б) $\mathbb{Z}_{12}$; в) $\mathbb{Z}_{36}$.

4. Пользуясь теоремой Эйлера, найти остаток при делении:
а) 208^{208} на 23; б) 10^{2008} на 22.

§ 18. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Кольца, которые рассматриваются в этом параграфе, предполагаются коммутативными, ассоциативными и с единицей. Пусть дано кольцо R и независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$. *Одночленом* относительно этих переменных называется выражение $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, где коэффициент $a \in R$, а $k_1, \ldots, k_n$ — целые неотрицательные числа. Показатели $k_1, \ldots, k_n$ называются *степенями одночлена относительно соответствующих переменных*, а $k_1 + \cdots + k_n$ называется *полной степенью* или просто *степенью одночлена.* Если какая-то из степеней k_i равна нулю, то выражение x_i^0 в одночлене не пишут. Например, вместо $x_1^2 x_2^0 x_3^4$ пишут $x_1^2 x_3^4$.

Два одночлена $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ и $bx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ называют *подобными.* Для подобных одночленов определено сложение

$$ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} + bx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} = (a+b)x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

(«приведение подобных членов»). Для произвольных одночленов $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ и $bx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ определено умножение:

$$(ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})(bx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) = (ab)x_1^{k_1+m_1} \cdots x_n^{k_n+m_n}.$$

Многочленом (или *полиномом*) называется формальная сумма одночленов, причем порядок слагаемых безразличен. Таким образом, любой многочлен можно записать в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n},$$

причем в сумме присутствует лишь конечное число одночленов с ненулевым коэффициентом $a_{i_1, \ldots, i_n}$.

Элементы $a_{i_1, \ldots, i_n} \in R$ называют *коэффициентами многочлена* $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Многочлен, в котором все коэффициенты равны нулю, называется *нулевым.*

Максимальная из степеней одночленов, составляющих многочлен, называется его *полной степенью* или степенью и обозначается $\deg f$. Условимся считать, что нулевой многочлен имеет степень $-\infty$.

Многочлен, все одночлены которого имеют одинаковую степень s, называется *однородным многочленом* или *формой* степени s.

Максимальная из степеней одночленов относительно переменной x_i называется *степенью многочлена относительно этой переменной* и обозначается $\deg_{x_i} f$.

Два многочлена считаются равными, если их разность — нулевой многочлен, т. е. они являются суммой одинаковых одночленов.

Для многочленов естественным образом определяются действия сложения и умножения. *Сумма двух многочленов* — это сумма всех одночленов, составляющих слагаемые; *произведение* — это сумма произведений всех одночленов первого сомножителя на все одночлены второго.

Множество всех многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ над кольцом R обозначают $R[x_1, \dots, x_n]$. Непосредственным вычислением нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение 18.1. *Кольцо многочленов $R[x_1, \dots, x_n]$ является ассоциативным и коммутативным кольцом с единицей.*

Элемент a кольца R можно отождествить с многочленом $ax_1^0 \cdots x_n^0$ и при таком отождествлении R является подкольцом в $R[x_1, \dots, x_n]$.

Любой многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \in R[x_1, \dots, x_n]$ можно записать в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(x_1, \dots, x_{n-1}) + f_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + \\ + \dots + f_s(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^s,$$

где $f_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \in R[x_1, \dots, x_{n-1}]$, $i = 0, \dots, s$. Другими словами,

$$R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]. \tag{18.1}$$

Теорема 18.1. *Если R — кольцо без делителей нуля, то и кольцо многочленов $R[x_1, \dots, x_n]$ является кольцом без делителей нуля.*

Доказательство. Применяем метод математической индукции по числу переменных. База индукции имеется — для многочленов от одной переменной теорема была доказана ранее. Предположим, что кольцо многочленов от $n-1$ переменной не имеет делителей нуля. Тогда и кольцо многочленов от n переменных не имеет делителей нуля, поскольку в силу (18.1) оно является кольцом многочленов от одной переменной над кольцом многочленов от $n-1$ переменной $R[x_1, \dots, x_{n-1}]$, которое не имеет делителей нуля по индуктивному предположению. $\square$

Следствие 18.1. *Если R — кольцо без делителей нуля, то степень произведения двух многочленов из $R[x_1, \dots, x_n]$ равна сумме степеней сомножителей.*

Доказательство. Пусть $f, g \in R[x_1, \dots, x_n]$. Без ограничения общности можно считать, что f и g — ненулевые многочлены (в противном случае утверждение теоремы тривиально). Собирая в f вместе одночлены одинаковой степени, запишем f в виде

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_r,$$

где f_i — форма степени i и $f_r \neq 0$. Тогда степень f равна r. Аналогично g запишем в виде

$$g = g_0 + g_1 + \dots + g_s,$$

где $g_s \neq 0$. Тогда степень g равна s и

$$fg = \sum_{i,j} f_i g_j.$$

Все одночлены наибольшей степени, входящие в fg, содержатся в $f_r g_s$ и имеют полную степень $r+s$. По теореме 18.1 $f_r g_s \neq 0$. Значит, степень fg равна $r+s$. $\square$

Предположим, что S — кольцо, содержащее R, при этом единицы в R и S совпадают. Пусть дан многочлен

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \in R[x_1, \dots, x_n]$$

и даны элементы $b_1, \dots, b_n \in S$.

Определение 18.1. *Значением многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке $(b_1, \dots, b_n)$ (или при $x_1 = b_1, \dots, x_n = b_n$) называется*

$$f(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} b_1^{k_1} \cdots b_n^{k_n} \in S.$$

Легко видеть, что если

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + f_2(x_1, \ldots, x_n),$$
$$g(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) f_2(x_1, \ldots, x_n),$$

то

$$h(b_1, \ldots, b_n) = f_1(b_1, \ldots, b_n) + f_2(b_1, \ldots, b_n), \tag{18.2}$$
$$g(b_1, \ldots, b_n) = f_1(b_1, \ldots, b_n) f_2(b_1, \ldots, b_n). \tag{18.3}$$

Предложение 18.2. *Пусть S — кольцо, содержащее R, при этом единицы в кольцах R и S совпадают. Для любых элементов $b_1, \ldots, b_n \in S$ существует единственный гомоморфизм*

$$\psi : R[x_1, \ldots, x_n] \to S,$$

для которого

$$\psi(x_1) = b_1, \ldots, \psi(x_n) = b_n, \quad \psi(1_R) = 1_S.$$

Доказательство. Определим отображение

$$\psi : R[x_1, \ldots, x_n] \to S, \quad f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(b_1, \ldots, b_n).$$

В силу (18.2) и (18.3) ψ является гомоморфизмом. Докажем единственность ψ. Если $\psi_1 : R[x_1, \ldots, x_n] \to S$ — другой гомоморфизм, удовлетворяющий условиям теоремы, и $f = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, то

$$\psi_1(f) = \psi_1(\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} \psi_1(x_1)^{k_1} \cdots \psi_1(x_n)^{k_n} =$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} b_1^{k_1} \cdots b_n^{k_n} = f(b_1, \ldots, b_n) = \psi(f).$$

Значит, $\psi_1 = \psi$. □

Пусть R — кольцо без делителей нуля, содержащее бесконечно много элементов. Мы знаем, что в кольце многочленов $R[x]$ от одной переменной каждый многочлен $f(x)$ определяется своими значениями в $d = \deg f + 1$ различных точках $b_1, \ldots, b_d$. Другими словами, если $g(b_i) = f(b_i)$, $i = 1, \ldots, d$, для некоторого многочлена $g(x)$ и $\deg g \leq \deg f$, то $g = f$. В частности, никакие два неравных многочлена от одной переменной не могут принимать одинаковые значения в бесконечном количестве различных точек.

Ситуация меняется, когда мы рассматриваем многочлены от нескольких переменных. Например, многочлены x_1 и x_1x_2 из кольца $R[x_1, x_2]$ принимают значение 0 во всех точках $(0, b)$, где $b \in R$, однако они не равны. Тем не менее справедлива следующая теорема.

***Теорема 18.2* (*О тождестве*).** *Если многочлены $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ принимают одинаковые значения во всех точках $(b_1, \ldots, b_n)$, где $b_1, \ldots, b_n \in R$, то они равны.*

Доказательство. Для доказательства достаточно доказать следующее утверждение: если все значения многочлена $h(x_1, \ldots, x_n) \in$ $\in R[x_1, \ldots, x_n]$ во всех указанных в теореме точках равны нулю, то h — нулевой многочлен. Действительно, достаточно перейти от многочленов f_1 и f_2 к их разности $h = f_1 - f_2$.

Предположим, что h — ненулевой многочлен. Покажем, что найдутся значения $b_1, \ldots, b_n$ для переменных $x_1, \ldots, x_n$, при которых h принимает значение, отличное от нуля.

Применим метод математической индукции по числу переменных n. При $n = 1$ утверждение следует из того, что ненулевой многочлен от одной переменной имеет корней не больше, чем его степень. Действительно, по условию R — бесконечное кольцо, и если бы все элементы из R являлись корнями h, то ненулевой многочлен h имел бы бесконечно много корней — противоречие.

Пусть теперь $n > 1$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — ненулевой многочлен. Запишем $h(x_1, \ldots, x_n)$ как многочлен от x_n с коэффициентами из кольца $R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = a_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) + a_1(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n + \ldots +$$
$$+a_s(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n^s.$$

Можно считать, что $a_s(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — ненулевой многочлен. В силу индуктивного предположения найдется набор значений $b_1, \ldots, b_{n-1}$ из R, такой, что $a_s(b_1, \ldots, b_{n-1}) \neq 0$. Тогда

$$h(b_1, \ldots, b_{n-1}, x_n) = a_0(b_1, \ldots, b_{n-1}) + a_1(b_1, \ldots, b_{n-1})x_n+$$
$$+a_s(b_1, \ldots, b_{n-1})x_n^s = c_0 + c_1x_n + \cdots + c_sx_n^s,$$

где $c_i = a_i(b_1, \ldots, b_{n-1})$ и $c_s \neq 0$. Поскольку теорема справедлива при $n = 1$, то найдется такое $b_n \in R$, что

$$h(b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n) = c_0 + c_1 b_n + \cdots + c_s b_n^s \neq 0,$$

что и требовалось доказать. □

Можно немного ослабить требования теоремы 18.2. Оказывается, достаточно сравнивать значения многочленов не во всех точках из R^n, а только в точках из некоторого подмножества из R^n.

***Следствие 18.2* (*О несущественности алгебраических неравенств*).** *Пусть R — бесконечное кольцо без делителей нуля и пусть f_1 и f_2 — два многочлена из $R[x_1, \ldots, x_n]$, принимающие одинаковые значения во всех точках $(b_1, \ldots, b_n)$, где выполнены неравенства*

$$h_1(b_1, \ldots, b_n) \neq 0, \ldots, h_k(b_1, \ldots, b_n) \neq 0,$$

где $h_1, \ldots, h_k$ — отличные от нуля многочлены из $R[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда многочлены f_1 и f_2 равны.

Доказательство. Рассмотрим многочлен $(f_1 - f_2)h_1 \cdots h_k$. Он равен нулю при всех наборах переменных, так как там, где $h_1 \neq 0, \ldots, h_k \neq 0$, обращается в нуль первый множитель. В силу теоремы о тождестве 18.2 $(f_1 - f_2)h_1 \cdots h_k = 0$. Но $R[x_1, \ldots, x_n]$ не имеет делителей нуля и $h_1 \neq 0, \ldots, h_k \neq 0$. Следовательно, $f_1 - f_2 = 0$, т. е. $f_1 = f_2$, что и требовалось доказать. □

Установленная теорема полезна в ситуации, когда равенство значений двух многочленов удается установить в предположении о необращении в нуль одного или нескольких многочленов. В силу доказанной теоремы после установления такого равенства поставленные ограничения снимаются.

Замечание 1. Теорема о тождестве 18.2 перестает быть верной, если отбросить требование бесконечности кольца R. Например, в кольце многочленов $\mathbb{Z}_p[x_1, x_2]$ рассмотрим многочлены $f(x_1, x_2) = x_1^p - x_1$ и $g(x_1, x_2) = x_2^p - x_2$. По теореме Ферма $a^p - a = 0$ для любого $a \in \mathbb{Z}_p$. Следовательно, $f(a, b) = g(a, b) = 0$ для любой точки (a, b), где $a, b \in \mathbb{Z}_p$, но при этом $f \neq g$.

Для многочленов от одного неизвестного существует два естественных способа расположения членов — по возрастающим и убывающим степеням неизвестного. В случае многочленов от нескольких неизвестных такие способы уже отсутствуют: если дан многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^2,$$

то его можно записать и в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_2^3 x_3^2,$$

и нет оснований одну из этих записей предпочесть другой. Существует, однако, способ определенного расположения одночленов в многочлене от нескольких неизвестных. Этот способ зависит от выбора нумерации неизвестных, его называют *лексикографическим* и он подсказан обычным приемом расположения слов в словарях. Пусть даны два неподобных одночлена:

$$a x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \tag{18.4}$$

$$b x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}, \tag{18.5}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $(k_1, \ldots, k_n) \neq (m_1, \ldots, m_n)$.

Определение 18.2. *Говорят, что одночлен (18.4)* ***выше*** *одночлена (18.5), если первая отличная от нуля среди разностей $k_1 - m_1$, $k_2 - m_2$, $\ldots$, $k_n - m_n$ положительна. В этом случае записываем $a x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \succ b x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$. Получаемое таким образом упорядочение на множестве одночленов называют* ***лексикографическим****.*

Предложение 18.3. *Пусть R — кольцо без делителей нуля. Отношение лексикографического упорядочения одночленов обладает следующими свойствами:*

1) *если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $A \succ C$;*

2) *если $A \succ B$, то $AC \succ BC$ для любого одночлена C;*

3) *если $A_1 \succ B_1$ и $A_2 \succ B_2$, то $A_1 A_2 \succ B_1 B_2$.*

Первое из этих свойств и дает основание называть отношение $\succ$ упорядочением.

Доказательство. 1) Пусть первая переменная, которая не входит во все одночлены A, B, C с одним и тем же показателем, входит в них с показателями k, l, m соответственно. Тогда по условию $k \geq l \geq m$, причем хотя бы в одном из двух случаев имеет место строгое неравенство. Следовательно, $k > m$, а это и означает, что $A \succ C$.

2) При умножении на C к показателям, с которыми каждая из переменных входит в A и B, добавляется одно и то же число, и знак неравенства (или равенства) между этими показателями не меняется, а только эти неравенства и имеют значение при лексикографическом сравнении одночленов.

3) Пользуясь предыдущим свойством, получаем

$$A_1A_2 \succ B_1A_2 \succ B_1B_2.$$

Предложение доказано. □

Очевидно, что из любых двух различных одночленов многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ один будет выше другого. Записывая раньше тот из двух одночленов, входящих в f, который выше, получим лексикографическую запись f. Например, многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + 3x_1^2x_2^3x_3 - x_1^2x_2^2x_4^2 + 5x_1x_3x_4^2 + 2x_2 + x_3^2x_4 - 4$$

записан лексикографически. Обратите внимание: одночлен $3x_1^2x_2^3x_3$ лексикографически ниже одночлена x_1^4, хотя его степень больше.

Определение 18.3. Высшим одночленом *ненулевого многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется такой одночлен, который выше других одночленов, входящих в f.*

Предложение 18.4. *Пусть R — кольцо без делителей нуля. Высший одночлен произведения многочленов $h_1, \ldots, h_k \in R[x_1, \ldots, x_n]$ равен произведению их высших одночленов.*

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для двух многочленов, затем использовать очевидную индукцию по числу многочленов k. Пусть h_1, h_2 — ненулевые многочлены с высшими одночленами A, B и A_1, B_1 — их произвольные одночлены. Если $A \neq A_1$ или $B \neq B_1$, то в силу предложения 18.3

$$AB \succ A_1B_1.$$

Это означает, что после приведения подобных слагаемых в произведении f_1f_2 произведение AB сохранится в качестве ненулевого одночлена (ведь ему не с чем сокращаться), который выше остальных. □

Замечание 2. Кроме лексикографического существуют и другие мономиальные упорядочения одночленов из $R[x_1, \ldots, x_n]$, обладающие всеми свойствами из предложения 18.3. Каждое из этих упорядочений имеет свою область применения.

§ 19. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

В этом параграфе будем предполагать, что R — ассоциативное коммутативное кольцо без делителей нуля.

Определение 19.1. *Многочлен $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ называется* ***симметрическим****, если он не изменяется ни при каких перестановках переменных.*

Так как любая перестановка может быть осуществлена путем последовательных перестановок двух элементов, то многочлен является симметрическим, если он не изменяется при перестановке любых двух переменных.

Пример 1. Степенные суммы $s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}$, являются симметрическими многочленами.

Пример 2. Следующие симметрические многочлены называются *элементарными симметрическими многочленами*:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
&\boldsymbol{\sigma}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\boldsymbol{\sigma}_k = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\boldsymbol{\sigma}_n = x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}$$

Эти многочлены встречались ранее в курсе алгебры в связи с теоремой Виета.

Пример 3. Многочлен

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

является симметрическим.

Очевидно, что сумма, разность и произведение симметрических многочленов являются симметрическими многочленами. Иными словами, симметрические многочлены образуют подкольцо в кольце всех многочленов от n переменных.

Следовательно, если $F \in R[y_1, \ldots, y_m]$ — произвольный многочлен от m переменных $y_1, \ldots, y_m$ и $f_1, \ldots, f_m \in R[x_1, \ldots, x_n]$ — какие-то симметрические многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, то значение $F(f_1, \ldots, f_m)$ многочлена F при $y_1 = f_1, \ldots, y_m = f_m$ — симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$. Естественно возникает вопрос, нельзя ли найти такие симметрические многочлены $f_1, \ldots, f_m$, чтобы всякий симметрический многочлен можно было выразить через них указанным способом. Оказывается, что в качестве таких многочленов можно взять элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

***Теорема 19.1* (*Основная о симметрических многочленах*).** *Пусть $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ — симметрический многочлен. Тогда найдется такой многочлен $F \in R[y_1, \ldots, y_n]$, что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

При этом многочлен F определен однозначно. Другими словами, всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Для доказательства теоремы необходимы две леммы.

Лемма 19.1. *Пусть $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ — высший одночлен симметрического многочлена f. Тогда*

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n. \tag{19.1}$$

Доказательство. Предположим, что $k_i < k_{i+1}$ для некоторого i. Наряду с одночленом u многочлен f должен содержать одночлен

$$u' = ax_1^{k_1} \cdots x_i^{k_{i+1}} x_{i+1}^{k_i} \cdots x_n^{k_n},$$

получающийся из u перестановкой x_i и x_{i+1}. Легко видеть, что $u' \succ u$. Это противоречит тому, что u — старший одночлен многочлена f. $\square$

Лемма 19.2. *Для любого одночлена $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, показатели которого удовлетворяют неравенствам* (19.1)*, существуют такие неотрицательные целые числа $l_1, \ldots, l_n$, что высший одночлен многочлена $a\sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \cdots \sigma_n^{l_n}$ совпадает с u. Числа $l_1, \ldots, l_n$ определены этим условием однозначно.*

Доказательство. Видно, что высший одночлен многочлена σ_k равен $x_1x_2\cdots x_k$. В силу предложения 18.4 высший одночлен многочлена $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_n^{l_n}$ равен

$$ax_1^{l_1}(x_1x_2)^{l_2}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{l_n} = ax_1^{l_1+l_2+\cdots+l_n}x_2^{l_2+l_3+\cdots+l_n}\cdots x_n^{l_n}.$$

Приравнивая его одночлену u, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} l_1+l_2+\cdots+l_n = k_1, \\ \qquad l_2+\cdots+l_n = k_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\quad l_n = k_n. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$l_i = k_i - k_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad l_n = k_n. \tag{19.2}$$

Из условия леммы следует, что определенные таким образом числа $l_1, \ldots, l_n$ неотрицательны. □

Доказательство теоремы 19.1. Если $f = 0$, можно взять $F = 0$. В противном случае пусть $u_1 = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ — высший одночлен многочлена f. По лемме 19.1 выполняются неравенства $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$. В силу леммы 19.2 существуют такие неотрицательные целые числа $l_1, \ldots, l_n$, что высший одночлен многочлена $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_n^{l_n}$ совпадает с u_1. Обозначим $F_1 = ay_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_n^{l_n} \in K[y_1, \ldots, y_n]$ и рассмотрим симметрический многочлен

$$f_1 = f - F_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Если $f_1 = 0$, то можно взять $F = F_1$. В противном случае пусть u_2 — высший одночлен многочлена f_1. Ясно, что $u_1 \succ u_2$. Снова по лемме 19.2 существует такой одночлен $F_2 \in K[y_1, \ldots, y_n]$, что высший одночлен многочлена $F_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ равен u_2. Рассмотрим симметрический многочлен

$$f_2 = f_1 - F_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Если $f_2 = 0$, то можно взять $F = F_1 + F_2$. В противном случае, продолжая процесс, получаем последовательность симметрических многочленов $f, f_1, f_2, \ldots$, высшие одночлены которых удовлетворяют неравенствам

$$u_1 \succ u_2 \succ \ldots$$

По лемме 19.2 показатель при любой переменной в любом из одночленов u_m не превосходит показателя при x_1 в этом одночлене, а он, в свою очередь, не превосходит k_1. Поэтому для наборов показателей одночленов u_m имеется лишь конечное число возможностей, так что описанный выше процесс должен оборваться. Это означает, что $f_M = 0$ для некоторого M. Тогда в качестве F можно взять $F_1 + F_2 \cdots + F_M$.

Докажем теперь, что многочлен F однозначно определен. Предположим, что F и G — такие многочлены из $K[y_1, \ldots, y_n]$, что

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Рассмотрим их разность $H = F - G$. Тогда

$$H(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0.$$

Нужно доказать, что H — нулевой многочлен. Предположим, что это не так, и пусть $H_1, H_2, \ldots, H_s$ — все ненулевые одночлены многочлена H. Обозначим через w_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ высший одночлен многочлена

$$H_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

В силу леммы 19.2 среди одночленов $w_1, w_2, \ldots, w_s$ нет пропорциональных. Выберем наивысший из них. Пусть это будет w_1. По построению одночлен w_1 выше остальных одночленов многочлена $H_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ и всех одночленов многочленов $H_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ $(i = 2, \ldots, s)$. Поэтому после приведения подобных одночленов в сумме

$$H_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) + \cdots + H_s(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = H(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

одночлен w_1 сохранится (ему не с чем сокращаться), так что эта сумма не будет равна нулю, что противоречит нашему предположению. $\square$

Следующее утверждение позволяет по-новому осмыслить полученный в предыдущей теореме результат.

Предложение 19.1. *Подкольцо S симметрических многочленов кольца $R[x_1, \ldots, x_n]$ изоморфно кольцу многочленов $R[x_1, \ldots, x_n]$.*

Доказательство. Рассмотрим кольцо многочленов $R[y_1, \ldots, y_n]$, которое изоморфно $R[x_1, \ldots, x_n]$, и отображение

$$\psi : R[y_1, \ldots, y_n] \to R[x_1, \ldots, x_n], \quad \psi(f) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

т. е. в качестве $\psi(f)$ мы берем значение f при $y_1 = \sigma_1, \ldots, y_n = \sigma_n$. В силу предложения 18.2 ψ — гомоморфизм. Очевидно, $\operatorname{Im} \psi \subseteq S$. По основной теореме о симметрических многочленах 19.1 любой симметрический многочлен $h \in S$ можно представить в виде $h = f(\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_n)$ для некоторого многочлена $f \in R[y_1, \ldots, y_n]$. Это означает, что $h = \boldsymbol{\psi}(f)$, т. е. $\operatorname{Im} \boldsymbol{\psi} = S$. Кроме того, отображение $\boldsymbol{\psi}$ инъективно в силу единственности такого представления. Значит, $\boldsymbol{\psi}$ — изоморфизм колец $R[y_1, \ldots, y_n]$ и S. $\square$

Следуя доказательству этой теоремы, можно найти выражение любого конкретного симметрического многочлена через $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, …, $\boldsymbol{\sigma}_n$. На практике для однородных симметрических многочленов удобнее применять другой способ, который поясним на следующем примере.

Пример 1. Выразим через $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3, \boldsymbol{\sigma}_4$ многочлен

$$f = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3).$$

В обозначениях доказательства теоремы 19.1 имеем $u_1 = x_1^3x_2x_3x_4$. Не производя вычислений, можно найти с точностью до коэффициентов множество возможных кандидатов на роль одночленов $u_2, u_3, u_4, \ldots$. Во-первых, их показатели должны удовлетворять неравенствам леммы 19.1. Во-вторых, поскольку f — однородный многочлен степени 6, сумма их показателей должна равняться 6. В-третьих, они должны быть младше u_1. Выпишем в таблицу все наборы показателей одночленов, удовлетворяющих этим условиям, в порядке лексикографического убывания, начиная с набора показателей одночлена u_1, а справа выпишем соответствующие произведения элементарных симметрических многочленов, найденные по формулам (19.2):

3	1	1	1	$\boldsymbol{\sigma}_1^2\boldsymbol{\sigma}_4$
2	2	2	0	$\boldsymbol{\sigma}_3^2$
2	2	1	0	$\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_4$

Мы можем утверждать, что

$$f = \boldsymbol{\sigma}_1^2\boldsymbol{\sigma}_4 + a\boldsymbol{\sigma}_3^2 + b\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_4.$$

Чтобы найти коэффициенты a и b, будем придавать в этом равенстве переменным x_1, x_2, x_3, x_4 выбранные значения. Представим вычисления в виде таблицы, в правом столбце которой запишем получаемые уравнения:

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f	
1	1	1	0	3	3	1	0	1	$a=1$
1	1	-1	-1	0	-2	0	1	8	$-2b=8$

Таким образом, $a = 1$ и $b = -4$, так что

$$f = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4.$$

В случае неоднородного симметрического многочлена этот способ можно применить к каждой его однородной компоненте и полученные выражения сложить.

Упражнения

1. Следующие многочлены выразить в виде многочленов от элементарных симметрических многочленов:

а) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;

б) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$;

в) $(x_1x_2 + x_3)(x_1x_3 + x_2)(x_2x_3 + x_1)$;

г) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$.

2. Найти значение симметрического многочлена F от корней многочлена $f(x)$:

а) $F = x_1^3(x_2+x_3)+x_2^3(x_1+x_3)+x_3^3(x_1+x_2)$, $f(x) = x^3-x^2-4x+1$;

б) $F = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$, $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.

3. Решить над полем комплексных чисел систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = -4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3. \end{cases}$$

4. Доказать, что значение от корней степени n из 1 всякого симметрического многочлена от n переменных с целыми коэффициентами является целым числом.

5. Вычислить сумму пятых степеней корней многочлена $x^6-4x^5+ +3x^3 - 4x^2 + x + 1$.

6. Найти многочлен третьей степени, корнями которого являются:

а) кубы корней многочлена $x^3 - x - 1$;

б) четвертые степени корней многочлена $2x^3 - x^2 + 2$.

§ 20. ПОЛЕ ЧАСТНЫХ КОЛЬЦА БЕЗ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо без делителей нуля с единицей. Таким же образом, как кольцо целых чисел расширяется до поля рациональных чисел, кольцо A можно расширить до поля.

На множестве пар $(a,b) \in A^2$, $b \neq 0$, определим отношение эквивалентности по правилу

$$(a,b) \sim (a_1,b_1) \Leftrightarrow ab_1 = a_1 b.$$

Рефлексивность и симметричность этого отношения очевидны; докажем его транзитивность. Если $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ и $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$, то

$$(ab_1)b_2 = (a_1 b)b_2 = (a_1 b_2)b = (a_2 b_1)b.$$

Поскольку $b_1 \neq 0$ и A — кольцо без делителей нуля, то обе части равенства можно сократить на b_1. Получим

$$ab_2 = a_2 b,$$

т. е. $(a,b) \sim (a_2,b_2)$.

Класс эквивалентности, содержащий пару (a,b), условимся записывать как «дробь» $\dfrac{a}{b}$ (пока это просто символ, не подразумевающий фактического деления). Множество всех дробей обозначим через $Q(A)$.

Определим сложение и умножение дробей по правилам

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Лемма 20.1. *Введенные операции над дробями корректно определены, т. е. не зависят от выбора представителей в классах эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1}{b_1}$, $\dfrac{c}{d} = \dfrac{c_1}{d_1}$. Тогда $ab_1 = a_1 b$, $cd_1 = c_1 d$. Имеем

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1} = \frac{a_1 d_1 + b_1 c_1}{b_1 d_1}.$$

Проверим, что справа стоят равные дроби:

$$(ad+bc)b_1 d_1 - (a_1 d_1 + b_1 c_1)bd = (ab_1 - a_1 b)dd_1 + (cd_1 - c_1 d)bb_1 = 0,$$

что и требовалось. Аналогичное вычисление показывает корректность умножения. □

Теорема 20.1. *$Q(A)$ относительно введенных операций является полем. Это поле называют* ***полем частных*** *кольца A*

Доказательство. Заметим, что $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ для любого $0 \neq c \in A$. Поэтому любое конечное множество дробей можно привести к общему знаменателю, а сложение дробей с одинаковыми знаменателями сводится к сложению их числителей. Поэтому сложение дробей коммутативно и ассоциативно. Дробь $\dfrac{0}{1}$ служит нулем для операции сложения дробей, а дробь $-\dfrac{a}{b}$ противоположна дроби $\dfrac{a}{b}$. Таким образом, дроби образуют абелеву группу относительно сложения.

Коммутативность и ассоциативность умножения очевидны. Следующая цепочка равенств доказывает дистрибутивность умножения дробей относительно сложения:

$$\left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b}\right)\frac{c}{d} = \frac{(a_1 + a_2)c}{bd} = \frac{a_1c + a_2c}{bd} = \frac{a_1}{b}\frac{c}{d} + \frac{a_2}{b}\frac{c}{d}.$$

Единицей для операции умножения дробей служит дробь $\dfrac{1}{1}$, а при $a \neq 0$ дробь $\dfrac{b}{a}$ обратна дроби $\dfrac{a}{b}$. □

Сложение и умножение дробей вида $\dfrac{a}{1}$ сводятся к соответствующим операциям над их числителями. Кроме того, $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{1}$ только при $a = b$. Следовательно, дроби такого вида образуют подкольцо, изоморфное A. Условившись отождествлять дробь вида $\dfrac{a}{1}$ с элементом a кольца A, можем считать, что кольцо A содержится в поле $Q(A)$. Далее, поскольку

$$\frac{a}{b}\frac{b}{1} = \frac{a}{1},$$

то дробь $\dfrac{a}{b}$ равна отношению элементов a и b кольца A в поле $Q(A)$. Таким образом, обозначение $\dfrac{a}{b}$ можно теперь понимать содержательным образом как деление элементов a и b в поле $Q(A)$.

Следствие 20.1. *Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с* 1*. Кольцо A содержится в некотором поле K тогда и только тогда, когда A — кольцо без делителей нуля.*

Доказательство. Если A — кольцо без делителей нуля, то по теореме 20.1 существует поле частных $Q(A)$ и $A \subset Q(A)$. Наоборот, если A содержится в некотором поле K, то поскольку в K нет делителей нуля, кольцо A является кольцом без делителей нуля. □

Пример 1. Поле частных кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел есть поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Пример 2. Поле частных кольца $K[x]$ многочленов над полем K называется полем рациональных функций над полем K и обозначается через $K(x)$.

Пример 3. Поле частных кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от n переменных над полем K называется полем рациональных функций от n переменных над полем K и обозначается через $K(x_1, \ldots, x_n)$.

§ 21. ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛЯ

Пусть P — поле.

Определение 21.1. *Если для любого натурального числа n элемент $n \cdot 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ поля P отличен от нуля, то говорят, что поле P имеет **характеристику** нуль; если же для некоторого натурального n элемент $n \cdot 1$ равен нулю, то наименьшее такое натуральное n называется **характеристикой** поля P и P называется полем положительной характеристики. Характеристика поля P обозначается $\operatorname{char} P$.*

Примерами полей положительной характеристики служат все конечные поля; существуют и бесконечные поля, имеющие положительную характеристику. Например, поле рациональных функций $K(x)$, где K — конечное поле положительной характеристики, является бесконечным полем положительной характеристики. Поле $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, состоящее из p элементов, очевидно, имеет характеристику p. Поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ имеют характеристику нуль.

Непосредственно из определения следует, что для любого расширения $E \supset F$ справедливо $\operatorname{char} E = \operatorname{char} F$.

Теорема 21.1. *Если поле P имеет характеристику p, то число p простое.*

Доказательство. Действительно, из равенства $p = st$, где $s < p$, $t < p$, вытекало бы равенство

$$(s \cdot 1)(t \cdot 1) = (st \cdot 1) = (p \cdot 1) = 0.$$

Так как в поле не может быть делителей нуля, то или $s \cdot 1 = 0$ или $t \cdot 1 = 0$, что противоречит определению характеристики поля. $\square$

Предложение 21.1. *Если характеристика поля P равна p, то для любого элемента $a \in P$ и любого n, делящегося на p, имеет место равенство $n \cdot a = 0$. Если же $\operatorname{char} P = 0$, $0 \neq a \in P$ и $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, то $na \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{char} P = p$ и $n = pn_1$. Тогда

$$n \cdot a = n_1 p \cdot (1a) = n_1(p \cdot 1)a = n_1 0a = 0.$$

Если $\operatorname{char} P = 0$, то из равенства $na = (n \cdot 1)a = 0$ следовало бы $n \cdot 1 = 0$. Так как характеристика поля равна нулю, то $n = 0$ — противоречие. $\square$

Предложение 21.2. *Если поле P имеет характеристику p, то для любых элементов $x, y \in P$ и любого натурального n*

$$(x+y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ нужно доказать, что

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

По формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^p = x^p + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i x^i y^{p-i} + y^p.$$

Так как $C_p^i = \dfrac{p!}{i!(p-i)!}$, то $p \mid C_p^i$ и по предложению 21.1 $C_p^i x^i y^{p-i} = 0$.

Значит, $(x+y)^p = x^p + y^p$.

Предположим, что предложение верно при $n = k-1$ и докажем его при $n = k$.

$$(x+y)^{p^k} = ((x+y)^{p^{k-1}})^p = (x^{p^{k-1}} + y^{p^{k-1}})^p = x^{p^k} + y^{p^k}.$$

Предложение доказано. $\square$

По индукции предложение 21.2 нетрудно перенести на случай произвольного числа слагаемых:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^{p^n} = x_1^{p^n} + \cdots + x_k^{p^n}.$$

Упражнения

1. Доказать, что любое конечное поле имеет положительную характеристику.

2. Существует ли бесконечное поле положительной характеристики?

3. Доказать, что в поле $\mathbb{Z}_p$ выполняются равенства:

а) $\sum\limits_{k=1}^{p-1} k^{-1} = 0 \quad (p > 2)$; б) $\sum\limits_{k=1}^{(p-1)/2} k^{-2} = 0 \quad (p > 3)$.

4. Пусть F — поле и $f \in F[x]$. Доказать, что если характеристика поля F равна нулю, то $f' = 0$ тогда и только тогда, когда f — постоянный многочлен; если же характеристика поля F равна $p > 0$, то $f' = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x^p)$ для некоторого многочлена $g \in F[x]$.

§ 22. СТЕПЕНЬ РАСШИРЕНИЯ

Если поле L содержит поле K, то говорят, что L является расширением поля K. В этом случае L можно рассматривать как векторное пространство над полем K. Действительно, по определению поля L является абелевой группой относительно сложения. Далее, поскольку $K \subset L$, то определено умножение элементов поля K на элементы поля L, которые можно рассматривать как «векторы». Фактически, это умножение является умножением элементов поля L. При этом из определения поля вытекают следующие свойства:

$$a(x + y) = ax + ay, \quad (a + b)x = ax + bx, \quad 1x = x, \quad (ab)x = a(bx)$$

для любых элементов $a, b \in K$, $x, y \in L$. Это и означает, что L — векторное пространство над полем K.

Определение 22.1. *Размерность L над K называется* ***степенью расширения*** *L над K и обозначается $[L : K]$. Степень расширения может быть равна бесконечности.*

Если $[L:K]<\infty$, то говорят, что L — конечное расширение поля K или что L конечно над K.

Теорема 22.1. *Пусть E, F, K — поля и $E \supset F \supset K$. Если $\{x_i\}_{i\in I}$ — базис E над F и $\{y_j\}_{j\in J}$ — базис F над K, то $\{x_iy_j\}_{i\in I, j\in J}$ — базис E над K.*

Доказательство. Вначале докажем, что любой элемент $x \in E$ можно выразить через x_iy_j, $i \in I$, $j \in J$, с коэффициентами из поля K. Так как $\{x_i\}_{i\in I}$ — базис E над F, то существуют элементы $\alpha_i \in F$, среди которых лишь конечное число отлично от нуля, такие, что

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i. \tag{22.1}$$

Так как $\{y_j\}_{j\in J}$ — базис F над K, то для каждого ненулевого α_i существуют элементы $\beta_{ij} \in K$, среди которых лишь конечное число отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_i = \sum_{j\in J} \beta_{ij} y_j. \tag{22.2}$$

Подставляя (22.2) в (22.1), получаем

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} \beta_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i\in I, j\in J} \beta_{ij} x_i y_j,$$

что и требовалось.

Докажем, что элементы x_iy_j, $i \in I$, $j \in J$, линейно независимы над K. Предположим, что существуют элементы $\beta_{ij} \in K$, $i \in I$, $j \in J$, среди которых не все равны нулю и лишь конечное число отлично от нуля, такие, что

$$\sum_{i\in I, j\in J} \beta_{ij} x_i y_j = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i\in I} \left(\textstyle\sum_{j\in J} \beta_{ij} y_j \right) x_i = 0.$$

Поскольку $\alpha_i = \sum\limits_{j\in J} \beta_{ij} y_j \in F$, а элементы $\{x_i\}_{i\in I}$ линейно независимы над F, то

$$\sum_{j\in J} \beta_{ij} y_j = 0, \quad i \in I.$$

Так как $\{y_j\}_{j\in J}$ — базис F над K, то $\beta_{ij} = 0$ для всех i, j — противоречие. $\square$

***Следствие 22.1* (*О мультипликативности степени расширений полей*).** *Пусть E, F, K — поля и $E \supset F \supset K$. Расширение E над K конечно тогда и только тогда, когда E конечно над F и F конечно над K. В случае их конечности справедливо соотношение*

$$[E : K] = [E : F][F : K]. \tag{22.3}$$

Доказательство. Если E конечно над F и F конечно над K, то из теоремы 22.1 немедленно следует, что E конечно над K.

Если E конечно над K, то и F конечно над K, поскольку является подпространством в E. Далее, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис E над K, то тем более элементы $e_1, \ldots, e_n$ порождают E над F (хотя и не обязаны являться базисом E над F). Значит, E конечно над F.

Формула (22.3) непосредственно следует из теоремы 22.1. □

Упражнения

1. Доказать, что если L — расширение поля K и степень $[L : K]$ — простое число, то единственными полями F, удовлетворяющими условию $K \subseteq F \subseteq L$, являются $F = K$ и $F = L$.

§ 23. ПРОСТЫЕ ПОДПОЛЯ

Определение 23.1. *Поле, не обладающее никаким собственным подполем, называется* ***простым****.*

Предложение 23.1. *$\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_p$ — простые поля.*

Доказательство. Если $K \subset \mathbb{Q}$ — подполе, то $1 \in K$. Следовательно, $1 + \cdots + 1 = n \in K$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $\mathbb{Z} \subset K$. Для любых $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, дробь $n/m \in K$, поскольку K — поле. Значит, $K = \mathbb{Q}$.

Если $K \subset \mathbb{Z}_p$ — подполе, то $1 \in K$. Следовательно, $n \in K$ для любого $n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, т. е. $\mathbb{Z}_p \subset K$. Значит, $K = \mathbb{Z}_p$. □

Теорема 23.1. *В любом поле P содержится ровно одно простое подполе P_0. Если $\operatorname{char} P = 0$, то P_0 изоморфно $\mathbb{Q}$. Если $\operatorname{char} P = p$, то P_0 изоморфно $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. Допустив существование двух различных простых подполей $P_0, P_1 \subset P$, получим, что их пересечение будет полем, отличным от P_0 и P_1. Это, однако, невозможно ввиду их простоты. Значит, простое подполе $P_0 \subset P$ единственно.

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{Z} \to P$, определенное правилом $f(n) = n \cdot 1$. Отображение f — гомоморфизм, а его ядро $\operatorname{Ker} f$ является идеалом в $\mathbb{Z}$. Так как $\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов, то $\operatorname{Ker} f = m\mathbb{Z}$.

Если $\operatorname{char} P = 0$, то $m = 0$ и f — мономорфизм. Дроби

$$\frac{s \cdot 1}{t \cdot 1} = (s \cdot 1)(t \cdot 1)^{-1},$$

имеющие смысл в P (поскольку P — поле), образуют поле P_0, изоморфное $\mathbb{Q}$. В силу предложения 23.1 P_0 будет простым подполем в P.

Если $\operatorname{char} P = p$, то $m = p$ и мы имеем по основной теореме о гомоморфизмах для колец, что

$$f(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p.$$

В силу предложения 23.1 $P_0 = f(\mathbb{Z})$ — простое подполе в P, изоморфное $\mathbb{Z}_p$. $\square$

Упражнения

1. Доказать, что в поле из p^2 элементов, где p — простое число, имеется единственное собственное подполе.

2. Пусть K — поле из n элементов. Какое простое подполе содержит K и чему равна характеристика K, если:

а) $n = 16$; б) $n = 25$; в) $n = 81$.

3. Какое простое подполе содержит следующее поле:

а) $\mathbb{R}(x)$; б) $\mathbb{Z}_5(x)$.

4. Доказать, что если K_i, $i \in I$, — подполя в P, то $K = \cap_{i \in I} K_i$ — подполе в P.

§ 24. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ

Определение 24.1. *Пусть $E \supset F$ — расширение полей. Элемент $a \in E$ называется **алгебраическим** над F, если существует ненулевой многочлен $f(x) \in F[x]$, такой, что $f(a) = 0$. Если такого многочлена не существует, т. е. для любого $f(x) \in F[x]$ имеем $f(a) \neq 0$, то элемент a называется **трансцендентным** над F.*

Определение 24.2. *Пусть $E \supset F$ — расширение полей и $a \in E$ — алгебраический элемент над F.* ***Минимальным многочленом*** *элемента a называется ненулевой многочлен $f(x) \in F[x]$ наименьшей степени и со старшим коэффициентом 1, такой, что $f(a) = 0$. Степень многочлена $f(x)$ называется* ***степенью*** *элемента a.*

Лемма 24.1. *Минимальный многочлен $f(x)$ элемента $a \in E$ неприводим.*

Доказательство. Допустим, что $f(x) = g(x)h(x)$, где $\deg g(x) < < \deg f(x)$, $\deg h(x) < \deg f(x)$. Тогда

$$f(a) = g(a)h(a) = 0,$$

откуда либо $g(a) = 0$ либо $h(a) = 0$ — противоречие с минимальностью $f(x)$. □

Предложение 24.1. *Если $f(x)$ — минимальный многочлен элемента a над полем F и $g(a) = 0$ для некоторого многочлена $g(x) \in \in F[x]$, то $g(x)$ делится на $f(x)$.*

Доказательство. Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x), \qquad \deg r(x) < \deg f(x).$$

Подставив $x = a$, получим $0 = r(a)$, откуда $r(x) = 0$ (иначе мы имели бы противоречие с минимальностью $f(x)$). □

Определение 24.3. *Расширение полей $E \supset F$ называется* ***алгебраическим****, если все элементы из E являются алгебраическими над F.*

Теорема 24.1. *Любое конечное расширение E поля F является алгебраическим над F.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a \in E$ и $[E : F] = n$. Тогда элементы $1, a, a^2, \ldots, a^n$ линейно зависимы над F. Значит, существуют элементы $b_0, b_1, \ldots, b_n \in F$, не все равные нулю и такие, что

$$b_0 + b_1 a + \cdots + b_n a^n = 0.$$

Пусть $f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in F[x]$. Тогда $f(x) \neq 0$ и $f(a) = 0$. Значит, a алгебраичен над F. □

Упражнения

1. Найти минимальные многочлены для элементов:

а) $\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}$; в) $2-3i$ над $\mathbb{R}$; д) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$;
б) $\sqrt[3]{5}$ над $\mathbb{Q}$; г) $2-3i$ над $\mathbb{C}$; е) $\sqrt[3]{2}+i$ над $\mathbb{Q}$.

2. Пусть K — расширение поля L, $a \in K$ — трансцендентный над L элемент и $f \in L[x]$. Доказать, что элемент $f(a) \in K$ является трансцендентным над L.

3. Доказать, что следующие числа являются алгебраическими над $\mathbb{Q}$:

а) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$; б) $1-i\sqrt{3}$; в) $\sqrt[5]{-2+i\sqrt{2}}$.

§ 25. ПРОСТЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ

Пусть $E \supset F$ — расширение полей и $a \in E$.

Определение 25.1. *Обозначим через $F(a)$ наименьшее подполе в E, содержащее F и a. Переход от поля F к полю $F(a)$ называется* ***присоединением*** *к F элемента a. Поля вида $F(a)$ называются* ***простыми расширениями*** *поля F.*

Абстрактно $F(a)$ может быть описано как пересечение всех подполей поля E, содержащих F и a. Следующее предложение дает более конкретное описание $F(a)$.

Предложение 25.1. $F(a) = \left\{ \dfrac{f(a)}{g(a)} \;\middle|\; f, g \in F[x],\ g(a) \neq 0 \right\}$.

Доказательство. Обозначим $K = \left\{ \dfrac{f(a)}{g(a)} \mid f, g \in F[x],\ g(a) \neq 0 \right\}$.

Следующие равенства показывают, что K — подполе в E.

$$\frac{f(a)}{g(a)} + \frac{f_1(a)}{g_1(a)} = \frac{f(a)g_1(a) + f_1(a)g(a)}{g(a)g_1(a)} \in K,$$

$$\frac{f(a)}{g(a)}\,\frac{f_1(a)}{g_1(a)} = \frac{f(a)f_1(a)}{g(a)g_1(a)} \in K,$$

$$\left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)^{-1} = \frac{g(a)}{f(a)} \in K, \text{ если } f(a) \neq 0.$$

Очевидно, $a \in K$, $F \subset K$. Значит, $F(a) \subset K$.

С другой стороны, $a \in F(a)$ по определению. Тогда $f(a) \in F(a)$ для любого многочлена $f(x) \in F[x]$. Поскольку $F(a)$ — поле, то и все дроби $\dfrac{f(a)}{g(a)}$, где $f, g \in F[x]$, $g(a) \neq 0$, принадлежат $F(a)$. Значит, $K \subset F(a)$. Таким образом, $K = F(a)$. $\square$

Опишем вначале простые расширения поля F в случае, когда a является алгебраическим элементом над F (простые алгебраические расширения).

Теорема 25.1. *Пусть $E \supset F$ — расширение полей и $a \in E$ — алгебраический элемент степени n над F. Тогда*

$$F(a) = \left\{ b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \cdots + b_{n-1} a^{n-1} \mid b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in F \right\}.$$

Степень $[F(a) : F]$ равна степени минимального многочлена элемента a над F.

Доказательство. Пусть $p(x)$ — минимальный многочлен элемента a над F. Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi : F[x] \to E, \qquad h(x) \mapsto h(a).$$

Ядро ψ является идеалом в $F[x]$, а по теореме 14.2 $F[x]$ — кольцо главных идеалов. Поскольку по определению минимального многочлена $p(x)$ — многочлен наименьшей степени, содержащийся в $\ker \psi$, то $\ker \psi = (p(x))$. По основной теореме о гомоморфизмах колец, $\psi(F[x]) \simeq F[x]/(p(x))$. Так как $p(x)$ неприводим, то $(p(x))$ — максимальный идеал по теореме 15.2. Следовательно, по теореме 15.1 $F[x]/(p(x))$ — поле. Очевидно, что $a \in \psi(F[x])$, $F \subset \psi(F[x])$ и $\psi(F[x]) \subset F(a)$ в силу предложения 25.1. Так как $F(a)$ — наименьшее подполе, содержащее F и a, то

$$\psi(F[x]) = \{f(a) \mid f \in F[x]\} = F(a).$$

Если $f(a) \in F(a)$, то разделив $f(x)$ на $p(x)$ с остатком, получим

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x),$$

где $r(x) \in F[x]$ и $\deg r(x) < \deg p(x) = n$. Тогда

$$\psi(f(x)) = f(a) = p(a)q(a) + r(a) = r(a),$$

т. е. любой элемент из $F(a)$ имеет вид $b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \cdots + b_{n-1} a^{n-1}$, где $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in F$, что и требовалось.

Итак, мы доказали, что элементы $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ порождают $F(a)$ как векторное пространство над F. Докажем, что эти элементы линейно независимы над F. Пусть

$$b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \cdots + b_{n-1} a^{n-1} = 0,$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in F$ и не все из них равны нулю. Тогда $s(a) = 0$, где $0 \neq s(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} \in F[x]$ и $\deg s(x) < \deg p(x)$ — противоречие с минимальностью $p(x)$. $\square$

Теорема 25.2. *Пусть $E \supset F$ — расширение полей и $a, b \in E$ — алгебраические элементы над F. Тогда для любой дроби $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} \in F(x,y)$ такой, что $g(a,b) \neq 0$ элемент $\dfrac{f(a,b)}{g(a,b)} \in E$ алгебраичен над F. В частности, $a \pm b$, ab, $\dfrac{a}{b}$ — алгебраические элементы над F.*

Доказательство. Рассмотрим расширения полей $F \subset F(a) \subset F(a)(b)$. Так как b алгебраичен над F, то b алгебраичен над $F(a)$. По теореме 25.1 $F(a)(b)$ конечно над $F(a)$ и $F(a)$ конечно над F. Согласно следствию 22.1 $F(a)(b)$ конечно над F. По теореме 24.1 $F(a)(b)$ алгебраично над F. Следовательно, $\dfrac{f(a,b)}{g(a,b)} \in F(a)(b)$ — алгебраический элемент над F. $\square$

Изучим случай простого трансцендентного расширения поля K.

Теорема 25.3. *Пусть $E \supset F$ — расширение полей и $a \in E$ — трансцендентный элемент над F. Тогда $F(a) \simeq F(x)$, где $F(x)$ — поле рациональных функций от одной переменной над F.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\psi : F(x) \to F(a), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \mapsto \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Проверим корректность определения ψ. Так как a — трансцендентный элемент над F и $g(x) \neq 0$, то $g(a) \neq 0$ и можно вычислить элемент $\dfrac{f(a)}{g(a)} \in F(a)$. Если $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то $f(x)g_1(x) = f_1(x)g(x)$. Тогда $f(a)g_1(a) = f_1(a)g(a)$. В силу трансцендентности a имеем $g(a) \neq 0$, $g_1(a) \neq 0$, следовательно $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}$.

Легко проверить, что ψ — гомоморфизм и биекция. $\square$

Упражнения

1. Пусть L/K — алгебраическое расширение. Доказать, что расширение $L(x)/K(x)$ также алгебраическое и $[L(x) : K(x)] = [L : K]$.

2. Пусть L/K и K/F — алгебраические расширения. Доказать, что расширение L/F также алгебраическое.

3. Какой вид имеют элементы простых расширений:

а) $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\pi})$; в) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; д) $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})$;

б) $\mathbb{Q}(e^2)$; г) $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$; е) $\mathbb{R}(1+\sqrt{2}i)$.

4. Докажите, что:

а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$;

б) $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$, где p, q — различные простые числа.

5. Докажите, что поля $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, где p, q — различные простые числа, неизоморфны.

6. Найдите все автоморфизмы полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

7. Доказать, что расширение L/K является конечным тогда и только тогда, когда L может быть получено из K присоединением конечного числа алгебраических над K элементов.

§ 26. АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫЕ ПОЛЯ

Определение 26.1. *Поле K называется* ***алгебраически замкнутым****, если любой отличный от константы многочлен из $K[x]$ обладает в K хоть одним корнем.*

«Основная теорема алгебры» утверждает, что поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто. Следующая теорема показывает, что существуют и другие алгебраически замкнутые поля.

Теорема 26.1 (Штейниц). *Для каждого поля K существует алгебраически замкнутое алгебраическое расширение $\overline{K}$. С точностью до изоморфизма, тождественного на поле K, поле $\overline{K}$ определено однозначно.*

Доказательство теоремы Штейница выходит за рамки нашего курса, его можно найти в [9, гл. VII, § 2].

Поле $\overline{K}$ называется *алгебраическим замыканием* поля K.

Предложение 26.1. *Если $E \supset F$ — алгебраическое расширение полей, то алгебраическое замыкание $\overline{E}$ поля E является также алгебраическим замыканием поля F.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любой элемент $a \in \overline{E}$ алгебраичен над F. Элемент a алгебраичен над E. Пусть $f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in E[x]$ — минимальный многочлен a. Рассмотрим поле $F_1 = F(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, которое получается последовательным присоединением к F элементов $b_0, b_1, \ldots, b_n$. На каждом шаге мы имеем простое алебраическое расширение, которое является конечным расширением по теореме 25.1. В силу мультипликативности степени $[F_1 : F] < \infty$. Поскольку элемент a алгебраичен над F_1 (коэффициенты минимального многочлена $f(x)$ принадлежат F_1), то $F_1(a)$ — конечное расширение F_1. В силу мультипликативности степени $F_1(a)$ — конечное расширение F. Следовательно, $F_1(a)$ — алгебраическое расширение F и элемент a алгебраичен над F. $\square$

§ 27. КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ

Ранее мы уже встретились с важным классом конечных полей, т. е. полей, состоящих из конечного числа элементов. Было установлено, что для каждого простого числа p кольцо $\mathbb{Z}_p$ является конечным полем, состоящим из p элементов.

Поле $\mathbb{Z}_p$ играет важную роль в общей теории полей, так как, согласно теореме 23.1, каждое поле характеристики p должно содержать изоморфное $\mathbb{Z}_p$ подполе и потому может рассматриваться как расширение поля $\mathbb{Z}_p$. Это замечание играет основную роль в классификации конечных полей, поскольку характеристика каждого конечного поля есть простое число.

Предложение 27.1. *Пусть F — конечное поле, содержащее подполе K из q элементов, $m = [F : K]$. Тогда $|F| = q^m$.*

Доказательство. Поле F можно рассматривать как векторное пространство над полем K. В силу конечности F это пространство конечномерно. Если $[F : K] = m$, то F имеет базис над полем K, состоящий из m элементов, скажем, $b_1, \ldots, b_m$. Таким образом, каждый элемент поля F может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации $a_1b_1 + a_mb_m$, где $a_1, \ldots, a_m \in K$. Так как каждый коэффициент a_i может принимать q значений, то поле F состоит в точности из q^m элементов. $\square$

Теорема 27.1. *Пусть F — конечное поле. Тогда оно состоит из p^n элементов, где простое число p является характеристикой поля F, а натуральное число n является степенью поля F над его простым подполем $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. Так как поле F конечно, то его характеристика — некоторое простое число p. Поэтому простое подполе K поля F изоморфно Z_p и, значит, содержит p элементов. Остальное вытекает из предложения 27.1. $\square$

Чтобы установить, что для каждого простого p и каждого натурального n существует конечное поле из p^n элементов, мы используем подход, подсказываемый следующей леммой.

Лемма 27.1. *Если F — конечное поле из q элементов, то каждый элемент $a \in F$ является корнем многочлена $x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$.*

Доказательство. Для $a = 0$ равенство $a^q = a$ выполняется тривиально. Что же касается ненулевых элементов поля F, то они образуют мультипликативную группу F^* порядка $q - 1$, так что для каждого ненулевого элемента $a \in F$ по следствию из теоремы Лагранжа выполняется равенство $a^{q-1} = 1$, умножение которого на a приводит к требуемому результату. $\square$

Теперь докажем главную характеризационную теорему для конечных полей.

Теорема 27.2 (О существовании и единственности конечных полей). *Для каждого простого числа p и каждого натурального числа n с точностью до изоморфизма существует единственное конечное поле из p^n элементов.*

Доказательство. Существование. Для $q = p^n$ рассмотрим многочлен $x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$, и пусть $\overline{\mathbb{F}}_p$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$. Многочлен $x^q - x$ не имеет кратных корней в поле $\overline{\mathbb{F}}_p$, так как его

производная является постоянным многочленом:
$$(x^q - x)' = qx^{q-1} - 1 = -1 \neq 0$$
и в силу этого не может иметь общих корней с $x^q - x$. Поэтому многочлен $x^q - x$ имеет q различных корней в поле $\overline{\mathbb{F}}_p$. Пусть
$$F = \left\{a \in \overline{\mathbb{F}_p} \mid a^q - a = 0\right\}.$$

Докажем, что F — подполе поля $\overline{\mathbb{F}}_p$. Если $a, b \in F$, то, используя предложение 21.2, получаем
$$(a+b)^q = a^q + b^q = a + b, \qquad (ab)^q = a^q b^q = ab,$$
$$(a^{-1})^q = (a^q)^{-1} = a^{-1} \text{ при } a \neq 0,$$
откуда $a + b$, ab, $a^{-1} \in F$. Далее, если $p = 2$, то $-1 = 1$ и $(-a)^q = a^q = a = -a$. Если же $p > 2$, то $(-a)^q = -a^q = -a$. В обоих случаях получаем, что $-a \in F$. Итак, F — конечное поле из q элементов.

Единственность. Пусть F_1, F_2 — конечные поля из $q = p^n$ элементов. Тогда $\operatorname{char} F_1 = \operatorname{char} F_2 = p$ и потому $\mathbb{F}_p$ — простое подполе в F_1 и F_2. Пусть $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ — алгебраические замыкания полей F_1 и F_2. По предложению 26.1 $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ — алгебраические замыкания поля $\mathbb{F}_p$, а поэтому изоморфны. Пусть $\alpha : \overline{F}_1 \to \overline{F}_2$ — изоморфизм.

Выше мы доказали, что поле F_1 совпадает со множеством корней многочлена $x^q - x$ в поле $\overline{F}_1$, а поле F_2 совпадает со множеством корней многочлена $x^q - x$ в поле $\overline{F}_2$. Если $a \in F_1$, то $a^q - a = 0$. Применяя к обеим частям этого равенства изоморфизм α, получим $\alpha(a)^q - \alpha(a) = 0$, откуда $\alpha(a) \in F_2$. Значит, $\alpha(F_1) \subset F_2$. Так как порядки F_1 и F_2 совпадают и α инъективно, то $\alpha(F_1) = F_2$. Таким образом, ограничение α на F_1 является изоморфизмом полей F_1 и F_2. $\square$

Доказанная в теореме 27.2 единственность позволяет говорить о вполне определенном конечном поле данного порядка q. Будем обозначать его через $\mathbb{F}_q$, где под q понимается степень некоторого простого числа p, которое и является характеристикой этого поля.

Теорема 27.3 (Критерий подполя конечного поля). *Пусть $q = p^n$, где p — простое число. Тогда каждое подполе L поля $\mathbb{F}_q$ имеет порядок p^m, где m является делителем числа n. Обратно, если m — делитель числа n, то существует ровно одно подполе L поля*

$\mathbb{F}_q$*, состоящее из* p^m *элементов. При этом степень* $[\mathbb{F}_q : L] = \dfrac{n}{m}$.

Доказательство. Ясно, что любое подполе L поля $\mathbb{F}_q$ должно иметь порядок p^m, где m — натуральное число, не превосходящее n. Из предложения 27.1 следует, что число $q = p^n$ должно быть степенью числа p^m, так что m обязательно делит число n.

Пусть $\overline{\mathbb{F}}_p$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$. Тогда поле $\mathbb{F}_q$ совпадает со множеством корней многочлена $x^q - x$ в поле $\overline{\mathbb{F}}_p$. Если m — делитель числа n, т. е. $n = md$, то

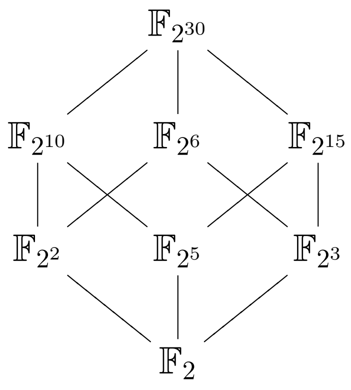
$$p^n - 1 = p^{md} - 1 = (p^m - 1)((p^m)^{d-1} + (p^m)^{d-2} + \cdots + 1),$$

откуда $p^m - 1$ делит число $p^n - 1$. Следовательно, многочлен $x^{p^m-1} - 1$ делит многочлен $x^{p^n-1} - 1 = x^{q-1} - 1$ в $\mathbb{F}_p[x]$. Значит, $x^{p^m} - x$ делит многочлен $x^q - x$ в $\mathbb{F}_p[x]$. Таким образом, каждый корень многочлена $x^{p^m} - x$ является корнем многочлена $x^q - x$ и, значит, принадлежит полю $\mathbb{F}_q$. Поэтому $\mathbb{F}_q$ должно содержать все корни многочлена $x^{p^m} - x$, а множество этих корней образует поле $\mathbb{F}_{p^m}$ порядка p^m.

Если бы поле $\mathbb{F}_q$ содержало два различных подполя порядка p^m, то эти подполя содержали бы в совокупности больше чем p^m корней многочлена $x^{p^m} - x$ в поле F_q, а это невозможно.

И так как $\mathbb{F}_q \supset L$, то по предложению 27.1 $q = p^n = (p^m)^d$, где $d = [\mathbb{F}_q : L]$. Следовательно, $d = \dfrac{n}{m}$. □

Пример 1. Подполя конечного поля $\mathbb{F}_{2^{30}}$ можно найти, составив список всех положительных делителей числа 30. Отношения включения между этими подполями указаны в следующей диаграмме.



Согласно теореме 27.3, эти отношения включения равносильны отношениям делимости соответствующих делителей числа 30.

Теорема 27.4. *Любое конечное поле* $\mathbb{F}_{p^n}$ *имеет в точности одно расширение* $L \supset \mathbb{F}_{p^n}$ *степени* $[L : \mathbb{F}_{p^n}] = m$ *для каждого* $m \geq 1$.

Доказательство. Докажем, что расширение L существует. Пусть $L = \mathbb{F}_{p^{nm}}$. По теореме 27.3 поле L содержит единственное подполе $\mathbb{F}_{p^n}$ и степень $[\mathbb{F}_{p^{nm}} : \mathbb{F}_{p^n}] = m$. Если L_1 — другое расширение со свойством $[L_1 : \mathbb{F}_{p^n}] = m$, то число элементов в L_1 по предложению 27.1 равно $(p^n)^m = p^{nm}$. В силу единственности поля из p^{nm} элементов, поля L и L_1 изоморфны. □

Замечание 1. Теорему 27.4 нельзя перенести на поля нулевой характеристики. Например, если p и q — различные простые числа, то поля $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ не изоморфны (см. упражнение 5 из § 26) и имеют степень два над $\mathbb{Q}$. Таким образом, $\mathbb{Q}$ имеет бесконечно много неизоморфных расширений степени 2.

Следующий результат устанавливает одно важное свойство мультипликативной группы конечного поля.

Теорема 27.5 (О конечной мультипликативной подгруппе в поле). *Пусть* K *— произвольное поле,* G *— конечная подгруппа в* K^*. *Тогда* G *— циклическая группа. В частности, группа* $\mathbb{F}_q^*$ *— циклическая.*

Доказательство. Пусть n — порядок группы G и $n = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ — каноническое разложение n на простые множители. По основной теореме о строении конечных абелевых групп G является прямым произведением p_i-примарных циклических групп. Объединяя в один множитель примарные циклические группы, соответствующие одному простому p, получим, что

$$G = H_1 \times \cdots \times H_s,$$

где $H_i = C_{p_i^{a_1}} \times \cdots \times C_{p_i^{a_{r_i}}}$ — прямое произведение циклических p_i-групп $C_{p_i^{a_m}}$ порядка $p_i^{a_m}$. Покажем, что все $r_i = 1$, $i = 1, \ldots, s$. Предположим противное: пусть некоторое $r_i > 1$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $p_i^{a_1} \geq p_i^{a_2} > 1$. Для любого элемента $a \in C_{p_i^{a_1}}$

по следствию из теоремы Лагранжа $a^{p_i^{a_1}} = 1$. Аналогично для любого элемента $b \in C_{p_i^{a_2}}$ имеем $b^{p_i^{a_2}} = 1$, откуда

$$b^{p_i^{a_1}} = (b^{p_i^{a_2}})^{p_i^{a_1-a_2}} = 1^{p_i^{a_1-a_2}} = 1.$$

Значит, все элементы групп $C_{p_i^{a_1}}$ и $C_{p_i^{a_2}}$ являются корнями многочлена $x^{p^{a_1}} - 1$. Но поскольку группа H_i — прямое произведение групп $C_{p_i^{a_m}}$, то $C_{p_i^{a_1}} \cap C_{p_i^{a_2}} = \{1\}$. Следовательно, суммарное количество элементов в этих двух группах равно

$$p_1^{a_1} + p_1^{a_2} - 1 > p_1^{a_1} = deg(x^{p^{a_1}} - 1).$$

Значит, многочлен $x^{p^{a_1}} - 1$ имеет в поле K корней больше, чем его степень, — противоречие.

Итак, $G = H_1 \times \cdots \times H_s$, где H_i — циклическая группа порядка $p_i^{m_i}$, $i = 1, \ldots, s$. По пункту 1 теоремы 9.5 циклическая группа $\mathbb{Z}_n$ изоморфна прямому произведению $H_1 \times \cdots \times H_s = G$. Значит, $G \simeq \mathbb{Z}_n$ и G — циклическая группа. $\square$

Определение 27.1. *Образующий элемент циклической группы $\mathbb{F}_q^*$ называется примитивным элементом поля $\mathbb{F}_q$.*

Из теоремы 27.5 следует, что поле $\mathbb{F}_q$ содержит $\varphi(q-1)$ примитивных элементов, где φ — функция Эйлера. Наличием в любом конечном поле примитивных элементов можно воспользоваться, например, для доказательства того факта, что каждое конечное поле является простым алгебраическим расширением своего простого подполя.

Теорема 27.6. *Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле и $\mathbb{F}_r \supset \mathbb{F}_q$. Тогда $\mathbb{F}_r = \mathbb{F}_q(a)$, где a — любой примитивный элемент поля $\mathbb{F}_r$.*

Доказательство. Поле $\mathbb{F}_q(a)$ содержит 0 и все степени элемента a, а значит, все элементы поля $\mathbb{F}_r$. Следовательно, $\mathbb{F}_q(a) = \mathbb{F}_r$. $\square$

Следствие 27.1. *Для каждого конечного поля $\mathbb{F}_q$ и каждого натурального числа n в кольце $\mathbb{F}_q[x]$ существует неприводимый многочлен степени n.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}_r$ — расширение поля $\mathbb{F}_q$ порядка q^n, так что $[\mathbb{F}_r : \mathbb{F}_q] = n$. Согласно теореме 27.6, существует такой элемент $a \in \mathbb{F}_r$, что $\mathbb{F}_r = \mathbb{F}_q(a)$. Тогда минимальный многочлен элемента a над $\mathbb{F}_q$ является неприводимым многочленом степени n в кольце $\mathbb{F}_q[x]$. $\square$

Упражнения

1. Доказать неприводимость над $\mathbb{F}_2$ многочлена $f(x) = x^3+x+1 \in$ $\in \mathbb{F}_2[x]$ и построить таблицы сложения и умножения для поля $\mathbb{F}_2(a)$, где a — корень многочлена f. Сколько элементов содержит поле $\mathbb{F}_2(a)$?

2. Доказать, что для каждого конечного поля, за исключением $\mathbb{F}_2$, сумма всех его элементов равна нулю.

3. Пусть a, b — элементы поля $\mathbb{F}_{2^n}$, где n — нечетно. Доказать, что из равенства $a^2 + ab + b^2 = 0$ вытекает $a = b = 0$.

4. Доказать, что отображение $f : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}$, $f(x) = x^p$, является автоморфизмом поля $\mathbb{F}_{p^n}$.

5. Пусть F — поле. Доказать, что если его мультипликативная группа F^* циклическая, то F — конечное поле.

6. Найти все примитивные элементы полей $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{17}$.

7. Доказать, что любой элемент поля $\mathbb{F}_{p^n}$ имеет в этом поле ровно один корень степени p.

8. Доказать, что для $f \in \mathbb{F}_q[x]$ верно равенство $(f(x))^q = f(x^q)$.

9. Доказать, что любой квадратный многочлен из $\mathbb{F}_q[x]$ разлагается над полем $\mathbb{F}_{q^2}$ на линейные множители.

10. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле характеристики p. Доказать, что многочлен $f \in \mathbb{F}_q[x]$ обладает свойством $f'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда f является p-й степенью некоторого многочлена из $\mathbb{F}_q[x]$.

11. Пусть F — некоторое поле и отображение $h : F \to F$ определяется условием $h(a) = a^{-1}$, если $a \neq 0$, и $h(0) = 0$. Доказать, что h является автоморфизмом поля F тогда и только тогда, когда F состоит не более чем из четырех элементов.

ЛИТЕРАТУРА

Атья, М. Введение в коммутативную алгебру / М. Атья, И. Макдональд. М., 1972.

Богопольский, О.В. Введение в теорию групп / О.В. Богопольский. М.-Ижевск, 2002.

Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. М., 1979.

Винберг, Э.Б. Курс алгебры / Э.Б. Винберг. М., 2001.

Зарисский, О. Коммутативная алгебра / О. Зарисский, П. Самюэль. М., 1963. Т.1.

Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. М., 1972.

Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры / А.И. Кострикин. М., 2000.

Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Ч.3. Основные структуры / А.И. Кострикин. М., 2001.

Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. М., 1968.

Ленг, С. Алгебра / С. Ленг. М., 1968.

Лидл, Р. Конечные поля / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. М., 1988.

Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск, 2001. Т.1.

Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев. М., 1984.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание
Беняш-Кривец Валерий Вацлавович
Мельников Олег Владимирович

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ: ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ
Учебное пособие для студентов математических специальностей

Редактор Е.А. Логвинович
Технический редактор Т.К. Романович
Корректор Т.С. Петроченко
Компьютерная верстка

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура "Computer Modern Roman". Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 6,6. Тираж 100 экз. Зак.

Белорусский государственный университет. ЛИ № 02230/0056804 от 02.03.2004. 220030, Минск, проспект независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика. Республиканское унитарное предприятие "Издательский центр Белорусского государственного университета". ЛП № 02330/0056850 от 30.04.2004 220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.