

# **СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ ПОРТФЕЛЬНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ**

**КАРАЧУН**

**Ирина Андреевна**

*БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ*

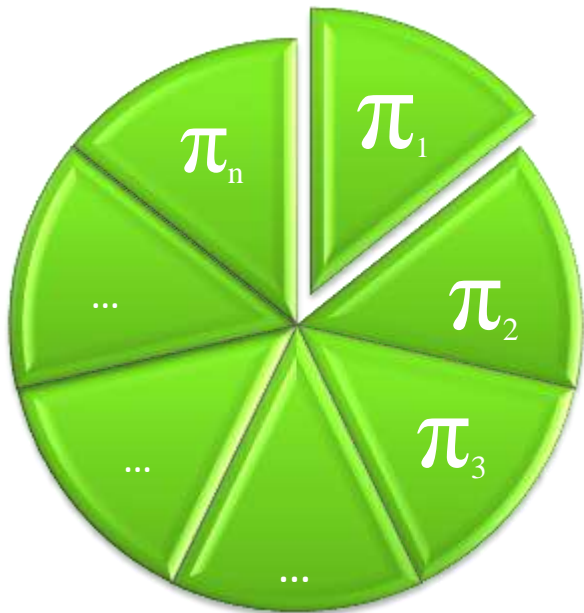
---

# Основные этапы процесса инвестирования в ценные бумаги



# Модель Марковица-Тобина

Г. Марковиц (1952) → эффективный / оптимальный портфель



Доли активов портфеля  
в капитале инвестора

Имеется:

- набор активов
- стартовый капитал
- инвестиционный горизонт

Задача (цель):

определить структуру портфеля так,  
чтобы получить  
**справедливую** (максимальную  
ожидаемую) доходность  
при **заданном** уровне  
риска

# Расчетно-логическая схема семантического алгоритма процесса оптимизации и управления портфелем ценных бумаг

I этап

Постановка задачи: выбор активов, инвестиционного горизонта, приемлемого уровня риска, оценка параметров на основе имеющихся данных

II этап

Выбор модели в зависимости от длины инвестиционного горизонта и типа входящих в портфель активов:

- портфель из акций
  - краткосрочный
  - среднесрочный
- смешанный портфель
  - краткосрочный
  - среднесрочный

III этап

Решение задачи оптимизации с заданными параметрами: нахождение оптимальной доли каждого актива в портфеле – оптимальной структуры

IV этап

Построение портфеля в соответствии с оптимальной структурой

Мониторинг: отслеживание изменений рыночной стоимости всех активов портфеля

Определение фактической структуры портфеля

Сравнение фактической структуры портфеля с оптимальной

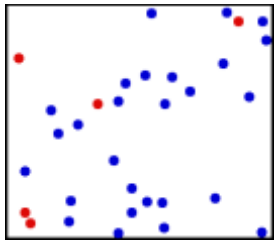
В случае совпадения портфель не изменяется

В случае несовпадения проводятся торговые операции по купле-продаже ценных бумаг для воссоздания оптимальной структуры портфеля

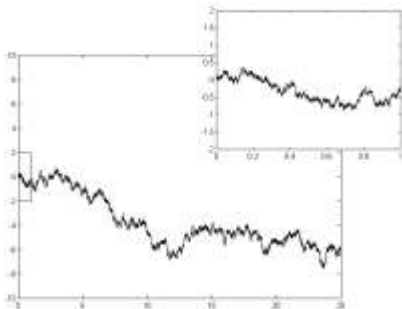
# Динамика доходности актива

- **Модель Марковица:**  $\frac{S(T)}{S(0)} = \mu_T$

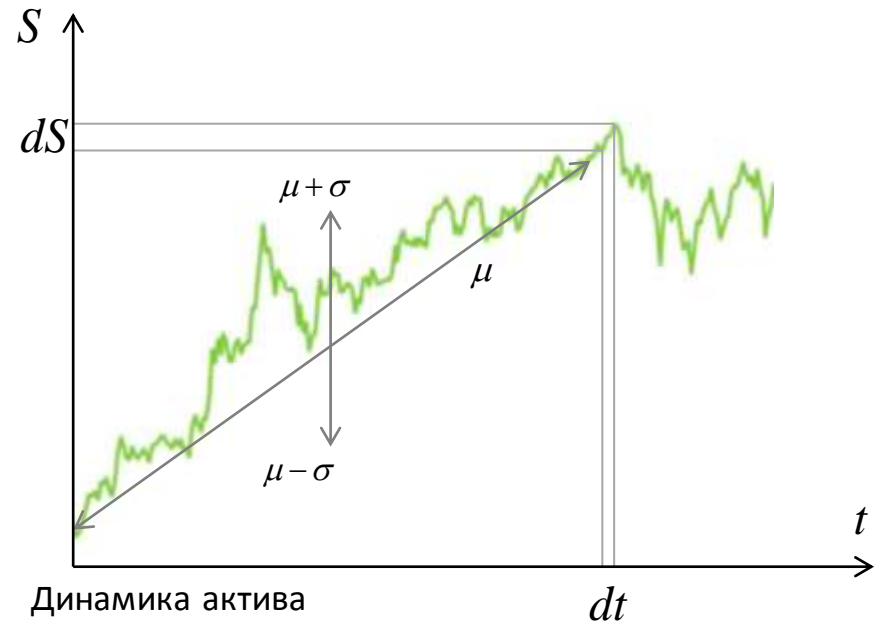
- **Модель Блека-Шоулза:**  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$



Броуновское движение



Винеровский процесс  $W$



Динамика актива

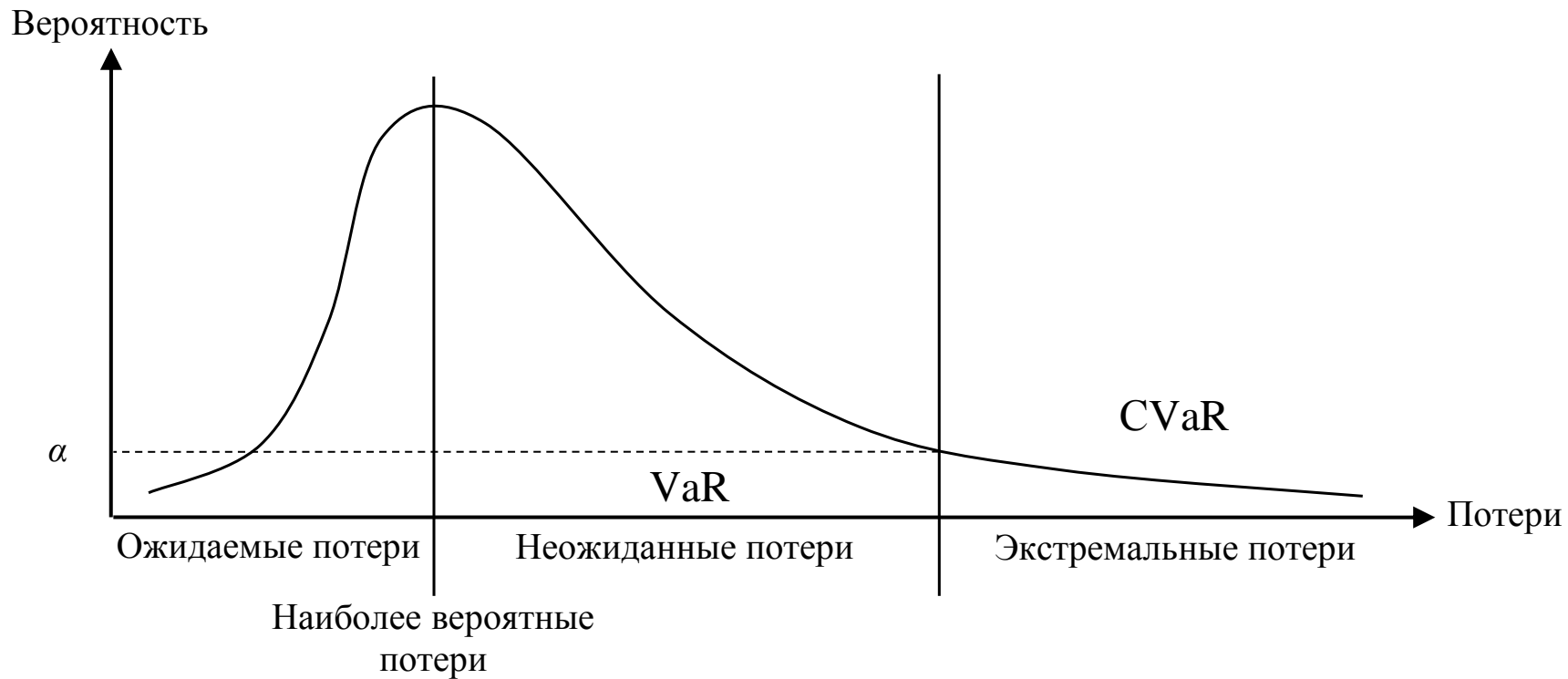
$$dW \in N(0,1) \Rightarrow \sigma dW \in [-\sigma, \sigma] \Rightarrow \frac{dS}{S} \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$$

# Меры риска

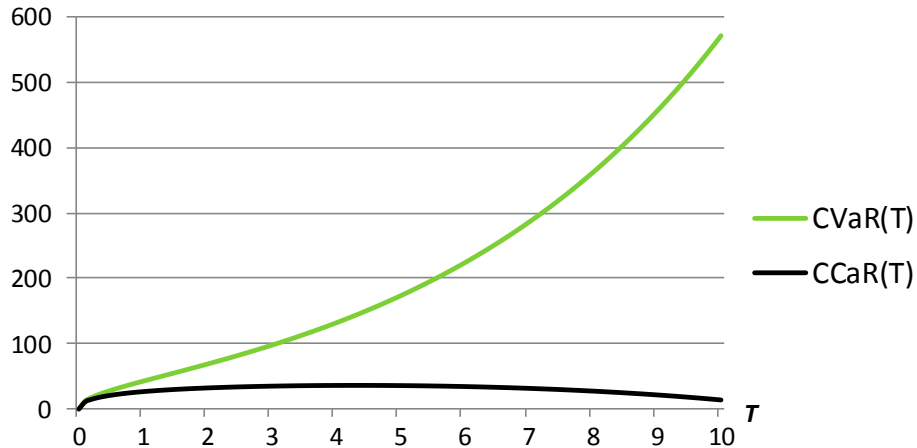
- Марковиц → вариация ( $\sigma^2$ )
- Risk Metrics / Basel II → Value-at-Risk и Expected Shortfall



# Методология VaR

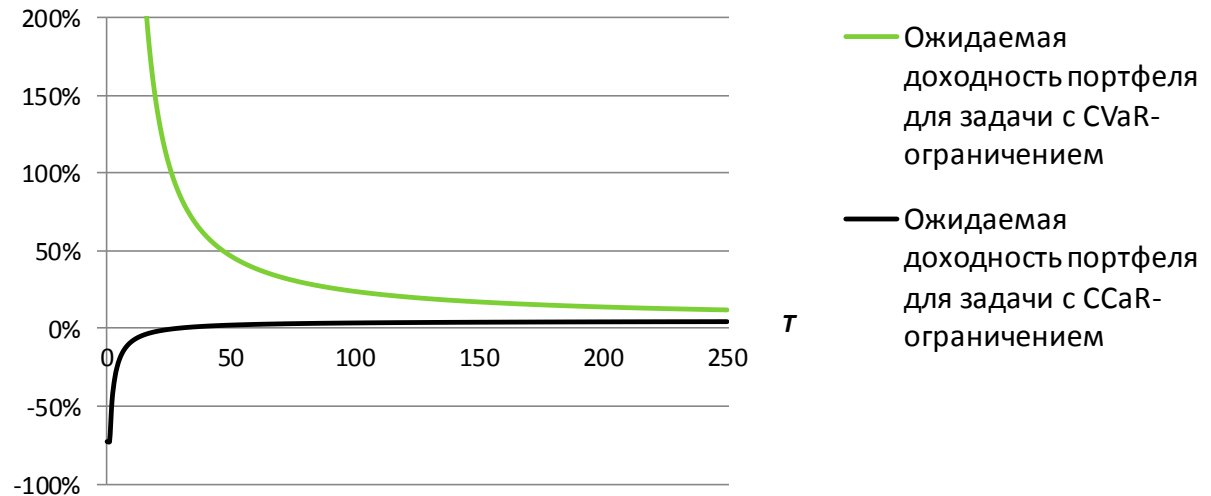


# Функциональные свойства мер риска CVaR и CCaR



Зависимость CVaR и CCaR будущей стоимости портфеля из одной акции стоимостью 100 д.е. от длины инвестиционного горизонта  $T$

Зависимость ожидаемой доходности портфеля от длины инвестиционного горизонта  $T$  для различных ограничений риска в задаче оптимизации





## Постановка задачи оптимизации:

- для инвестирования имеется денежная сумма  $x_0$ ;
- определен период инвестирования – инвестиционный горизонт  $T$ ;
- определен набор активов для формирования портфеля на период  $[0, T]$ ;
- имеются исторические данные о ценах активов –  $S^i(t)$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  
на основе которых оцениваются параметры:
  - безрисковая ставка  $r$ ;
  - ожидаемые логарифмические доходности акций  $\mu$ ;
  - их волатильности  $\sigma$ ;
  - ковариационная матрица  $\Sigma$  и корреляционная матрица  $\rho$ .
- риск портфеля измеряется показателем CCoR или CVaR;
- требуется получить максимальную стоимость портфеля  $X(T)$  в конце периода инвестирования;
- требуется ограничить риск портфеля в конце периода инвестирования уровнем  $C$ .
- требуется определить такую стратегию  $\pi = (\pi^0(t), \pi^1(t), \dots, \pi^m(t))'$ , чтобы получить максимальную ожидаемую стоимость портфеля  $X(T)$  в конце периода инвестирования.

# Стохастическая модель оптимизации портфеля

Динамика облигации:  $dS^0(t) = rS^0(t)dt$

Динамика акций:  $dS^i(t) = S^i(t) \left( \mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j(t) \right), \quad i = \overline{1, m}$

Стоимость портфеля:  $X(t) = \sum_{i=0}^m n^i(t) S^i(t)$

Доли активов

в стоимости портфеля:  $\pi^i(t) = \frac{n^i(t) S^i(t)}{X(t)}, \quad i = \overline{1, m}$

Динамика портфеля:  $dX(t) = \sum_{i=1}^m n^i(t) S^i(t) [\mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j(t)] + [X(t) - \sum_{i=1}^m n^i(t) S^i(t)] r dt,$

$n^i(t)$  – число единиц  $i$ -го актива;

$T$  – инвестиционный горизонт;

$x_0$  – стартовый капитал инвестора;

$\pi = (\pi^0(t), \pi^1(t), \dots, \pi^m(t))'$  – стратегия инвестора;

$\mu$  – ожидаемые логарифмические доходности акций;

$\sigma$  – их волатильности;

$r$  – безрисковая ставка.

$$X(0) = x_0$$

# Стохастическая модель оптимизации портфеля

$$X(t) = x_0 \exp \left\{ \left( \pi'(\mu - r\mathbf{1}) + r - \frac{1}{2} \|\pi'\sigma\|^2 \right) t + \pi'\sigma W(t) \right\}.$$

$$E[X(T)] = x_0 e^{(\pi'(\mu - r\mathbf{1}) + r)T}, \quad D[X(T)] = x_0^2 e^{(\pi'(\mu - r\mathbf{1}) + r)2T} (e^{\|\pi'\sigma\|^2 T} - 1).$$

$\alpha$ -квантиль нормально распределенной случайной величины  $Z$  равен  $E[Z] + k_\alpha \sqrt{D[Z]}$

где  $k_\alpha$  –  $\alpha$ -квантиль стандартного нормального распределения  $N(0,1)$ .

$$k_\alpha = \inf \{ x \mid P(X \leq x) = \alpha \}$$

$$k(X, \pi) = x_0 \exp \left\{ \left( \pi'(\mu - r\mathbf{1}) + r - \frac{\|\pi'\sigma\|^2}{2} \right) T + k_\alpha \|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \right\}$$

$$\text{CVaR}(\pi, T) = E[X(T)] - E^{sf}[X(T)] = x_0 e^{(\pi'(\mu - r\mathbf{1}) + r)T} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \Phi \left( k_\alpha - \|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \right) \right)$$

$$\text{CCaR}(\pi, T) = x_0 e^{rT} - E^{sf}[X(T)] = x_0 e^{rT} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} e^{\pi'(\mu - r\mathbf{1})T} \Phi \left( k_\alpha - \|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \right) \right)$$

$X(t)$  – стоимость портфеля;

$n^i(t)$  – число единиц  $i$ -го актива;

$T$  – инвестиционный горизонт;

$x_0$  – стартовый капитал инвестора;

$\pi = (\pi^0(t), \pi^1(t), \dots, \pi^m(t))'$  – стратегия инвестора;

$\mu$  – ожидаемые логарифмические доходности акций;

$\sigma$  – их волатильности;

$r$  – безрисковая ставка;

$C$  – допустимый размер потерь инвестора портфеля в конце периода инвестирования с вероятностью  $(1-\alpha)$ . 11

# Комплекс многопериодных стохастических моделей оптимизации портфеля первичных ценных бумаг

## Краткосрочная модель оптимизации портфеля с CVaR-ограничением

## Среднесрочная модель оптимизации портфеля с CCaR-ограничением

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X(T)] = x_0 e^{(\pi'(\mu-r\mathbf{1})+r)T} \rightarrow \max_{\pi \in \mathbb{R}^m}, \\ \text{CVaR}(\pi, T) = \\ = x_0 e^{(\pi'(\mu-r\mathbf{1})+r)T} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \Phi \left( k_\alpha - \|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \right) \right) \leq C, \\ X(0) = x_0, \\ X(t) \geq 0, \\ \alpha < 0.5, \\ \sum_{i=0}^m \pi^i(t) = 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X(T)] = x_0 e^{(\pi'(\mu-r\mathbf{1})+r)T} \rightarrow \max_{\pi \in \mathbb{R}^m}, \\ \text{CCaR}(\pi, T) = \\ = x_0 e^{rT} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} e^{\pi'(\mu-r\mathbf{1})T} \Phi \left( k_\alpha - \|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \right) \right) \leq C, \\ X(0) = x_0, \\ X(t) \geq 0, \\ \alpha < 0.5, \\ \sum_{i=0}^m \pi^i(t) = 1. \end{array} \right.$$

$X(t)$  – стоимость портфеля;

$T$  – инвестиционный горизонт;

$x_0$  – стартовый капитал инвестора;

$\pi = (\pi^0(t), \pi^1(t), \dots, \pi^m(t))'$  – стратегия инвестора;

$\mu$  – ожидаемые логарифмические доходности акций;

$\sigma$  – их волатильности;

$r$  – безрисковая ставка;

$C$  – допустимый размер потерь инвестора портфеля в конце периода инвестирования с вероятностью  $(1 - \alpha)$ .

# Комплекс многопериодных стохастических моделей оптимизации портфеля первичных ценных бумаг

## Модель оптимизации портфеля, содержащего деривативы (опционы)

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X(T)] \rightarrow \max_{\pi \in \mathbb{R}^m}, \\ \text{CVaR}(\pi, T) \leq C \quad \{\text{CCaR}(\pi, T) \leq C\}, \\ f^i(t, S^i(t)) = S^i(t)\Phi(d_1) - K^i e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \\ X(0) = x_0, \\ X(t) \geq 0, \\ \alpha < 0.5, \\ \sum_{i=0}^m \pi^i(t) = 1. \end{array} \right.$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S^i(t)}{K^i}\right) + (r + \frac{\sigma_i^2}{2})(T-t)}{\sigma_i \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{T-t}$$

$f(t, S^1(t), \dots, S^m(t))$  – стоимость дериватива;

$X(t)$  – стоимость портфеля;

$T$  – инвестиционный горизонт;

$x_0$  – стартовый капитал инвестора;

$\pi = (\pi^0(t), \pi^1(t), \dots, \pi^m(t))'$  – стратегия инвестора;

$\mu$  – ожидаемые логарифмические доходности акций;

$\sigma$  – их волатильности;

$r$  – безрисковая ставка;

$C$  – допустимый размер потерь инвестора портфеля в конце периода инвестирования с вероятностью  $(1-\alpha)$ .

# Реализация расчетно-логической схемы семантического алгоритма в виде программного модуля системы Mathematica

Тип портфеля	Портфель из акций				
Стартовый день	20 ноября 2009 г.				
Длина инвестиционного горизонта	10				
Уровень доверительной вероятности	0.05				
Безрисковая ставка	0.03				
Стартовый капитал	100 000				
Приемлемый уровень риска	0.01				
Длина временного ряда	280				
Набор активов		SBER03	URKA	MGNT	ROSN
	Облигация	Акция	Акция	Акция	Акция
Рыночная цена	987.	53.81	135.7	1785.	248.2
Оптимальный портфель (в долях)	0.8726	0.04408	-0.02847	0.08489	0.02685
Распределение капитала (в д.е.)	$8.726 \times 10^4$	4408.	-2847.	8489.	2685.
Стратегия (число лотов)	88	82	-21	5	11

# Реализация расчетно-логической схемы семантического алгоритма в виде программного модуля системы Mathematica

Тип портфеля	Смешанный портфель				
Стартовый день	20 ноября 2009 г.				
Длина инвестиционного горизонта	10				
Уровень доверительной вероятности	0.05				
Безрисковая ставка	0.03				
Стартовый капитал	100 000				
Приемлемый уровень риска	0.01				
Длина временного ряда	280				
Набор активов	Облигация	Колл-опцион	Акция	Акция	Пут-опцион
		СBER03	URKA	MGNT	ROSN
Цена исполнения опциона		55			250
Рыночная цена	987.	53.81	135.7	1785.	248.2
Оптимальный портфель (в долях)	0.9415	0.005548	-0.02847	0.08489	-0.003445
Распределение капитала (в д.е.)	94 150.	554.8	-2847.	8489.	-344.5
Стратегия (число лотов)	95	10	-21	5	-1

## Результаты применения методики управления портфелем на прошлых данных с различными длинами временных рядов



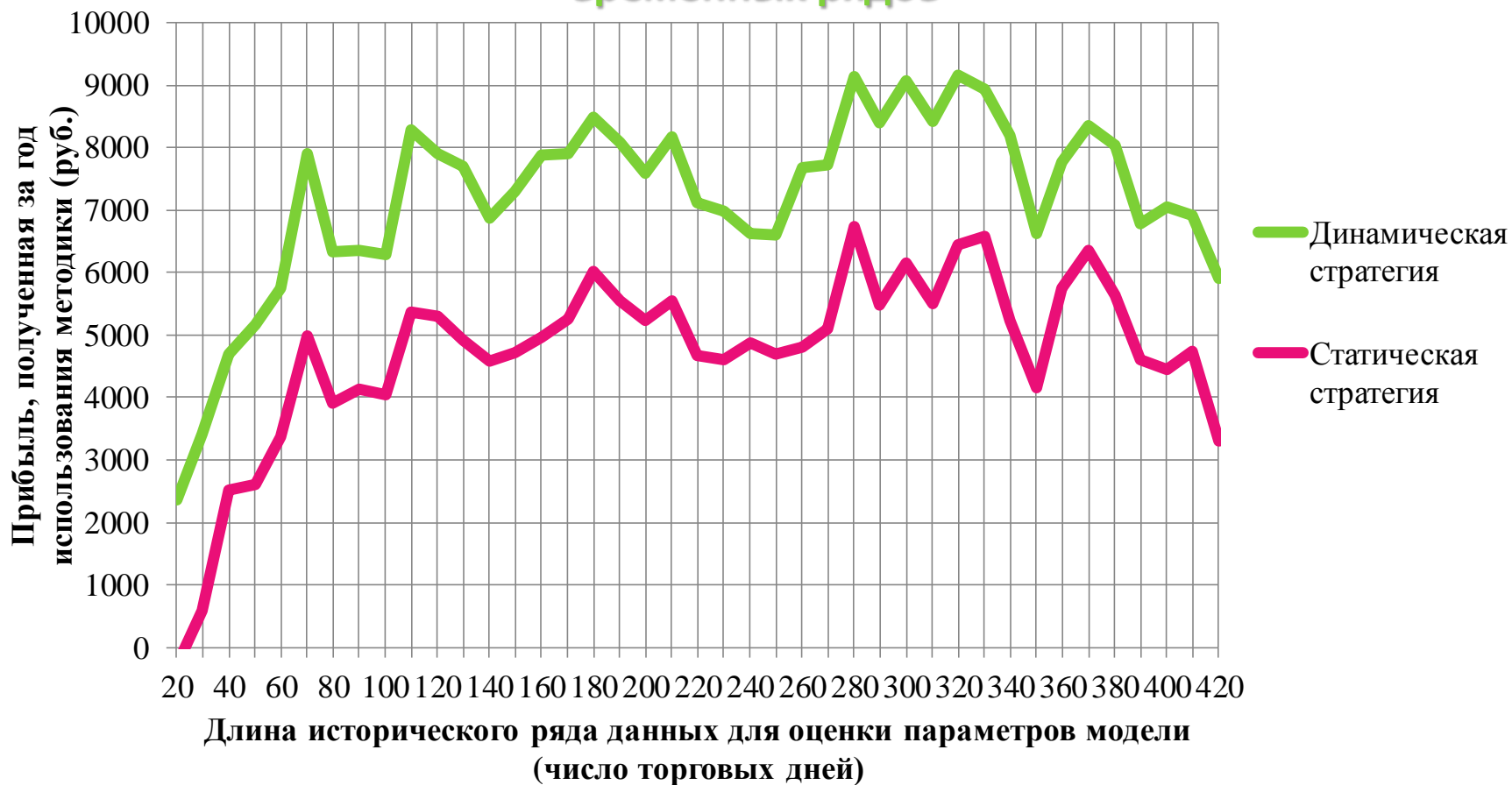
Максимальная прибыль (7 760.57 руб.) получена при значении длины рядов, равном 326 торговых дней.

Анализ тех периодов, когда использование модели давало отрицательные результаты, показал, что средний убыток составил 236.34 руб., минимальный убыток – 1.46 руб., максимальный убыток – 1 347.25 руб., количество случаев превышения убытком 1 000 руб. – 3.

Ограничение уровня потерь 1 000 руб. в реальности было выполнено в 5 409 случаях из 5 412.



## Результаты применения методики управления портфелем на прошлых данных с различными длинами временных рядов



Максимальная прибыль (7 760.57 руб.) получена при значении длины рядов, равном 326 торговых дней.

Анализ тех периодов, когда использование модели давало отрицательные результаты, показал, что средний убыток составил 236.34 руб., минимальный убыток – 1.46 руб., максимальный убыток – 1 347.25 руб., количество случаев превышения убытком 1 000 руб. – 3.

Ограничение уровня потерь 1 000 руб. в реальности было выполнено в 5 409 случаях из 5 412.

# Портфель из акций

## I этап : Постановка задачи

- Стартовая стоимость портфеля 20 ноября 2009 г.  $x = 100\ 000$  росс. руб.,
- Инвестиционный горизонт  $T = 10$  торговых дней.
- Выбраны активы :
  - ✓ ОФЗ 25059 –  $i = 0$ ,
  - ✓ Акция АК «Сбербанк России» (SBER03) –  $i = 1$ ,
  - ✓ Акция ОАО «Уралкалий» (URKA) –  $i = 2$ ,
  - ✓ Акция ОАО «Магнит» (MGNT) –  $i = 3$ ,
  - ✓ Акция ОАО «НК Роснефть» (ROSN) –  $i = 4$ ,
  - ✓ Акция ОАО «Банк ВТБ» (VTBR) –  $i = 5$ .
- Риск портфеля ограничен уровнем  $C = 1\ 000$  руб. при  $\alpha = 0.05$

	Актив	Ожидаемая доходность ( $\mu_i$ )	Среднеквадратическое отклонение доходности ( $\sigma_i$ )
0	Облигация	0.0482	0
1	SBER03	1.564182	0.755822
2	URKA	1.321641	0.913228
3	MGNT	1.737222	0.468673
4	ROSN	1.042817	0.629891
5	VTBR	0.681004	0.69067

### Оценка параметров активов

	Корреляция доходностей ( $\rho_{ij}$ )	Ковариация доходностей ( $\Sigma_{ij}$ )
1–2	0.408629	0.282051
1–3	0.169222	0.059944
1–4	0.642886	0.306068
1–5	0.703038	0.367003
2–3	0.256834	0.109926
2–4	0.573194	0.329721
2–5	0.500583	0.315737
3–4	0.226952	0.066999
3–5	0.261102	0.084518
4–5	0.710718	0.309196

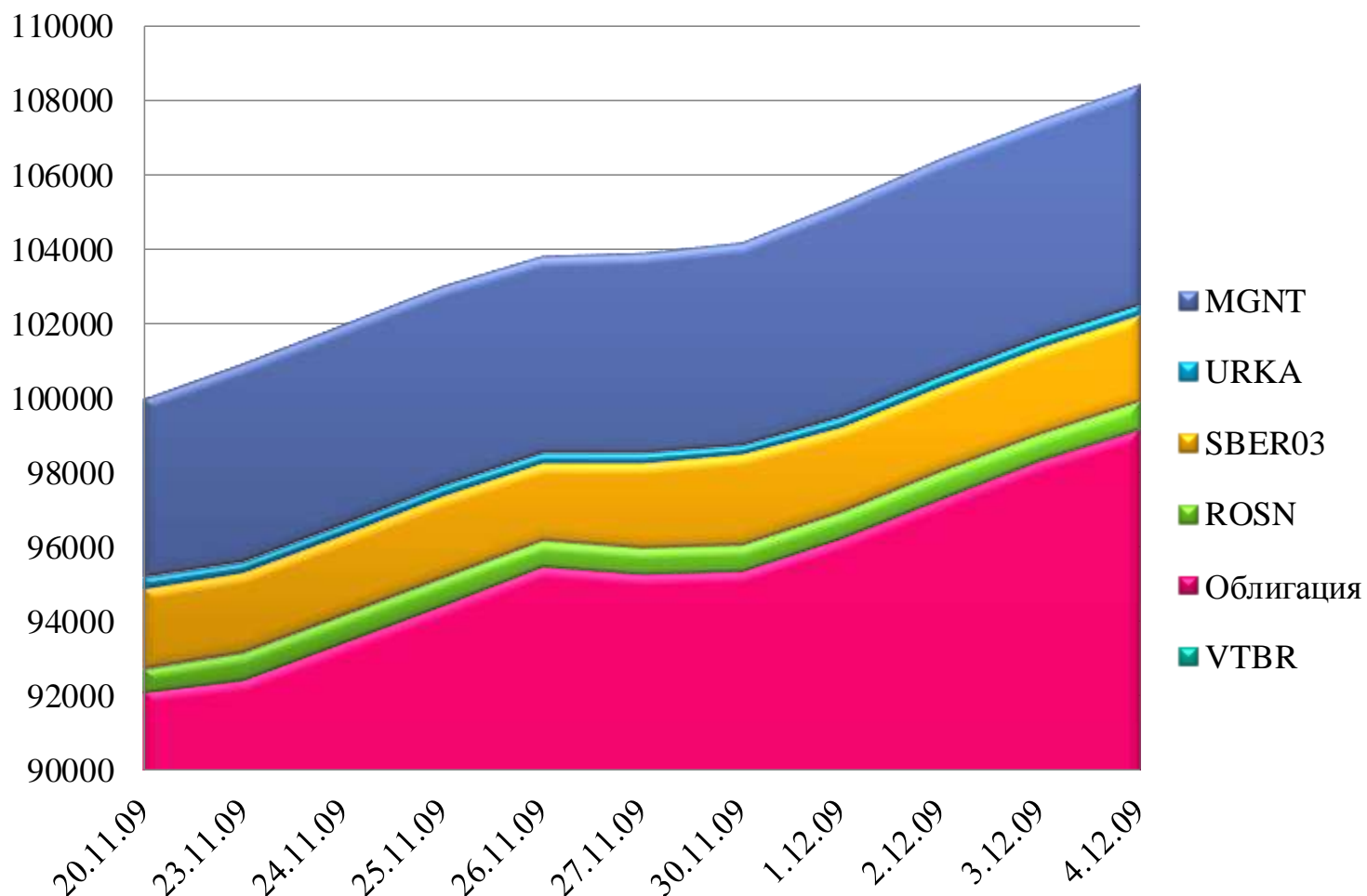
## II этап: Выбор модели

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X(T)] = x_0 e^{(\pi'(\mu-r\mathbf{1})+r)T} \rightarrow \max_{\pi \in \mathbb{R}^m} \\ \text{CVaR}(\pi, T) = x_0 e^{(\pi'(\mu-r\mathbf{1})+r)T} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \Phi \left( k_\alpha - \|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \right) \right) \leq C \\ X(0) = x_0, X(t) \geq 0, \alpha < 0.5, \sum_{i=0}^m \pi^i = 1 \end{array} \right.$$

## III этап: Решение задачи

Тип портфеля	Портфель из акций					
Стартовый день	20 November 2009 ▾					
Длина инвестиционного горизонта	10					
Уровень доверительной вероятности	0.05					
Безрисковая ставка	0.0482					
Стартовый капитал	100000					
Приемлемый уровень риска	0.01					
Длина временного ряда	250					
Набор активов		SBER03 ▾	URKA ▾	MGNT ▾	ROSN ▾	VTBR ▾
	Облигация	Акция	Акция	Акция	Акция	Акция
Рыночная цена	987.	53.9	137.18	1770.	258.	64.4
Оптимальный портфель (в долях)	0.943829	0.0215379	0.00309805	0.0477864	0.00656202	-0.0228132
Стартовая стратегия (в единицах)	96	41	2	3	3	-36

## IV этап: Поддержание оптимальной структуры



## IV этап: Поддержание оптимальной структуры

Стратегия инвестора на протяжении периода  $T$

	Число лотов (шт.)						Стоимость портфеля (руб.)	Транзакционные издержки (руб.)
	Облигация	SBER03	URKA	MGNT	ROSN	VTBR		
20.11.09	96	40	2	3	3	-36	100 000	3.400001
23.11.09	97	40	2	3	3	-36	100 945	0.033558
24.11.09	98	41	2	3	3	-36	101 980	0.035389
25.11.09	99	41	2	3	3	-37	103 027	0.035724
26.11.09	99	44	2	3	3	-39	103 821	0.009321
27.11.09	99	43	2	3	3	-38	103 908	0.003882
30.11.09	100	40	2	3	3	-38	104 172	0.039321
1.12.09	101	40	2	3	3	-37	105 268	0.035771
2.12.09	102	40	2	3	3	-37	106 440	0.033558
3.12.09	103	40	2	3	3	-38	107 451	0.035737
4.12.09	104	40	2	3	3	-37	108 424	0.035816

Транзакционные издержки при торговле на ММВБ составляют 0.0034% от суммы сделки

### Результат применения модели:

- стоимость портфеля выросла со 100 000 до 108 424 рос. руб. за 10 торговых дней
- доходность - около 8% за 10 торговых дней

# Портфель с опционами

## I этап : Постановка задачи

- Стартовая стоимость портфеля 20 ноября 2009 г.  
 $x = 100\,000$  росс. руб.,
- Инвестиционный горизонт  $T = 10$  торговых дней.
- Выбраны активы :
  - ✓ ОФЗ 25059 –  $i = 0$ ,
  - Колл-опционы на одну акцию:
    - ✓ SBER03 с ценой исполнения  $K = 55$  руб. –  $i = 1$ ,
    - ✓ URKA с ценой исполнения  $K = 140$  руб. –  $i = 2$ ,
    - ✓ MGNT с ценой исполнения  $K = 1800$  руб. –  $i = 3$ ,
    - ✓ ROSN с ценой исполнения  $K = 250$  руб. –  $i = 4$ ,
    - ✓ VTBR с ценой исполнения  $K = 65$  руб. –  $i = 5$ .
- Риск портфеля ограничен уровнем  $C = 10\,000$  руб.,  $\alpha = 0.05$

Текущие рыночные цены базовых активов				
SBER03	URKA	MGNT	ROSN	VTBR
53.81	135.7	1785	248.21	63.4

## II этап: Выбор модели

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X(T)] \rightarrow \max_{\tilde{\pi} \in \mathbb{R}^m} \\ \text{CVaR}(\tilde{\pi}, T) \leq C \\ X(0) = x_0, X(t) \geq 0, \alpha < 0.5, \sum_{i=0}^m \tilde{\pi}^i = 1 \end{array} \right.$$

## III этап: Решение задачи

Общий вид решения:

$$\tilde{\pi}^i(t) = \frac{\pi_b^i f^i(t, S^i)}{f_{S^i}^i(t, S^i) S^i(t)}$$

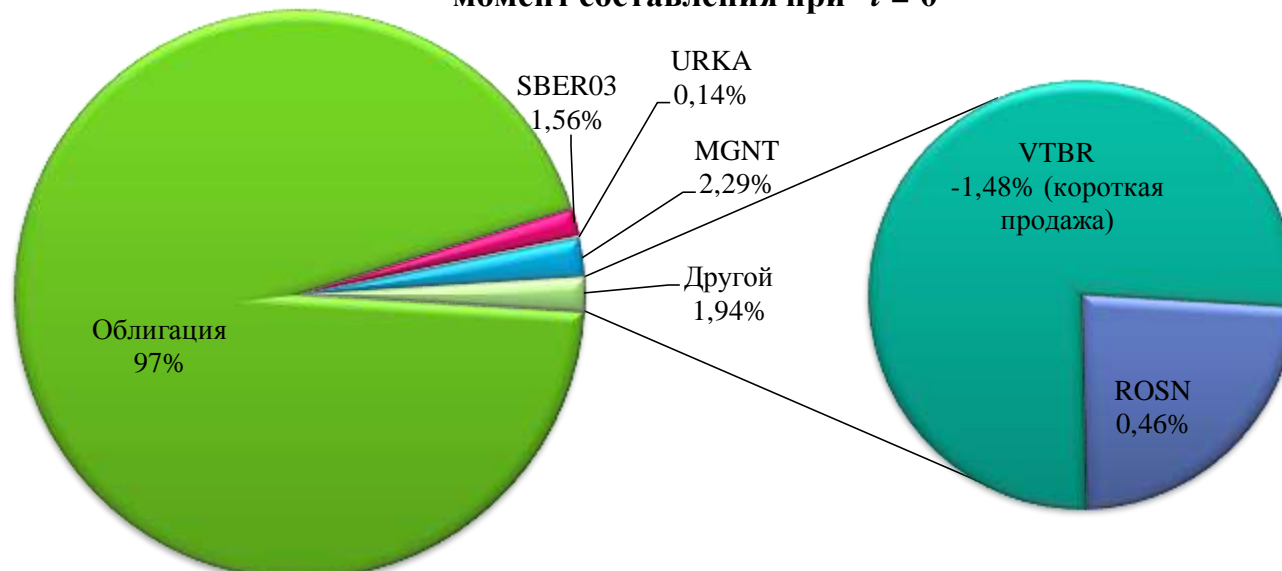
Для определения этой стратегии достаточно знать функцию стоимости опциона и решить задачу оптимизации портфеля из акций:

$$\pi_b = \tilde{b} \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})}{\sqrt{T(\mu - r\mathbf{1})' \sigma \rho^{-1} \sigma' (\mu - r\mathbf{1})}}$$

где

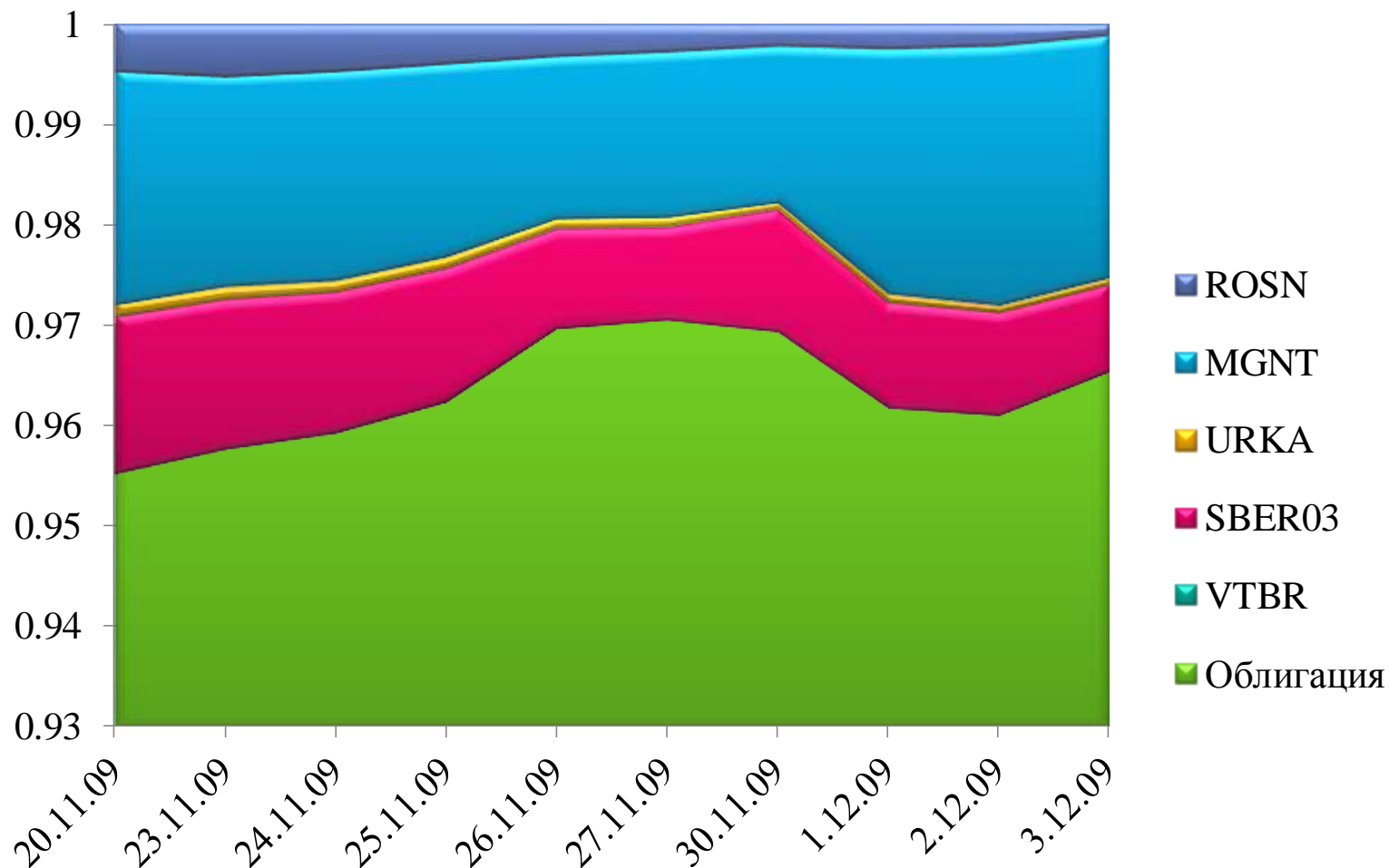
$$\tilde{b} \sqrt{T(\mu - r\mathbf{1})' \sigma \rho^{-1} \sigma' (\mu - r\mathbf{1})} = \ln \left( \frac{C}{x_0 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \Phi(k_\alpha - \tilde{b} \sqrt{T}) \right)} \right) - rT$$

**Оптимальная структура портфеля из опционов для заданных параметров в момент составления при  $t = 0$**



## IV этап: Поддержание оптимальной структуры

Динамика изменения оптимальной структуры портфеля, содержащего опционы





## Действия инвестора в конце инвестиционного горизонта

Актив	Цена исполнения	Рыночная цена базового актива	Число единиц	Операция
0	–	987	137	$987 * 137 = 135\,219$
1	55	58.25	467	Исполнение опциона: покупка 467 акций по цене 55 руб.; последующая перепродажа их на рынке по цене 58.25 руб. $(58.25 - 55) * 467 = 1\,517.75$
2	140	144.33	17	Исполнение опциона: покупка 17 акций по цене 140 руб.; последующая перепродажа их на рынке по цене 144.33 руб. $(144.33 - 140) * 17 = 73.61$
3	1800	1970	24	Исполнение опциона: покупка 24 акций по цене 1800 руб.; последующая перепродажа их на рынке по цене 1970 руб. $(1970 - 1800) * 24 = 4\,080$
4	250	252.39	58	Исполнение опциона: покупка 58 акций по цене 250 руб.; последующая перепродажа их на рынке по цене 252.39 руб. $(252.39 - 250) * 58 = 138.62$
5	65	66.4	0	Никаких операций, так как на протяжении всего периода осуществлялась короткая продажа этого опциона и к настоящему моменту все расчеты по задолженности произведены.
Итого				145 365

Результат применения модели:

стоимость портфеля выросла со 100 000 до 145 365 руб.

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ**

