

УДК 620.22:51-07(075.8)
ББК 30.3в6я73
Д79

Рецензенты:
член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор *Л. А. Янович*;
доктор физико-математических наук, профессор *М. А. Журавков*

Дубатовская, М. В.
Д79 Аналитические методы в теории композиционных материалов : учеб.-метод. пособие / М. В. Дубатовская, С. В. Рогозин, С. Ф. Лебедь. – Минск : БГУ, 2009. – 152 с.
ISBN 978-985-518-158-4.

В пособии впервые системно изложены основные принципы построения современных математических моделей композиционных материалов и аналитические методы их исследования.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей вузов. Будет полезно магистрантам, аспирантам и специалистам, интересующимся современными методами и результатами в теории композиционных материалов.

УДК 620.22:51-07(075.8)
ББК 30.3в6я73

ISBN 978-985-518-158-4

© Дубатовская М. В.,
Рогозин С. В., Лебедь С. Ф., 2009
© БГУ, 2009

ОТ АВТОРОВ

Теория композиционных материалов представляет собой многоплановое направление. В ней применяются методы чистой и прикладной математики и механики, физики, химии, биологии и др. Имеется немалое количество научных публикаций, посвященных этой тематике. Однако их изучение представляет значительную трудность для неподготовленного читателя. В связи с этим возникла необходимость в учебной литературе, которая могла бы стать базовой для обеспечения специализации студентов в области приложения методов математического анализа к изучению моделей естествознания и техники. Именно с этой целью создано настоящее пособие.

В современной науке теорию композиционных материалов рассматривают как раздел физики твердого тела, хотя аналогичными свойствами обладают и другие субстанции (так называемые гетерогенные среды). В науке и технике под композиционными материалами понимаются объекты, для которых общим является то, что они состоят из нескольких компонентов, обладающих различными свойствами (однородными в каждом фиксированном компоненте). Объединяя эти компоненты в единое целое, получают новый материал – *композит* (или *композиционный материал*).

С XIX в. известны две основные глобальные модели в теории твердого тела: молекулярный подход Л. Навье и континуальный подход О. Коши. Первая модель основана на теории взаимодействия элементарных частиц. Ее развитие привело в последние годы к созданию наноструктур и нанотехнологий (и соответственно к использованию нанометодов в теории композиционных материалов). Вторая модель реализована в форме понятия сплошной среды. В этом случае предполагается, что каждый компонент обладает *однородностью* по отношению к одному или нескольким свойствам (т. е. в каждом компоненте имеется одинаковое «количество» свойства / свойств в одинаковых объемах). В рамках континуальной модели под композиционным материалом понимается многофазовая структура, характеризующаяся относительной однородностью каждой из ее частей.

Один из компонентов, занимающий некоторую связную часть пространства, называют *матрицей*, другие компоненты (*включения*) вложе-

ны в матрицу и занимают в ней ограниченный объем. Важно при этом отметить, что, объединяя вещества с заранее определенными свойствами, можно получить материал, имеющий свойства, не совпадающие с соответствующими параметрами компонентов.

Следует заметить, что материал данной книги относится *в основном к области математики*, хотя здесь используются многие понятия механики и физики. Наконец, важно также подчеркнуть, что в рамках данного пособия обсуждаются *только аналитические методы и результаты*. На их базе можно развивать численные методы анализа, строить новые и уточнять существующие модели композиционных материалов. Основное внимание в пособии уделено *комплексно-аналитическим методам* для двумерных композиционных материалов. Тем не менее ряд вспомогательных результатов, а также формулировок законов и понятий приводится в трехмерном варианте.

Пособие состоит из 7 глав. Сведения из теории поля, включая основные интегральные соотношения и понятия тензорной алгебры, изложены в гл. 1.

Общие понятия теории композиционных материалов, классификация и примеры композитов, описание физических полей представлены в гл. 2. Даны постановки наиболее характерных математических задач, и введено центральное понятие теории композиционных материалов – понятие эффективных характеристик.

Описание математических моделей, данное в форме уравнений состояния, содержится в гл. 3. Кроме того, изложены краевые условия, описывающие взаимодействия между компонентами композитов.

В гл. 4 рассматриваются элементы теории аналитических и гармонических функций, конформных отображений, включая их граничные свойства.

Постановки некоторых основных краевых задач для гармонических и аналитических функций, методы их решения и аналитические формулы решения даны в гл. 5. Основное внимание уделяется задачам для многосвязных областей. Здесь же излагаются основы метода функциональных уравнений, который в настоящее время применяется (наряду с другими методами) при исследовании общих краевых задач для многосвязных областей.

В гл. 6 приведены некоторые базовые понятия одного из современных методов исследования композиционных материалов с богатой микроструктурой – метода гомогенизации.

Развитию аналитических методов для материалов с периодической структурой посвящена гл. 7. В частности, на примере таких материалов дано описание специфики применения метода гомогенизации.

Данное издание подготовлено при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Глава 1

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Элементы теории поля

Определение 1.1. Если в каждой точке части пространства (области) определено значение некоторой величины, то говорят, что задано *поле* данной величины. Если каждой точке M области соответствует определенное число $U = U(M)$, говорят, что в области определено (задано) *скалярное поле* (или функция точки). Другими словами, скалярное поле – это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения. Если же каждой точке M области соответствует некоторый вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, то говорят, что задано *векторное поле* (или векторная функция точки).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры (воздуха, тела и т. п.), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха и т. п.), электрического потенциала и т. д.

Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле электрического тока и т. д.

В общем случае и скалярное и векторное поле может меняться с течением времени (например, скалярное поле температуры при охлаждении тела). Такие поля называются *нестационарными* (или *неустановившимися*). Если поле не зависит от времени, то оно называется *стационарным* (или *установившимся*).

Если V – область трехмерного пространства, то скалярное поле U , определенное в этой области, можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M), т. е. $U = U(x, y, z)$ (наряду с обозначениями $U = U(M)$, $U = U(x, y, z)$ используют также запись $U = U(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки M).

Аналогично вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов x, y, z , т. е. $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ (или $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$).

Вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ можно разложить по ортам координатных осей следующим образом:

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – проекции вектора $\mathbf{a}(M)$ на оси координат.

Скалярное поле называется *плоским*, если во всех плоскостях, параллельных некоторой плоскости, поле одно и то же, т. е. функция $U(x, y, z)$ постоянна на любой фиксированной прямой, ортогональной указанной плоскости.

Векторное поле называется *плоским* (или *плоско-параллельным*), если все векторы $\mathbf{a}$ параллельны одной и той же плоскости S , причем во всех точках, расположенных на каждой фиксированной прямой, перпендикулярной S , векторы поля одинаковы по величине и направлению. Если указанную плоскость S (или любую ей параллельную) принять за плоскость xOy , то векторы плоского поля не будут содержать третьей компоненты (соответствующей оси Oz) и координаты векторов не будут зависеть от координаты z :

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}.$$

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $U = U(x, y, z)$. Для наглядного представления скалярного поля используют поверхности и линии уровня. *Поверхностью уровня* скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(x, y, z)$ принимает постоянное значение, т. е. $U(x, y, z) = c = \text{const}$. Если поле плоское, то, осуществив некоторое линейное преобразование координат, можно считать, что поле U не зависит от z . Тогда равенство $U(x, y) = c = \text{const}$ определяет *линию уровня* поля, т. е. линия уровня – это линия на плоскости xOy , на которой функция $U(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

Пусть скалярное поле представляется гладкой (непрерывно дифференцируемой) функцией $U = U(x, y, z)$. *Производной скалярного поля U по направлению вектора $\mathbf{l}$ единичной длины ($|\mathbf{l}| = 1$) в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ называется*

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{l}} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{U(M_0 + h\mathbf{l}) - U(M_0)}{h}.$$

Производная по направлению выражается через частные производные функции $U(x, y, z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы (координаты) вектора $\mathbf{l}$.

Градиентом скалярного поля $U(x, y, z)$ в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ называется вектор, координатами которого являются значения частных производных функции U в точке M_0 , он обозначается

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} U(M_0) &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}(M_0), \frac{\partial U}{\partial y}(M_0), \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) \right) = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Отметим, что $\mathbf{grad} U$ есть векторная величина. Говорят, что скалярное поле U порождает векторное поле градиента функции U . Производная скалярного поля U по направлению вектора $\mathbf{l}$ равна скалярному произведению градиента поля на вектор $\mathbf{l}$:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{l}} = \mathbf{grad} U \cdot \mathbf{l}.$$

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$. Векторной линией поля $\mathbf{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\mathbf{a}(M)$. Если провести все векторные линии, проходящие через точки некоторого куска поверхности S , то их совокупность образует так называемую *векторную трубку*.

Пусть векторное поле определяется вектор-функцией $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывные функции переменных x, y, z , имеющие ограниченные частные производные первого порядка. Пусть $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ – радиус-вектор текущей точки векторной линии поля $\mathbf{a}$, тогда вектор $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ направлен по касательной к ней. Значит, и вектор

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt = (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt) = (dx, dy, dz)$$

также направлен по касательной к векторной линии. Следовательно, векторы $\mathbf{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ и $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ коллинеарны, а значит, их координаты пропорциональны. Отсюда получаем *систему дифференциальных уравнений векторных линий*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Пусть векторное поле определяется гладкой (непрерывно дифференцируемой) вектор-функцией $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Тогда

дифференцирование этого поля сводится к дифференцированию координатных функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Роль градиента в этом случае играет *матрица Якоби* векторного поля $\mathbf{a}$:

$$J_{\mathbf{a}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

В частности, производная векторного поля $\mathbf{a}$ по направлению вектора $\mathbf{l}$ равна произведению матрицы Якоби на вектор-столбец $\mathbf{l}^T$: $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{l}}(M) = J_{\mathbf{a}}(M) \mathbf{l}^T$.

Напомним некоторые определения из векторного анализа, считая, что соответствующие объекты (функции, вектор-функции, поверхности, кривые) обладают свойствами, при которых вводимые величины определены.

Определение 1.2. Пусть векторное поле $\mathbf{a}$ определено в области D , и пусть в D задана ориентированная поверхность S , ориентация которой определяется единичным вектором нормали $\mathbf{n}$. *Потоком* Π векторного поля (в направлении вектора $\mathbf{n}$) через поверхность S называется поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности S от скалярного произведения вектор-функции $\mathbf{a}$ на вектор нормали $\mathbf{n}$, т. е.

$$\Pi = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{a}_{\mathbf{n}} dS. \quad (1.1)$$

В случае стационарного плоско-параллельного векторного поля $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ формула *потока векторного поля $\mathbf{a}$ через кривую L* (в направлении нормали к этой кривой $\mathbf{n}$) имеет вид:

$$\Pi = \int_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} ds = \int_L \mathbf{a}_{\mathbf{n}} ds = \int_L -Qdx + Pdy. \quad (1.2)$$

Определение 1.3. *Дивергенцией* (или *расходимостью*) в точке M непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}$, задаваемого вектор-функцией $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, называется скалярная величина

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (1.3)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор формального дифференцирования.

Используя понятия потока и дивергенции векторного поля, запишем известную в анализе формулу Гаусса – Остроградского в векторной форме:

$$\iint_S \mathbf{a}_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv, \quad (1.4)$$

где S – замкнутая поверхность, ограничивающая область V .

Замечание. Из формулы Гаусса – Остроградского вытекает следующее *локальное* определение дивергенции векторного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{(V_1) \rightarrow M} \frac{\iint_{S_1} \mathbf{a}_n dS}{V_1}, \quad (1.5)$$

где область (V_1) стягивается в точку, а V_1 – объем этой области. Другими словами, дивергенция в точке M равна пределу отношения потока через малую замкнутую поверхность, окружающую эту точку, к объему, ограничивающему эту поверхность.

В случае плоско-параллельного векторного поля поток и дивергенцию связывает формула Грина

$$\int_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dxdy, \quad (1.6)$$

где L – замкнутая кривая, ограничивающая область D .

В терминах векторного поля потока тепла при $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) > 0$ точка M представляет собой источник, излучающий тепло, а при $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) < 0$ точка M есть сток, поглощающий тепло. Из равенства (1.4) (или (1.6)) следует, что величина $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ характеризует *мощность (интенсивность)* источника или стока в точке M . Если в объеме V (области D), ограниченном замкнутой поверхностью S (замкнутой кривой L), нет ни источников, ни стоков, то $\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0$ в V (в D соответственно).

Определение 1.4. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\mathbf{a}$ на вектор $d\mathbf{r}$, касательный к контуру L , называется *циркуляцией* вектора $\mathbf{a}$ вдоль контура L :

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L \mathbf{a}_\tau \cdot d\mathbf{l} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \quad (1.7)$$

где $\mathbf{a}_\tau$ – величина проекции вектора $\mathbf{a}$ на касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$, проведенный в направлении обхода кривой L .

В случае плоско-параллельного потока формула для вычисления циркуляции вектора $\mathbf{a}$ вдоль плоской замкнутой кривой L имеет вид

$$C = \oint_L P dx + Q dy = \operatorname{Re} \left(\oint_L \mathbf{a} d\bar{z} \right), \quad (1.8)$$

где $\mathbf{a} = P + iQ$, $z = x + iy$.

Определение 1.5. Ротором (или вихрем) в точке M непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}$, задаваемого вектор-функцией $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, называется вектор, определяемый формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a}(M) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{a} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В случае плоско-параллельного векторного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

В терминах ротора и циркуляции классическая формула Стокса записывается в виде

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.10)$$

где S – некоторая поверхность с краем в области определения поля, а L – край этой поверхности. Из формулы (1.10) вытекает следующее *локальное* определение ротора (через его проекцию на направление $\mathbf{m}$):

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{m}} \mathbf{a}(M) = \lim_{(\sigma) \rightarrow M} \frac{\oint_{\lambda} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{\sigma}, \quad (1.11)$$

где (σ) – некоторая поверхность с краем λ , проходящая через точку M и ортогональная в этой точке направлению $\mathbf{m}$, а σ – ее площадь.

1.2. Соленоидальные и потенциальные поля

Определение 1.6. Векторное поле $\mathbf{a}$ называется *соленоидальным* или *трубчатым* в области D , если во всех точках этой области его дивергенция равна нулю, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$, $\forall M \in D$. Таким образом, соленоидальное поле не имеет источников и стоков.

Свойства соленоидального поля:

1) в соленоидальном поле $\mathbf{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю;

2) соленоидальное поле является полем ротора (вихря) некоторого векторного поля, т. е. если $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, то существует такое поле $\mathbf{b}$, что $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$;

3) в соленоидальном поле $\mathbf{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение, называемое интенсивностью трубки.

Определение 1.7. Векторное поле $\mathbf{a}$ называется *потенциальным* (безвихревым) в области D , если во всех точках этой области ротор равен нулю, т. е. $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = 0$, $\forall M \in D$.

Свойства потенциального поля:

1) циркуляция потенциального поля $\mathbf{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю;

2) в потенциальном поле $\mathbf{a}$ криволинейный интеграл $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой;

3) потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x, y, z)$, т. е. если $\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$, то существует функция $U(x, y, z)$, такая что $\mathbf{a} = \operatorname{grad} U$. Функция U называется потенциалом поля $\vec{a}$.

Замечание. Из равенства $\mathbf{a} = \operatorname{grad} U$ следует обратное утверждение – поле градиента скалярной функции $U = U(x, y, z)$ является потенциальным.

Из равенства $\mathbf{a} = \operatorname{grad} U$ следует, что потенциальное поле определяется заданием одной скалярной функции $U = U(x, y, z)$ – его потенциала. Потенциал векторного поля (заданного в односвязной области D) может быть найден по формуле

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= \int_{x_0}^x P(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta, z_0) d\eta + \int_{z_0}^z R(x, y, \zeta) d\zeta + c, \end{aligned}$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты фиксированной точки; (x, y, z) – координаты произвольной точки области. Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

В случае плоско-параллельного векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

из формулы (1.3) следует, что необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является выполнение во всех точках области равенства

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (1.12)$$

Это условие показывает, что выражение $-Qdx + Pdy$ является дифференциалом некоторой функции $v(x, y)$, которая называется *функцией тока*. При этом $\frac{\partial v}{\partial x} = -Q$, $\frac{\partial v}{\partial y} = P$. В односвязной области функция $v(x, y)$ восстанавливается по формуле

$$v(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} -Qdx + Pdy + c. \quad (1.13)$$

В соленоидальном поле поток через кривую L равен приращению функции тока вдоль этой кривой:

$$\Pi = \int_{z_1}^{z_2} -Qdx + Pdy = v(z_2) - v(z_1).$$

В случае плоско-параллельного векторного поля из формулы (1.9) следует, что необходимым и достаточным условием потенциальности поля является выполнение во всех точках области равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Это условие показывает, что выражение $Pdx + Qdy$ является дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, которая называется *потенциальной функцией (потенциалом)* поля. При этом $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. В односвязной области функция $u(x, y)$ восстанавливается по формуле

$$u(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} Pdx + Qdy + c. \quad (1.15)$$

Если поле является одновременно соленоидальным и потенциальным, то из свойств функции тока и потенциальной функции вытекает, что для них должны выполняться условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.16)$$

т. е. эти функции являются сопряженными гармоническими функциями. Тогда можно ввести аналитическую функцию

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad (1.17)$$

называемую *комплексным потенциалом поля а*. Вектор поля **а** выражается в терминах комплексного потенциала по формуле

$$\mathbf{a} = \overline{f'(z)}.$$

Далее, $f'(z)dz = (P - iQ)(dx + i dy)$, следовательно, формулы (1.2) и (1.8) могут быть переписаны в виде

$$\Pi = \operatorname{Im} \int_L f'(z) dz, \quad C = \operatorname{Re} \int_L f'(z) dz \quad \text{или} \quad C + i\Pi = \int_L f'(z) dz.$$

1.3. Формулы Стокса и Грина

Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным интегралом 2-го рода по некоторой замкнутой пространственной кривой L и поверхностным интегралом 2-го рода по поверхности S , краем которой является эта кривая.

Теорема 1.1. Пусть S – ориентированная кусочно-гладкая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с кусочно-гладким краем, а $L = \partial S$ – край этой поверхности, ориентация которого согласована с ориентацией поверхности S . Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ определены и непрерывны на замыкании поверхности S , непрерывно-дифференцируемы на этой поверхности, то имеет место следующее равенство (*формула Стокса*):

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \\ = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В терминах векторных полей *формула Стокса* имеет вид

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$.

Частным случаем формулы Стокса является *формула Грина*, устанавливающая связь между *криволинейным интегралом* по замкнутому контуру L и *двойным интегралом* по области D , ограниченной этим контуром.

Теорема 1.2. Пусть L – положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости, а D – область, ограниченная кривой L . Если функции $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ определены и непрерывны в замыкании области D и имеют в области D непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то имеет место следующее равенство (*формула Грина*):

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (1.19)$$

Запишем *формулу Грина* в комплексной форме. Пусть $z = x + iy$. Рассмотрим функцию $w(z, \bar{z}) = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда интеграл по замкнутой кривой L от этой функции относительно $dz = dx + idy$ равен

$$\oint_L (u + iv)(dx + idy) = \oint_L udx - vdy + i \oint_L vdx + udy.$$

Применяя формулу Грина (1.19) к каждому из вещественных интегралов в правой части последнего равенства и учитывая обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (1.20)$$

получим

$$\frac{1}{2i} \oint_L wdz = \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dxdy. \quad (1.21)$$

Аналогично получается *парная формула Грина* в комплексной форме:

$$-\frac{1}{2i} \oint_L wd\bar{z} = \iint_D \frac{\partial w}{\partial z} dxdy. \quad (1.22)$$

Известна также *вторая формула Грина*. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3. Пусть L – положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости, а D – область, ограниченная кривой L . Если функция $\varphi = \varphi(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области D и непрерывно дифференцируема в области D , а функция $\psi = \psi(x, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в замыкании области D и дважды непрерывно дифференцируема в области D , то имеет место следующее равенство – *вторая формула Грина*:

$$\oint_L \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D \varphi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (1.23)$$

Вводя обозначение

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1.24)$$

вторую формулу Грина можно переписать в форме

$$\oint_L \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \psi dx dy + \iint_D \varphi \Delta \psi dx dy. \quad (1.25)$$

Если функция $\varphi = \varphi(x, y)$ в теореме 1.3 удовлетворяет тем же условиям, что и функция $\psi = \psi(x, y)$, то формулу (1.25) можно переписать в симметричной форме:

$$\oint_L \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = \iint_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dx dy. \quad (1.26)$$

1.4. Основные понятия тензорной алгебры

Прямоугольная декартова система координат трехмерного евклидова пространства R^3 определяется тремя векторами $\mathbf{e}_i$ ортонормированного базиса. С их помощью каждый вектор $\mathbf{a}$ в R^3 представляется в виде

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = a_i \mathbf{e}_i. \quad (1.27)$$

Последняя часть равенства означает, что данное выражение равно сумме произведений с суммированием по индексу, стоящему на «одинаковых уровнях» (в данном случае по нижнему индексу i) в допустимых пределах его изменения (это правило будет применяться и далее в этом разделе). Перепишем, пользуясь этим правилом, известные формулы векторного анализа и теории функций многих переменных.

Скалярное произведение векторов трехмерного пространства вводится по формуле $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ – модуль (длина) вектора, а $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. С помощью базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ скалярное произведение может быть записано в координатной форме:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i \cdot b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i, \quad (1.28)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

δ_{ij} носит название *метрического тензора* (или *единичного тензора второго ранга* – по числу индексов). С помощью метрического тензора можно осуществлять операцию замены индексов, например:

$$\delta_{ik} a_i = a_k, \quad \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}.$$

Векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – это вектор, определяемый формулой

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{e}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{e}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Векторное произведение также записывается в координатной форме:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad (1.29)$$

где ε_{ijk} – трехиндексный символ Леви-Чевиты (псевдотензор):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если подстановка } (i, j, k) \text{ четная;} \\ -1, & \text{если подстановка } (i, j, k) \text{ нечетная;} \\ 0, & \text{если не все индексы } (i, j, k) \text{ различны,} \end{cases}$$

т. е. $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{321} = 1$. Справедливо соотношение

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnl} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{il} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jl} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kl} \end{vmatrix}.$$

В частности, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mjk} = 2\delta_{im}$, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$.

Смешанное произведение трех векторов определяется формулами:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j) c_k \mathbf{e}_k = a_i b_j c_k (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = a_i b_j c_k \varepsilon_{ijk}. \quad (1.30)$$

Дифференциал функции $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n независимых переменных представляется в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для частных производных употребляется сокращенная форма записи:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{,ij}.$$

Здесь и ниже символ « , » в нижнем индексе заменяет оператор дифференцирования. Тогда трехмерный оператор Лапласа может быть записан в виде

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) f = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f = f_{,ii}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В этих же обозначениях могут быть представлены градиент, дивергенция и ротор (вихрь):

$$\mathbf{grad} f = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f = \mathbf{e}_i f_{,i},$$

$$\mathbf{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = a_{,i,i},$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} a_k \varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i a_{k,j} e_{ijk}.$$

Рассмотрим преобразование системы координат при ее повороте от x_i к $x_i^* = x_i^*(x_1, x_2, x_3)$. Это преобразование записывается в виде

$$x_i^* = \sum_k x_k \cos(x_i^*, x_k) = c_{ik} x_k,$$

коэффициенты преобразования c_{ik} — это так называемые направляющие косинусы ($c_{ik} = c_{ki}$). Соответственно этому правилу преобразуются дифференциалы координат:

$$dx_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} dx_k = x_{i,k}^* dx_k = c_{ik} dx_k.$$

Под вектором $\mathbf{a}$ в дальнейшем будем понимать некоторый объект, компоненты которого при повороте системы координат преобразуются аналогично дифференциалам координат:

$$a_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} a_k = x_{i,k}^* a_k = c_{ik} a_k. \quad (1.31)$$

Вектор называют также *тензором первого ранга*. При этом символ a_i можно толковать как i -ю компоненту вектора или как весь вектор с индексом i , меняющимся в допустимых пределах.

Соответственно *тензор второго ранга* в декартовых координатах – это объект, компоненты которого T_{ij} при повороте системы координат преобразуются как произведение двух векторов:

$$T_{ij}^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial x_j^*}{\partial x_l} T_{kl} = c_{ik} c_{jl} T_{kl}. \quad (1.32)$$

Аналогично определяются формулы преобразования для компонент тензоров третьего и более высоких рангов.

Чтобы описать конкретный тензор, задают его значения относительно некоторого базиса. Совокупность компонент тензора второго ранга для наглядности записывают в форме матрицы компонент, например в трехмерном случае:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Аналогично предыдущему символ T_{ij} может означать как одну из девяти компонент тензора, так и весь тензор в целом. Для тензоров определены некоторые инварианты, т. е. величины, которые не меняются при повороте координат, например определитель матрицы (1.33).

Важные частные случаи тензоров второго ранга – *симметричные тензоры* $T_{ij} = T_{ji}$ и *антисимметричные (кососимметричные) тензоры* $T_{ij} = -T_{ji}$. Произвольный тензор второго ранга можно разложить на симметричную и антисимметричную компоненты:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Дифференцированием тензора в декартовых координатах образуются тензоры более высокого ранга. Например, дифференцирование скаля-

ра (тензора нулевого ранга) по координатам вектора (тензора первого ранга) определяет тензор второго ранга:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i} = \mathbf{grad} \, u,$$

что соответствует операции преобразования градиента. Соответственно дифференцирование вектора (тензора первого ранга) приводит к тензору второго ранга:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = a_{i,j}$$

и т. д. Это, однако, справедливо только для декартовых координат.

Индексные обозначения. Обобщая предыдущие соглашения, будем кратко представлять компоненты тензора любого ранга и сам тензор с помощью *индексных обозначений* – к *характерной*, или *основной*, букве, представляющей тензорную величину, добавляются верхние или нижние буквенные индексы. Типичными примерами, иллюстрирующими употребление индексов, являются тензорные символы

$$a_i, b^j, T_{ij}, F_i^j, \varepsilon_{ijk}, R^{pq}.$$

По правилам индексных обозначений каждый буквенный индекс может встречаться в каждом члене один или два раза. Если индекс употребляется один раз, то подразумевается, что он принимает значения 1, 2, ..., N , где N – заданное положительное число, называемое *размерностью индекса*. Неповторяющиеся индексы называются *свободными*. Тензорный ранг некоторой тензорной величины равен числу свободных индексов. Если индекс употреблен *дважды*, то подразумевается, что этот индекс принимает все значения из интервала своего изменения и члены, соответствующие каждому значению индекса из этого набора, *суммируются*. Повторяющиеся индексы часто называют немymi, ибо их замена на любые другие буквы не меняет значения величины, ими определяемой. Если при представлении некоторой величины желательно использовать один и тот же индекс более двух раз, то соглашение о суммировании не следует употреблять.

По числу и расположению свободных индексов можно судить о тензорном характере величины, представленной в индексных обозначениях. *Тензоры первого ранга (векторы)* обозначаются основными буквами с одним свободным индексом, т. е. представляются в одной из форм:

$$a_i \text{ или } a^i.$$

Следующие выражения, имеющие один свободный индекс, также представляют собой тензоры первого ранга:

$$a_{ij}b_j, F_{ikk}, R_{qp}^p, \varepsilon_{ijk}u_jv_k.$$

В последней записи (и всюду далее) на позиции символа «.» может стоять любое фиксированное значение индекса, а другие индексы в этой строке занимают последующие позиции (т. е. данный индекс не является свободным и на него не распространяется соглашение о суммировании, причем нижний индекс q является вторым нижним индексом). Такое соглашение удобно для описания действий над тензорами.

Тензоры второго ранга обозначаются основными буквами с двумя свободными индексами. Так, произвольный тензор второго ранга $\mathbf{D}$ будет записываться в одной из следующих форм:

$$D^{ij}, D_i^{\cdot j} \quad \text{или} \quad D_{\cdot j}^i, D_{ij}.$$

Вид тензорных величин второго ранга может быть различным, например:

$$a_{ijk}, b_{\cdot jk}^{ij}, \delta_{ij}u_kv_k.$$

Соглашение о суммировании часто используется в связи с представлением векторов и тензоров в символических обозначениях через *базисные векторы*, снабженные индексами, например, любой вектор в трехмерном пространстве может быть записан в следующей сокращенной форме:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i. \quad (1.34)$$

Здесь обозначения, по существу, символические, в которых используется соглашение о суммировании, в то время как правило свободных индексов не действует. Аналогично через базисные векторы можно представить так называемую *диадду* $\mathbf{ab}$, представляющую собой сумму девяти слагаемых:

$$\mathbf{ab} = (a_i \mathbf{e}_i)(b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (1.35)$$

где суммирование проводится по обоим индексам. Аналогичным образом девятичленная форма тензора второго ранга $\mathbf{D}$ может быть представлена в компактных обозначениях через базисные векторы в виде

$$\mathbf{D} = D_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.36)$$

Пусть x^i – произвольная система координат x^1, x^2, x^3 в трехмерном евклидовом пространстве и θ^i – любая другая система координат $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ в том же пространстве. *Формулы преобразования координат*

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3) \quad (1.37)$$

определяют для любой точки (x^1, x^2, x^3) системы x^i новый набор ее координат $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ в системе θ^i . Предположим, что функции θ^i однозначны, непрерывны и дифференцируемы. Определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \quad (1.38)$$

(или в компактной форме $J = \left| \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} \right|$) называется *якобианом* преобразования координат. Если преобразование не вырождено в некоторой точке (x_0^1, x_0^2, x_0^3) , т. е. якобиан не обращается в нуль, то система уравнений (1.37) (локально) однозначно разрешима в окрестности этой точки, т. е. в окрестности (x_0^1, x_0^2, x_0^3) определены функции

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3). \quad (1.39)$$

Из (1.37) найдем компоненты дифференциала:

$$d\theta^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (1.40)$$

Это равенство определяет класс тензоров, называемых *контравариантными векторами*. В общем случае величины b^i , связанные с точкой P , представляют компоненты *контравариантного тензора первого ранга*, если при преобразовании координат эти величины преобразуются по закону

$$b'^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} b^j. \quad (1.41)$$

Здесь частные производные вычислены в точке P , b^j являются компонентами тензора в системе координат x^i , а b'^i — его координаты в системе θ^i . В общей теории тензоров для обозначения контравариантных тензоров используются верхние индексы. При этом следует отметить, что тензорный характер имеют только дифференциалы dx^i , но не сами координаты.

Величины B^{ij} , компоненты которых подчиняются следующему правилу преобразования координат

$$B'^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^s} B^{rs}, \quad (1.42)$$

называются *контравариантными тензорами второго ранга*. Аналогичным образом определяются тензоры более высоких рангов.

Слово «*контравариантный*» используется для того, чтобы отличить эти тензоры от тензоров другого типа, называемых *ковариантными*. В общей теории для изображения ковариантных тензоров используются нижние индексы. Типичный *ковариантный вектор* (ковариантный тензор первого ранга) образуют частные производные от скалярной функции $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ по координатам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i}. \quad (1.43)$$

В общем случае величины b_i представляют компоненты *ковариантного тензора первого ранга*, если они преобразуются по правилу

$$b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} b_j. \quad (1.44)$$

Здесь b'_i являются компонентами ковариантного вектора в системе координат θ^i , а b_i – компонентами в системе x^i . *Ковариантные тензоры второго ранга* подчиняются закону преобразования

$$B'_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^j} B_{rs}. \quad (1.45)$$

Ковариантные тензоры более высоких рангов и *смешанные тензоры* определяются аналогично, например:

$$T'^{..r}_{.sp} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} T^m_{.nq}. \quad (1.46)$$

Система координат, для которой квадрат бесконечно малого элемента длины имеет вид

$$(ds)^2 = dx^i dx^i, \quad (1.47)$$

называется *системой однородных координат*. Преобразования, переводящие одну систему однородных координат в другую, называются *ортогональными*. Если в определении тензора участвуют только ортогональные преобразования, то такой тензор называется *декартовым*. Для декартовых тензоров нет различия между контравариантными и ковариантными компонентами. Потому в выражениях, содержащих только декартовы тензоры, принято использовать лишь нижние индексы. Ортогональным линейным преобразованиям координат соответствуют *ортогональные*

матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$, т. е. такие, для которых элементы a_{ij} удовлетворяют условиям ортогональности

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (1.48)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера.

Компоненты декартовых тензоров первого ранга преобразуются по формулам $b'_i = a_{ij}b_j$. Аналогично преобразуются декартовы тензоры второго ранга:

$$T'_{ij} = a_{ip}a_{jq}T_{pq}.$$

Декартовы тензоры одинакового ранга можно складывать/вычитать и умножать на скаляры (эти действия выполняются покомпонентно).

Внешним произведением двух тензоров любого ранга называется новый тензор, компоненты которого образованы умножением каждой компоненты одного тензора на каждую компоненту другого:

$$a_ib_j = T_{ij}; \quad v_iF_{jk} = \alpha_{ijk}; \quad D_{ij}T_{kl} = \Phi_{ijkl}; \quad \varepsilon_{ijk}v_m = \Theta_{ijkm}.$$

Ранг полученного тензора равен сумме рангов сомножителей. *Свертыванием тензора* по двум свободным индексам называется такая операция, при которой два свободных индекса обозначаются одной буквой и, таким образом, становятся индексом суммирования, например:

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}; \quad u_iv_i = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3;$$

$$E_{ij}a_j = b_i; \quad E_{ii}a_j = c_j; \quad E_{ij}F_{ik} = G_{jk}; \quad E_{ik}F_{jj} = H_{ik}.$$

В результате свертывания получается тензор, ранг которого на две единицы меньше ранга исходного тензора. Наконец, *внутренним произведением двух тензоров* называется результат операции свертывания, примененный к внешнему произведению данных тензоров. При этом совпадающие индексы должны фигурировать по одному в каждом из сомножителей, например:

$$a_ib_i \text{ (символически } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}); \quad a_iE_{ik} = f_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{f}); \quad a_iE_{ji} = h_j (\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{h});$$

$$E_{ij}F_{jm} = G_{im} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G}); \quad E_{ij}E_{jm} = H_{im} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}^2 = \mathbf{H}).$$

Для тензоров четвертого и более высоких рангов пользуются свертками по нескольким парам индексов.

Рассмотрим симметричные тензоры второго ранга с действительными компонентами. Для каждого симметричного тензора T_{ij} , заданного в некоторой точке пространства, и для каждого направления в этой точке

(характеризуемого единичным вектором $\mathbf{n}_i$) существует вектор $\mathbf{v}_i$, определяемый внутренним произведением

$$\mathbf{v}_i = T_{ij} \mathbf{n}_j. \quad (1.49)$$

Здесь тензор T_{ij} можно рассматривать как линейный оператор, который ставит в соответствие направлению $\mathbf{n}_i$ вектор $\mathbf{v}_i$. Если это направление таково, что вектор $\mathbf{v}_i$ ему параллелен, т. е.

$$T_{ij} \mathbf{n}_j = \lambda \mathbf{n}_i,$$

то направление $\mathbf{n}_i$ называется *главным направлением*, или *главной осью тензора* T_{ij} . Данное соотношение можно записать в виде системы трех линейных однородных уравнений относительно четырех неизвестных $\mathbf{n}_i$ и λ :

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \mathbf{n}_j = 0. \quad (1.50)$$

Для того чтобы система (1.50) имела нетривиальное решение, определитель матрицы ее коэффициентов должен быть равен нулю, т. е.

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0.$$

В развернутом виде данное равенство представляет собой кубическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 + \Pi_T \lambda - \Pi_T = 0, \quad (1.51)$$

которое называется *характеристическим уравнением тензора* T_{ij} . Его коэффициенты

$$I_T = T_{ii} = \text{tr } T_{ij} \quad (\text{след матрицы } (T_{ij})),$$

$$\Pi_T = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ij}),$$

$$\Pi_T = |T_{ij}| = \det T_{ij}$$

называются соответственно первым, вторым и третьим *инвариантами тензора* T_{ij} . Три корня кубического уравнения (1.51), обозначаемые $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$, называются *главными значениями тензора* T_{ij} . У симметричного тензора с действительными компонентами главные значения действительны. Если все они различны, то три главных оси взаимно ортогональны. В главных осях матрица тензора приводится к диагональному виду

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Литература

1. *Гарнет, Дж.* Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнет. М., 1984.
2. *Горшков, А. Г.* Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. М., 2002.
3. *Евграфов, М. А.* Аналитические функции / М. А. Евграфов. 2-е изд. М., 1968.
4. *Кусис, П.* Введение в теорию пространств H_p / П. Кусис. М., 1984.
5. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М., 1973.
6. *Мейз, Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. М., 2007.
7. *Сидоров, Ю. В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. М., 1982.
8. *Фукс, Б. А.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б. А. Фукс, Б. В. Шабат. 2-е изд. М., 1959.
9. *Berenstein, C. A.* Complex Variables. An introduction / C. A. Berenstein, R. Gay. New York, 1991.
10. *Hille, E.* Analytic Functions Theory / E. Hille. Boston : Ginn & Comp., v. I, 1959.; v. II, 1962.
11. *Mityushev, V. V.* Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / V. V. Mityushev, E. V. Pesetskaya, S. V. Rogosin // Thermal Properties of Cellular and Porous Materials / Ed. A. Öchsner, G. Murch, M. de Lemos. Amsterdam, 2007.

Глава 2

КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

2.1. Определение и классификация композиционных материалов

Молекулярная природа строения вещества достаточно хорошо описана. Однако во многих исследованиях важно знать не поведение отдельных молекул и характер их взаимодействия, а свойства материала (или некоторых его частей) как целого. В этих случаях не учитывают молекулярную структуру вещества, а предполагают, что оно непрерывно распределено по занимаемому им объему. Данная *концепция сплошности* (называемая также континуальным подходом О. Коши) является основным постулатом механики сплошной среды. Из этой концепции вытекает, в частности, что рассматриваемые поля выражаются кусочно-непрерывными функциями пространственных координат и времени.

Однородным называется материал, имеющий одинаковые свойства во всех точках. Материал является *изотропным* по отношению к некоторому свойству, если это свойство в точке одинаково изменяется по всем направлениям. Материал является *анизотропным* по отношению к тем свойствам, которые зависят от направления в точке. Понятие *плотности* вводится для окрестности точки сплошной среды как *отношение массы к объему*. Если в элементе объема ΔV содержится масса вещества Δm , то *средняя плотность* вещества внутри ΔV равна

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

а *плотность* в некоторой точке $M \in \Delta V$ задается пределом

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Массовая плотность ρ является скалярной величиной.

Силы, которые действуют на весь объем сплошной среды, называются *массовыми силами*, а те, которые действуют на элемент поверхности, будь то часть граничной или любой внутренней поверхности, называются *поверхностными силами*. Силы контактного взаимодействия между телами (или однородными частями тела) являются поверхностными силами.

Под *композиционным материалом (композитом)* понимают структуру, созданную из двух или большего числа фрагментов некоторых материалов, смешанных определенным образом. Свойства каждой составной части композита определяют свойства материала в целом. Таким образом, композит – это материал, заведомо обладающий неоднородными физическими свойствами (иными словами, композиционный материал представляет собой *гетерогенную среду*). Более содержательным является следующее определение: *композиционный материал* – это математическая модель, описываемая с помощью разрывных по координатам материальных функций определяющих соотношений. Чаще всего рассматривается случай, когда указанные функции кусочно-непрерывны, т. е. композит состоит из конечного числа однородных частей.

В композиционном материале выделяют *матрицу* (основной компонент или связующее) и *включения* (или армирующие элементы). Те или иные свойства композиционного материала определяются соотношением свойств компонентов, а также прочностью связей между компонентами. При этом роль играют не только определенные физические характеристики фрагментов и способы их объединения, но и геометрические особенности матрицы и включений (такие, как форма и взаимное расположение). В результате объединения матрицы и включений в единое целое образуется материал, обладающий новыми свойствами, которых не имеют его фрагменты.

Различают два основных типа композиционных материалов – *композиционные материалы с металлической и неметаллической матрицей*. Материалы первого типа состоят из металлической матрицы, упрочненной (армированной) высокопрочными волокнами (*волокнистыми материалами*) или тонкодисперсными тугоплавкими частицами, не растворяющимися в основном металле (*дисперсно-упрочненными материалами*). Металлическая матрица связывает волокна (дисперсные частицы) в единое целое.

Для материалов второго типа в качестве неметаллических матриц используют *полимерные, углеродные и керамические материалы*. Матрица связывает композицию, придавая ей форму. Упрочнителями служат различные волокна: стеклянные, углеродные, борные, органические, на основе нитевидных кристаллов (оксидов, карбидов, боридов, нитридов и

других), а также металлические (проволоки), обладающие высокой прочностью и жесткостью. Армирующие элементы могут быть в виде волокон, жгутов, нитей, лент, многослойных тканей. Чем выше прочность и модуль упругости волокон, тем выше прочность и жесткость композиционного материала. Свойства матрицы определяют прочность композиции относительно сдвигов и сжатия и сопротивляемость усталостному разрушению.

По виду упрочнителя композиционные материалы классифицируют на стекловолокнистые, карбоноволокнистые с углеродными волокнами, боро-волокнистые и органо-волокнистые. В *слоистых материалах* волокна, нити, ленты, пропитанные связующим материалом, укладываются параллельно друг другу в плоскости укладки. Плоские слои собираются в пластины. Такие композиционные материалы обладают анизотропными свойствами. Для использования материала в изделии важно учитывать направление действующих нагрузок. Можно создать новые материалы как с изотропными, так и с анизотропными свойствами. При укладке волокон под разными углами свойства композиционных материалов будут разными. От порядка укладки слоев по толщине пакета зависят изгибные и крутильные жесткости материала. Применяется укладка упрочнителей из трех, четырех и более нитей. Наибольшее применение имеет структура из трех взаимно перпендикулярных нитей. Упрочнители могут располагаться в осевом, радиальном и окружном направлениях. Трехмерные материалы бывают любой толщины в виде блоков или цилиндров.

Классификация композиционных материалов. *Волокнистые композиционные материалы.* Композиты с волокнистым наполнителем (упрочнителем) по механизму армирующего действия делят на дискретные и материалы с непрерывным волокном.

Дискретные волокна располагаются в матрице хаотично. Диаметр волокон – от долей до сотен микрометров. Чем больше отношение длины к диаметру волокна, тем выше степень упрочнения. Часто композиционный материал представляет собой слоистую структуру, в которой каждый слой армирован большим числом параллельных непрерывных волокон.

В композиционных материалах слои можно армировать также непрерывными волокнами, сотканными в ткань, которая представляет собой исходную форму, по ширине и длине соответствующую конечному материалу. Нередко волокна сплетают в трехмерные структуры. Применение композиционных материалов повышает жесткость конструкции при одновременном снижении ее металлоемкости.

Прочность волокнистых композиционных материалов определяется свойствами волокон; роль матриц в основном заключается в перераспре-

делении напряжений между армирующими элементами. Поэтому прочность и модуль упругости волокон должны быть значительно больше, чем прочность и модуль упругости матрицы. Жесткие армирующие волокна воспринимают напряжения, возникающие в композиционном материале при нагрузке, придают ей прочность и жесткость в направлении ориентации волокон. Металлические волокна используют и в тех случаях, когда требуются высокие теплопроводность и электропроводимость. Композиционные материалы на металлической основе обладают высокой прочностью и жаропрочностью, однако они малопластичны. В то же время волокна в композиционных материалах снижают скорость распространения трещин, зарождающихся в матрице. При этом практически полностью исключено внезапное хрупкое разрушение.

Отличительными особенностями волокнистых одноосных композиционных материалов являются анизотропия механических свойств вдоль и поперек волокон и малая чувствительность к концентраторам напряжения. Однако необходимо учитывать, что матрица может передавать напряжения волокнам только в том случае, когда существует прочная связь на поверхности раздела армирующее волокно – матрица. Волокна должны располагаться в матрице таким образом, чтобы между ними не было контакта. Матрица и волокно не должны между собой взаимодействовать (должна отсутствовать взаимная диффузия) при изготовлении и эксплуатации, так как это может привести к понижению прочности композиционного материала. Анизотропия свойств волокнистых композиционных материалов учитывается при конструировании деталей для оптимизации свойств путем согласования поля сопротивления с полями напряжения. Основным недостатком композиционных материалов с одно- и двумерным армированием является низкое сопротивление межслойному сдвигу и поперечному обрыву.

В отличие от волокнистых композитов в *дисперсно-упрочненных композиционных материалах* матрица является основным элементом, несущим нагрузку, а дисперсные частицы тормозят движение в ней дислокаций. Прочность и жаропрочность в зависимости от объемного содержания упрочняющих фаз не подчиняются закону аддитивности. Дисперсно-упрочненные композиционные материалы, так же как волокнистые, стойки к разупрочнению с повышением температуры и длительности выдержки при данной температуре.

Стекловолокниты – это композиты, состоящие из синтетической смолы, являющейся связующим, и стекловолоконного наполнителя. В качестве наполнителя применяют короткое непрерывное стекловолокно. Прочность стекловолокна резко возрастает с уменьшением его диа-

метра (благодаря снижению числа неоднородностей и трещин, возникающих в толстых сечениях). *Неориентированные стекловолокниты* содержат в качестве наполнителя короткое непрерывное волокно. Это позволяет прессовать детали сложной формы, с металлической арматурой. Материал получается с изотопными прочностными характеристиками, намного более высокими, чем у пресс-порошков и даже волокнитов. *Ориентированные стекловолокниты* имеют наполнитель в виде длинных волокон, располагающихся ориентированно отдельными прядями и тщательно склеивающихся связующим, что обеспечивает более высокую прочность таких композитов.

Карбоволокниты, или *углепластики*, представляют собой композиты, состоящие из полимерного связующего (матрицы) и упрочнителей в виде углеродных волокон (карбоволокон). В отличие от стеклянных волокон, карбоволокна плохо смачиваются связующим полимером (низкая поверхностная энергия). Применяются также пространственно армированные структуры. Связующими служат синтетические полимеры – *полимерные карбоволокниты*. Карбоволокниты отличаются высоким статистическим и динамическим сопротивлением усталости, сохраняют это свойство при нормальной и очень низкой температуре (высокая теплопроводность волокна предотвращает саморазогрев материала за счет внутреннего трения). Они водо- и химически стойкие.

Карбоволокниты с углеродной матрицей, или *коксованные материалы*, получают из обычных полимерных карбоволокнитов, подвергнутых пиролизу в инертной или восстановительной атмосфере. Образующийся при пиролизе связующего компонента кокс имеет высокую прочность сцепления с углеродным волокном. В связи с этим такой композиционный материал обладает высокими механическими свойствами, стойкостью к термическому удару.

Органоволокниты представляют собой композиционные материалы, состоящие из полимерного связующего и упрочнителей (наполнителей) в виде синтетических волокон. Такие материалы обладают малой массой, сравнительно высокими удельной прочностью и жесткостью, стабильны при действии знакопеременных нагрузок и резкой смене температуры. Для синтетических волокон потери прочности при текстильной переработке небольшие; они малочувствительны к повреждениям. В органоволокнитах значения модуля упругости и температурных коэффициентов линейного расширения упрочнителя (включения) и связующего (матрицы) близки. Происходят диффузия компонентов матрицы в волокно и химическое взаимодействие между ними. Механические свойства органоволокнитов устойчивы при резком перепаде температур, действии

ударных и циклических нагрузок. Недостатком этих материалов является сравнительно низкая прочность при сжатии и высокая ползучесть (особенно для эластичных волокон). Органоволокниты устойчивы в агрессивных средах и во влажном тропическом климате; диэлектрические свойства у них высокие, а теплопроводность низкая. В комбинированных материалах наряду с синтетическими волокнами применяют минеральные (стеклянные, карбоволокна и бороволокна). Такие материалы обладают большей прочностью и жесткостью.

2.2. Примеры композиционных материалов

В композиционном материале размеры включений и расстояния между ними обычно велики по сравнению с молекулярными, а с другой стороны – малы по сравнению с характерными размерами задачи. Такой композит однороден в макроскопическом масштабе (в масштабе размеров рассматриваемого тела), но неоднороден в микроскопическом масштабе. Если все размеры включений имеют одинаковый порядок, то такие включения называются *зерном* или *дисперсными частицами*, а сам композит – *дисперсным* или *гранулированным*.

В случае сильно вытянутых включений (т. е. когда один из размеров включений существенно больше других) говорят о *волокнах* и соответственно – *волокнистых композитах*. При изготовлении таких композитов применяют волокна, объединенные в монолитный материал с помощью податливого компонента – матрицы (часто полимера). Такой волокнистый композит сохраняет многие свойства, присущие исключительно волокнам.

Если включения представляют собой параллельные цилиндры (не обязательно с круговыми основаниями), а свойства композита одинаковы на каждой из плоскостей, ортогональной образующим цилиндров, то в этом случае говорят о *двумерных композитах* (*2D-композитах*). Задачи для таких композиционных материалов формулируются в виде задач для функций двух переменных (или функций комплексной переменной). В качестве плоскости, на которой изменяются эти переменные, берется одна из фиксированных плоскостей, ортогональных образующим цилиндров. *Слоисто-волокнистые композиты* состоят из однонаправленных слоев с различной ориентацией волокон.

Собранный из волокнистых параллельных достаточно тонких слоев композиционный материал носит название *ламината*. Созданный таким способом материал может обеспечивать широкий спектр заданных инженерных свойств, таких как продольная и поперечная жесткость, проч-

ность, коэффициент распространения тепла (коэффициент теплопроводности) и т. д. Отдельные слои состоят из высокомодульных, высокопрочных волокон. Эти слои обычно либо ортотропны (т. е. сохраняют основные свойства в ортогональном направлении), либо трансверсально изотропны (т. е. имеют изотропные свойства на трансверсальных плоскостях). В обоих случаях полученный ламинат является анизотропным. Основные его свойства либо ортотропны, либо квазиизотропны. Квазиизотропные материалы обладают изотропными (т. е. независимыми от направлений) продольными характеристиками, которые не сохраняются в направлении склеивания.

Классическая теория ламинатов говорит о том, что механические характеристики любого ламинатного композита являются комбинацией продольных характеристик и характеристик склеивания. Предполагается, что склеивание слоев происходит по принципу идеального контакта, что каждый слой представляет собой однородный материал с известными эффективными свойствами, которые могут быть изотропными, ортотропными или трансверсально изотропными. Кроме того, каждый слой находится в состоянии плоского напряжения, и ламинат деформируется согласно закону Кирхгофа для тонких пластин.

Можно привести также примеры более сложных композиционных материалов, обладающих в некотором смысле периодической структурой. К ним относятся композиционные материалы со сферическими отверстиями, периодически расположенными вдоль некоторой фиксированной плоскости в трехмерном пространстве. Встречаются также композиционные материалы с включениями, образующими «лес», «забор», «балки» или «решетки». Композиционные материалы с матрицей из пористого материала могут быть упрочнены (армированы) плоскими разнонаправленными включениями.

Рассмотрим некоторые примеры композиционных материалов.

Пример 2.1. *Сферические отверстия, периодически распределенные в пространстве $\mathbb{R}^3$.*

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с отверстиями, периодически распределенными на некотором одномерном многообразии в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для простоты предположим, что это многообразие представляет собой прямую $x_2 = 0$ на плоскости $x_1 O x_2$, и будем рассматривать только круговые отверстия. Другими словами, построим на прямой $x_2 = 0$ решетку с ячейкой размером 2ε . Каждый узел этой решетки – это центр круга радиусом b^ε на плоскости $\mathbb{R}^2$. Это определяет отверстия T_i^ε .

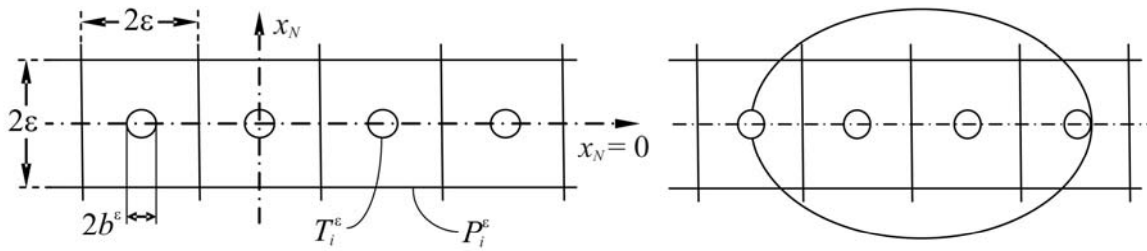


Рис. 2.1. Периодически расположенные на плоскости шаровые включения

Данную конструкцию можно описать другим способом. Заполним полосу $|x_2| \leq \varepsilon$ кубами P_i^ε пространства R^3 со сторонами, параллельными координатным осям, длина которых равна 2ε , и расположим в центре каждого такого куба маленький шар T_i^ε радиусом b^ε . Матрицей композита является заданная область с отверстиями T_i^ε (рис. 2.1).

Пример 2.2. *Цилиндры, распределенные как лес или как забор.*

Рассмотрим случай, когда отверстия являются цилиндрами бесконечной длины с образующими, параллельными оси x_3 . Пересечением данных цилиндров с плоскостью $\{x_3 = 0\}$ будут являться сферы пространства R^2 радиусом a^ε , которые периодически распределены в объеме пространства R^2 . Если эти отверстия рассматривать как стволы деревьев (бесконечной длины), то мы получаем лес цилиндров (рис. 2.2.).

Так же можно рассмотреть случай цилиндрических отверстий, распределенных как забор. Цилиндры с образующими, параллельными оси x_3 , расположены вдоль плоскости $\{x_1 = 0\}$ (рис. 2.3).

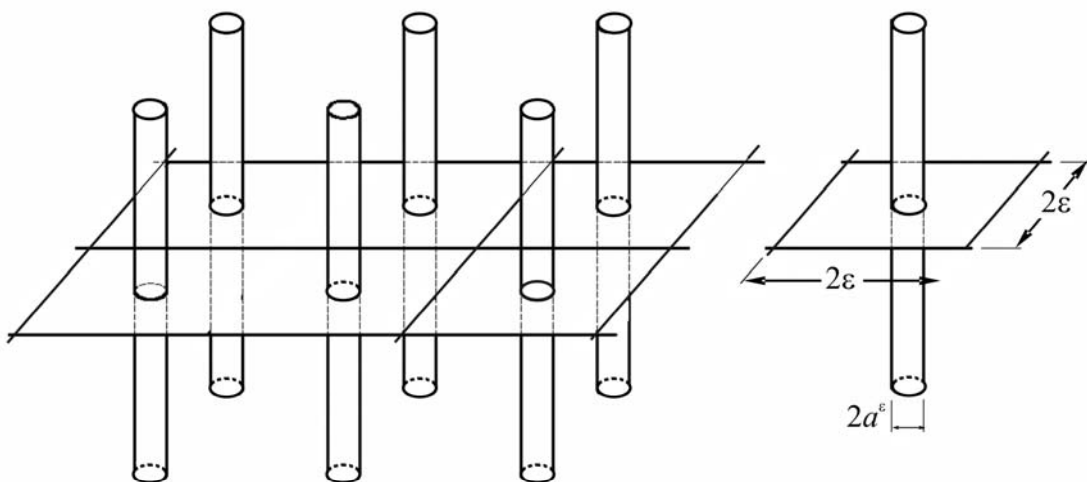


Рис. 2.2. Решетка из цилиндров

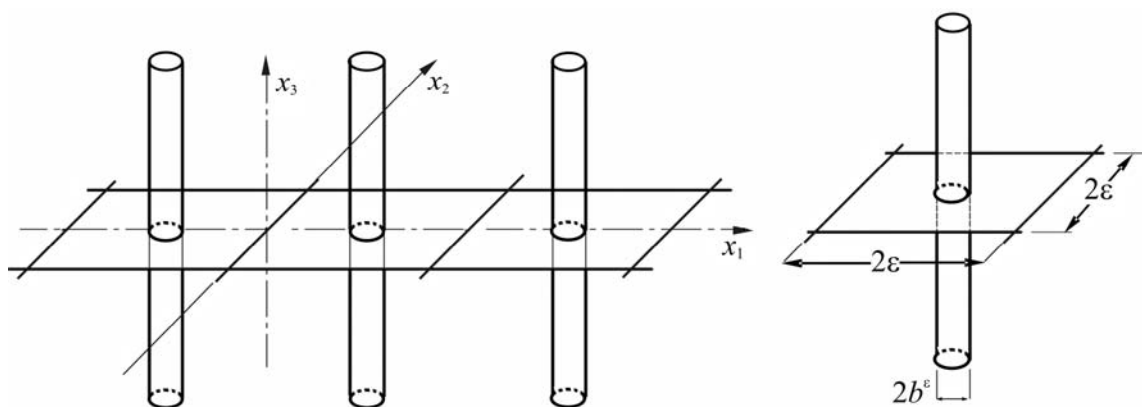


Рис. 2.3. Забор из цилиндров

Пример 2.3. Балки и сетки.

Из примера цилиндров, распределенных как лес, можно получить трехмерную балку. Она представляет собой связное отверстие в $\mathbb{R}^3$, полученное объединением цилиндров радиусом a^ε и расположенное по всему краю решетки в пространстве $\mathbb{R}^3$, с ячейкой размера 2ε (рис. 2.4).

Аналогично пересечением цилиндров, распределенных как забор, можно получить отверстие в пространстве в форме решетки (рис. 2.5).

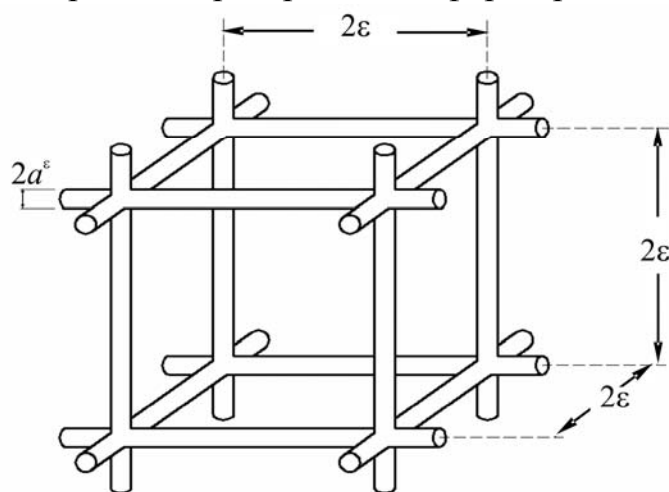


Рис. 2.4. Балка

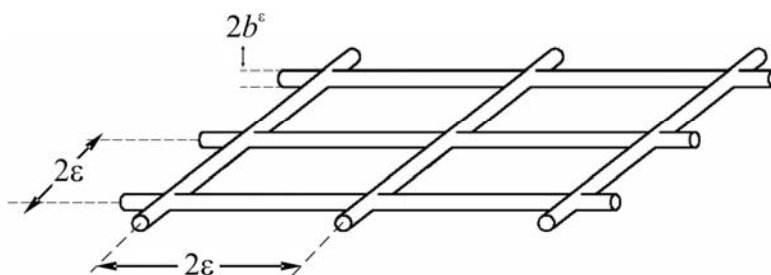


Рис. 2.5. Решетка

2.3. Математические задачи для композиционных материалов

Данные задачи для композиционных материалов имеют различный характер. Прежде всего необходимо построить математическую модель композиционного материала относительно того или иного физического параметра (например, тепло- и электропроводность, упругие свойства, износостойчивость, вязкость).

Математическая модель включает описание физических полей внутри каждой из компонент, выраженных уравнениями состояния. Кроме того, характеризуется внешняя среда – в форме граничных условий на внешней границе материала. Наконец, указывается способ и характер объединения фрагментов в форме условий сопряжения на границе раздела матрица – включения.

Исследование математической модели в основном заключается в определении характеристик композиционного материала как единого целого (*прямая задача*), называемых также *эффективными характеристиками* композиционного материала.

Зачастую решается не прямая, а *обратная задача*, состоящая в том, чтобы сформировать композиционный материал с предписанными свойствами. К таким задачам, например, относятся задачи *оптимального дизайна*, которые заключаются в определении формы, размеров и местоположения включений в композите, обеспечивающих оптимальные (минимальные или максимальные) значения рассматриваемых характеристик материала в целом.

Специальный класс задач для композиционных материалов образуют задачи *исследования двумерных композиционных материалов*. Для решения таких задач широко используют методы теории функций комплексного переменного.

Распространенным методом качественного исследования свойств композиционных материалов является метод *гомогенизации*, или *осреднения*. Суть его состоит в том, что характеристики исследуемого композиционного материала определенным образом усредняются. На основе усредненных характеристик удастся получить описание свойств материала в целом, хотя при этом теряется информация о значениях некоторых параметров, характеризующих поведение материала на микроуровне.

Микроструктура композита во многих случаях близка к периодической, что дает возможность использовать при их исследовании методы осреднения (гомогенизации) процессов в периодических средах. Использование таких методов сводит суть расчета к решению локальной задачи

для одной ячейки периодичности и к решению глобальной задачи для однородного тела с осредненными (эффективными) постоянными, которые вычисляются на основе решения локальной задачи. Кроме того, используя решение локальной задачи, можно приближенно описать локальные физические поля в пределах отдельной ячейки, что позволяет вычислить оптимальную интенсивность внешних полей.

Литература

1. Аннин, Б. Д. Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. М., 1983.
2. Бардзокас, Д. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин. М., 2003.
3. Кристенсен, Р. М. Введение в механику композитов / Р. М. Кристенсен. М., 1982.
4. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. М., 1984.
5. Bergman, D. J. The dielectric constants of a composite material – a problem of classical physics / D. J. Bergman // Phys. Rep. Ser. C. 1978. Vol. 43.
6. Cherkaev, A. Variational Methods for Structural Optimization / A. Cherkaev. New York, 2000.
7. Milton, G. W. The theory of composites / G. W. Milton. Cambridge, 2007.
8. Mityushev, V. V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / V. V. Mityushev, E. V. Pesetskaya, S. V. Rogosin // Thermal Properties of Cellular and Porous Materials / Ed. A. Öchsner, G. Murch, M. de Lemos. Amsterdam, 2007.
9. Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials / Ed. A. Cherkaev, R. Kohn. Basel-Boston, 1997.

Глава 3

ПОЛЯ В КОМПОЗИТАХ

3.1. Основные законы механики сплошной среды

Всякий материальный континуум обладает характеристикой, называемой *массой*. Суммарная масса некоторой части сплошной среды, занимающей в момент времени t объем V , выражается интегралом

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (3.1)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$ – непрерывная функция координат, называемая *плотностью*.

Закон сохранения массы утверждает, что масса выделенной части среды остается постоянной. Отсюда следует, что материальная производная интеграла (3.1) равна нулю. Напомним, что под материальной производной понимается скорость изменения рассматриваемой величины во времени, измеренной наблюдателем, движущимся вместе с индивидуальной частицей. В случае материальной производной массы имеем:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{dv_k}{dx_k} \right] dV = 0. \quad (3.2)$$

Поскольку это равенство верно для любого выделенного объема V , то подынтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{k=1}^3 v_{k,k} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (3.3)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности (непрерывности)*. Преобразовывая оператор материальной производной, последнее уравнение можно записать в равносильной форме (считая, что локально, т. е. в сколь угодно малом объеме, плотность не зависит от $\mathbf{x}$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.4)$$

В несжимаемой среде плотность массы каждой частицы не зависит от времени, т. е. $\frac{d\rho}{dt} = 0$, и уравнение (3.3) принимает вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.5)$$

В этом случае поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ является потенциальным, т. е. может быть представлено в форме:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{s}, \quad (3.6)$$

где скалярная функция $s(\mathbf{x}, t)$ называется *потенциалом* поля $\mathbf{v}$.

Уравнение неразрывности можно записать в лагранжевой или материальной форме. Для сохранения массы требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, 0) dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (3.7)$$

где движение частиц описывается уравнениями $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, дающими положение $\mathbf{x}$ в текущий момент времени t той частицы, которая занимает в момент времени $t = 0$ положение $\mathbf{X}$. Оба интеграла в (3.7) берутся относительно одной и той же совокупности частиц, т. е. объем V занимает в момент времени t ту часть среды, которая в момент времени $t = 0$ занимала объем V_0 . Плотность массы в объеме V_0 обозначается $\rho_0(\mathbf{X}, 0)$. Интеграл в левой части (3.7) можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, 0) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) J dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{X}, t) J dV_0,$$

где $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$ – якобиан преобразования координат. В силу произвольности выделенного объема имеем

$$\rho_0 = \rho J.$$

Это означает, что произведение ρJ не зависит от времени, т. е.

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0. \quad (3.8)$$

Это уравнение называется *лагранжевой дифференциальной формой* уравнения неразрывности.

При рассмотрении явлений в различных областях физики часто обнаруживаются общие черты этих явлений. Это приводит к тому, что при

математической формулировке задачи получаются одни и те же уравнения, описывающие различные физические процессы. Например, поскольку в случае теплопроводности и электропроводности постановка математических задач эквивалентна, то достаточно рассматривать один вид проводимости.

Приведем описание *закона сохранения энергии* в терминах распространения тепла. Любая проводимость предполагает, что поток частиц проходит через некоторую среду. Пусть $\mathbf{e}$ – векторное поле в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Обозначим через $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ тепловой поток, пересекающий некоторую поверхность, т. е. количество тепла, проходящего через заданную поверхность в единицу времени. Поток удовлетворяет так называемому кинетическому уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) соответствует закону сохранения энергии: суммарное число материальных частиц, пересекающих границу некоторой области снаружи и изнутри, равно нулю. Это означает отсутствие источников и стоков в области Ω .

Если предположить наличие источников или стоков в области Ω с заданной плотностью их распределения $f(\vec{\mathbf{x}})$, то уравнение (3.9) принимает более общий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.10)$$

В этом случае поле не является потенциальным, и говорят, что разность между числом материальных частиц, пересекающих границу области снаружи и изнутри, равна плотности источников (стоков) в этой области.

При исследовании композиционных материалов используются также и другие законы механики сплошной среды – закон сохранения импульса, законы сохранения моментов и т. п.

3.2. Физические законы для различных полей

Приведем наиболее характерные примеры описания различных векторных полей в композиционных материалах.

Задача о теплопроводности для композиционного материала. Распространение температуры описывается двумя величинами: скалярной (*температурным полем* $T = T(t, x_1, x_2, x_3)$) и векторной (*тепловым потоком* $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, x_1, x_2, x_3)$), которые зависят как от времени t , так и от

пространственных координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Температурное поле в изотропном теле описывается уравнением теплопроводности

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + D. \quad (3.11)$$

Рассмотрим композиционный материал как *изотропную* и *макрооднородную* структуру, у которой объемная удельная теплоемкость c (т. е. теплоемкость единицы объема) и коэффициент теплопроводности λ являются быстро осциллирующими функциями пространственных координат $\mathbf{x}$ (периодическими в случае периодических композиционных материалов). Напомним, что материал называется *изотропным*, если его свойства (в данном случае – проводящие) не зависят от направления в пространстве, т. е. меняются одинаково во всех направлениях. Материал называется *макрооднородным*, если его свойства постоянны в каждой точке среды (но не обязательно постоянны относительно изменения координат). Величина D в уравнении (3.11) представляет собой плотность источников/стоков тепла. В *стационарном случае* $\frac{\partial T}{\partial t} \equiv 0$.

Задача о теплопроводности для периодического композиционного материала. В случае периодического материала его однородные части повторяются периодически в пространстве. С точки зрения уравнения (3.11) это означает, что удельная теплоемкость c и коэффициент теплопроводности λ являются также и периодическими функциями пространственной переменной $\mathbf{x}$.

Для математического описания процессов теплопроводности используют модель механики сплошной среды, геометрически описываемой периодически повторяющимися идентичными элементами. Такую геометрическую интерпретацию можно построить параллельным переносом ячейки периодичности Ω . В этом случае среду называют Ω -*периодической*. В одномерном случае Ω -периодическая среда соответствует *слоистым композитам*. В двумерном случае в качестве периодической ячейки рассматривают параллелограмм (прямоугольник). Характерная ячейка периодичности в трехмерном случае – это параллелепипед.

Аналогичные рассуждения можно провести для других полей. При этом меняются только уравнения физических законов.

Электромагнитное поле в композиционных материалах. При решении задачи о распределении электромагнитного поля в композиционных материалах предполагается, что физические параметры среды неоднородны в микроскопическом масштабе и однородны в макроскопическом масштабе. К таковым параметрам относятся диэлектрическая проницае-

мость ε , магнитная проницаемость μ и коэффициент электропроводности σ . Электромагнитное поле в такой среде описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{D}_{ij} + \mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{B}_{ij}$$

и уравнением состояния

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где векторы $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного поля; $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ – векторы электрической и магнитной индукции; $\mathbf{j}, \mathbf{D}_{ij}$ – плотности тока проводимости и тока смещения.

Задача о нагреве композиционного материала в электромагнитном поле. Объемный нагрев композита с локальным тепловыделением, зависящим от электрофизических свойств компонентов, может сопровождаться местными перегревами, которые могут повлечь нежелательные изменения качеств материала. В связи с этим рассматривается задача о расчете температурных полей в композиционных материалах, находящихся во внешнем высокочастотном электромагнитном поле.

Температурное поле T в композите описывается уравнением теплопроводности (3.11), в котором фигурирует усредненная по периоду колебаний электрического поля удельная плотность джоулевых источников тепла D . Предполагается также, что композит нагревается электромагнитным полем (высокочастотным полем с медленно меняющейся амплитудой), которое описывается формулами вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})\chi(t)e^{-i\omega t}. \quad (3.12)$$

Осредненная плотность джоулевых источников тепла D вычисляется исходя из решения задачи электродинамики.

Двумерная задача о нагреве (волокнутого) композита в электромагнитном поле. Если матрица и включения (волокна) композита изотропны, то температурное поле T в волокнутом однонаправленном композите при нагреве в высокочастотном электромагнитном поле описывается двумерным уравнением теплопроводности (3.11) (зависимость от x_3 исключается) с быстро осциллирующими коэффициентами и усредненной по периоду колебаний электрического поля удельной плотностью джоулевых источников тепла D . Волокнустый композит нагревается квазиустановившимся высокочастотным электромагнитным полем с медленно меняющейся амплитудой, которое описывается равенством (3.12), в котором также $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Электрическое поле определяется в результате решения задачи электромагнетизма. Кроме того, вычисляется удельная плотность источников тепловыделения D .

Звуковые волны бесконечно малой амплитуды в идеальной среде. Классическая акустика – это часть механики сплошных сред, изучающая колебательные и волновые процессы в том случае, когда длины волн велики по сравнению с межмолекулярным расстоянием. Линейная акустика изучает процессы распространения волн бесконечно малой амплитуды, для которых справедлив принцип суперпозиции. В этом случае речь идет об акустических или звуковых волнах, обусловленных упругими силами, возникающими при деформации среды. Звуковая волна, распространяющаяся в жидкости, характеризуется тремя параметрами: избыточным давлением $p = p' - p_0$ (где p' , p_0 – возмущенное и равновесное давление соответственно), колебательной скоростью частиц жидкости v и избыточной плотностью или отклонением плотности среды $\rho = \rho' - \rho_0$.

Движение идеальной жидкости или газа в неподвижной системе координат описывается при наличии массовых сил $\mathbf{F}$ уравнением Эйлера

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = F_i, \quad (3.13)$$

уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho' v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.14)$$

и уравнением состояния в виде условия баротропии

$$p' = f(\rho'). \quad (3.15)$$

Для идеального газа в предположении адиабатичности процесса распространения волн условие баротропии берется в виде адиабаты Пуассона:

$$p' = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma.$$

Движение вязкой жидкости в пористой среде. По определению в вязкой изотропной жидкости компоненты тензора напряжений определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} &= \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где p – давление; τ_{ij} – сдвиговые напряжения; $v_{k,k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$, v_k – компоненты вектора $\mathbf{v}$ – скорости движения жидкости; $\varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ – тензор

скорости деформации; λ, μ – коэффициенты Ламе. Линейная зависимость, связывающая сдвиговые напряжения в вязкой жидкости со скоростями движения жидкости носит название закона Навье – Стокса. Подстановка соотношений (3.16) в уравнения движения сплошной среды

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + p_{ij,j},$$

где F_i – компоненты вектора массовой силы $\mathbf{F}$, приводит к уравнениям Навье – Стокса:

$$\begin{aligned} \rho dv_i &= \rho F_i - p_{,i} \delta_{ij} + \lambda v_{k,kj} \delta_{ij} + \mu (v_{i,jj} + v_{j,ij}) = \\ &= \rho F_i - p_{,i} + (\lambda + \mu) v_{k,ki} + \mu v_{i,kk}, \end{aligned}$$

в которых

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k v_{i,k}.$$

При этом в последней формуле второе нелинейное слагаемое (так называемую конвективную скорость) можно опустить, если скорость движения жидкости такова, что число Рейнольдса $Re = V\rho d / \mu$ (V – характерная скорость течения жидкости; d – характерный размер тела) мало по сравнению с единицей. Напомним, что $Re = V\rho d / \mu$, где V – характерная скорость течения жидкости; d – характерный размер тела; μ – динамический коэффициент Ламе. В таком случае нелинейное уравнение Навье – Стокса переходит в уравнение Стокса.

В векторной форме уравнение Навье – Стокса имеет вид

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{F} - \mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (3.17)$$

а уравнение Стокса:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \mathbf{F} - \mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (3.18)$$

Коэффициент μ носит название динамического коэффициента вязкости, в отличие от кинематического коэффициента вязкости $\nu = \mu / \rho$.

Для сжимаемой жидкости уравнения (3.17), (3.18) дополняются уравнением неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.19)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности переходит в уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.20)$$

Таким образом, в уравнениях Навье – Стокса (3.17) и Стокса (3.18) для несжимаемой жидкости последнее слагаемое можно опустить. Следовательно, движение несжимаемой вязкой жидкости описывается одним динамическим коэффициентом вязкости μ .

При рассмотрении очень медленного движения жидкости в каналах пористого тела можно считать это движение установившимся и перейти фактически к уравнениям Стокса в равновесной форме:

$$\rho \mathbf{F} = \mathbf{grad} p - \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.21)$$

Последнее уравнение вместе с условием несжимаемости (3.20) описывает распределение давления и скоростей жидкости во всем объеме тела Ω , точнее в жидкой его части Ω_f .

Линейная задача теории упругости композиционных материалов периодической структуры. Рассмотрим линейную динамическую задачу для упругого тела с периодической структурой. Пусть тело занимает ограниченную область Ω , состоящую из периодически повторяющихся ячеек Y – параллелепипедов со сторонами εl_i , $i=1, 2, 3$, где ε – малый параметр. Состояние материальной частицы с координатой $\mathbf{x}$ в момент времени t описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i. \quad (3.22)$$

Предположим, что на одной части границы $\partial\Omega$ заданы силы p_i^* , а на другой заданы перемещения u_i^* :

$$\sigma_{ij} n_j = p_i^*, \quad u_i = u_i^*. \quad (3.23)$$

В начальный момент времени $t=0$ перемещения и скорости равны нулю:

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.24)$$

Напряжения, деформации и перемещения связаны законом Гука и формулами Коши:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.25)$$

Здесь коэффициенты упругости c_{ijkl} образуют положительно определенный и симметричный ($c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$) тензор четвертого порядка.

Заданные силы (массовые F_i и поверхностные p_i^*) являются функциями глобальных координат $\mathbf{x}$, поскольку они не связаны с микroneоднородностью материала. С другой стороны, плотность ρ и коэффициенты упругости c_{ijkl} можно рассматривать как Y -периодические функции от локальных координат $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$. Неоднородность материала проявляется только на микроуровне (в масштабах ячейки периодичности), на макроуровне материал можно считать однородным.

3.3. Краевые условия на границе раздела сред

В разделе 3.2 приведено описание различных физических полей в однородных компонентах композиционных материалов как в нестационарном, так и в стационарном случаях. Однако макроскопические (эффективные) свойства композитов определяются не только внутренним состоянием их отдельных частей, но также и условиями на границе раздела сред.

Подробное описание возможных условий дано на примере задачи о теплопроводности композиционных материалов.

На границе Γ раздела фаз композита (на поверхности контакта матрицы и включений) зачастую принимается условие *идеального контакта* – непрерывность температуры при переходе через Γ и непрерывность нормальной составляющей потока при переходе через Γ . Данные условия могут быть записаны в следующей форме:

$$[T]_{\Gamma} = 0, \quad [\mathbf{q}_n]_{\Gamma} = \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i \right]_{\Gamma} = 0, \quad (3.26)$$

где $[\cdot]_{\Gamma}$ означает величину скачка через Γ в направлении внешней нормали, а $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ . На отдельных участках внешней поверхности композита (тела S) могут быть заданы различные граничные условия:

- распределение температуры $T|_{S_1} = T_0$, если, например, на данном участке происходит интенсивный теплообмен, так что температура на поверхности близка к температуре внешней среды T_0 ;

- внешний поток тепла $\mathbf{q}_n|_{S_2} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i \Big|_{S_2} = \mathbf{q}_{n,2}$, если, например, близ-

ко к этой части поверхности расположен высокотемпературный источник тепла;

- условие теплоизоляции $\mathbf{q}_n|_{S_3} = 0$, которое часто задается в плоскости симметрии при равномерном нагревании поверхности тела;
- условие теплообмена по закону Ньютона $\mathbf{q}_n|_{S_4} = \beta(T - T_0)$, применяемое при исследовании теплопередачи на поверхности тела, обтекаемого потоком жидкости или газа.

Специальные условия возникают, когда рассматриваются задачи для периодических композиционных материалов. В большинстве этих задач предполагают, что краевые условия на границе раздела сред выполняются в нулевом приближении, при этом основное внимание уделяется распределению температуры во внутренней части компонентов композита. Выделение приближений для краевых условий обычно происходит по отношению к так называемому параметру осреднения.

Локальные задачи электродинамики для периодического композиционного материала решаются с учетом некоторых краевых условий на границе Γ раздела фаз. Эти условия являются следствием того, что проводимости фаз композита являются конечными величинами. Для нулевого приближения они имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}]_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ [-i\omega\mathbf{D} + \mathbf{j}]_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Поскольку задачи определения локальных электрических и магнитных полей решаются независимо друг от друга, то при решении задачи о нагреве композита достаточно ограничиться анализом электрических полей. В этом случае окончательное выражение для распределения температуры в композиционном материале получается после подстановки решения задачи об электромагнитном поле в формулу решения задачи теплопроводности.

В случае движения вязкой жидкости в пористой среде на границе тела $\partial\Omega$ и на границе Γ раздела жидкой и твердой частей тела могут быть поставлены граничные условия, например условие прилипания:

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \quad (3.28)$$

или условие непроницаемости (т. е. условие равенства нулю нормальной составляющей вектора скорости):

$$v_n|_{\partial\Omega} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad v_n|_{\Gamma} = 0. \quad (3.29)$$

Если в случае периодических композиционных материалов ячейка периодичности состоит из двух материалов, например волокна и матри-

цы, то коэффициенты упругости можно считать кусочно-постоянными (постоянными для каждой из компонент ячейки). При этом необходимо задать условие контакта этих компонентов. Один из возможных вариантов – условие идеального контакта, состоящее в отсутствии внешних поверхностных усилий и непрерывности перемещения на границе раздела компонентов.

Литература

1. Бердичевский, В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. М., 1983.
2. Мейлз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейлз. М., 2007.
3. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. 5-е изд, испр. и доп. М., 1966.
4. Cherkhev, A. Variational Methods for Structural Optimization / A. Cherkhev. New York, 2000.
5. Gol'dstejn, R. V. Qualitative methods in continuum mechanics / R. V. Gol'dstejn, V. M. Entov // Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, v. 72. Harlow ; Longman Scientific & Technical, 1994.
6. Prandtl's Essentials of Fluid Mechanics (Oertel H. (ed.)). New York, 2004.

Глава 4

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

4.1. Гармонические и аналитические функции

Определение 4.1. Вещественно- (или комплексно-) значная функция u называется *гармонической* в области^{*} $D \subset \mathbb{R}^3$ или $\subset \mathbb{R}^2$, не содержащей бесконечно удаленной точки, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) определена в D и имеет внутри D равномерно непрерывные первые производные ($u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ (C)}, \quad u \in C^1(D)$);

б) имеет внутри D вторые производные, непрерывные во всякой области D_1 , компактно вложенной в D ($u \in C^2(D_1), \quad \forall D_1, \quad \overline{D_1} \subset D$);

в) вторые производные во всякой внутренней точке области D удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4.1)$$

Функция u называется *гармонической* в области D_e , внешней к D и содержащей бесконечно удаленную точку, если она удовлетворяет условиям:

а) $u : D_e \rightarrow \mathbb{R} \text{ (C)}, \quad u \in C^1(D_e)$;

б) $u \in C^2(D'_e), \quad \forall D'_e, \quad \overline{D'_e} \subset D_e$;

в) вторые производные удовлетворяют уравнению Лапласа (4.1.1);

г) $u(x, y, z) \rightarrow 0$ при $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$.

Теория (вещественнозначных) гармонических функций, определенных в областях на комплексной плоскости, тесно связана с теорией аналитических функций. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область (открытое связное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$). Говорят, что непрерывная вещественнозначная функция $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ является гармонической в области D ,

^{*} Под областью в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ далее всюду понимается открытое связное множество в $\mathbb{C}$.

если она имеет в этой области непрерывные первые и вторые частные производные и удовлетворяет в D уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.2)$$

или в терминах r и φ (т. е. для комплексной переменной z , представленной в экспоненциальной форме $z = re^{i\varphi}$):

$$\Delta u = r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Гармоническая в этой же области функция $v: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сопряженной гармонической* для u , если для любого $z = x + iy \in D$ выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z). \quad (4.3)$$

Если область D односвязная, то сопряженная гармоническая функция v (с точностью до произвольной аддитивной постоянной) определяется через функцию u в квадратурах:

$$v(z) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y}(\xi, \eta) d\xi + \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, \eta) d\eta + C, \quad (4.4)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ – произвольная фиксированная точка области D , а интегрирование проводится по произвольной гладкой кривой, соединяющей точки z_0 и z и лежащей в области D . В случае многосвязной области D формула (4.4), вообще говоря, приводит к многозначной функции, а, следовательно, каждая из функций $f(z) = u(z) + iv(z)$ может при этом оказаться многозначной.

Из второй формулы Грина (1.25), (1.26) вытекают следующие свойства:

1. Если функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ является гармонической в области D , то для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой L , лежащей в D ,

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

2. Если функции $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ являются сопряженными гармоническими в области D , то для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой L , лежащей в D ,

$$\oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

3. Если функция $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ является гармонической в области D , то для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой L , лежащей в D ,

$$\oint_L \left[u \frac{\partial}{\partial n} (\ln |z - \zeta|) - \ln |z - \zeta| \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds = 2\pi u(\zeta), \quad z \in L, \quad \zeta \in D.$$

Определение 4.2. Дифференцируемая в области D относительно комплексной переменной z функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется *аналитической* в этой области.

Теорема 4.1. Если функция $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична в односвязной области D , то существует аналитическая в области D функция f , вещественная часть которой совпадает с функцией u . Эта функция определяется равенством $f(z) = u(z) + iv(z)$, где v – одна из функций, вычисляемых по формуле (4.4).

Аналогичное утверждение имеет место для аналитической функции, определяемой заданной мнимой частью в односвязной области.

В действительности необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z) = u(z) + iv(z)$ в области D является дифференцируемость ее действительной и мнимой частей $u(z)$, $v(z)$ и выполнение во всей области условий Коши – Римана (4.3).

Следующая теорема является гармоническим аналогом теоремы Лиувилля.

Теорема 4.2. Если функция гармонична и ограничена во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то она равна постоянной.

◀ Действительно, пусть $u(z)$ гармонична и ограничена во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Из теоремы 4.1 следует, что существует аналитическая в $\mathbb{C}$ (т. е. целая) функция f , вещественная часть которой совпадает с функцией u . Рассмотрим функцию $g(z) = e^{f(z)}$. Она является целой функцией, ограниченной в $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля она равна постоянной. ▶

Предыдущая теорема справедлива и в более общей нижеприведенной форме:

Теорема 4.3. Если вещественная или мнимая часть целой функции f ограничена сверху или снизу положительной постоянной $M > 0$, то функция f равна постоянной.

Гармоническим аналогом теоремы Гаусса о среднем значении аналитической функции является следующая теорема.

Теорема 4.4. Пусть функция $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична в области D , содержащей круг $|z - z_0| \leq R$. Тогда

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (4.5)$$

Отсюда непосредственно следует нижеприведенная теорема.

Теорема 4.5. Пусть функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична в области D и постоянна в окрестности некоторой точки в D . Тогда функция u постоянна в области D .

◀ Пусть A – множество тех точек $z_0 \in D$, в окрестности которых $u(z)$ равна постоянной. Множество A открыто и не пусто. Для доказательства равенства $A = D$ достаточно установить, что множество $B = D \setminus A$ является открытым. Тогда автоматически B пусто, поскольку D – ограниченное связное множество (область).

Предположим противное – B не является открытым. Тогда для любой точки $z_1 \in B$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется точка z_0 из A такая, что $z_0 \in U(z_1, \varepsilon) \subset D$. Поскольку A открыто, то можно найти такое достаточно малое $\delta > 0$, что $U(z_0, \delta) \subset U(z_1, \varepsilon) \cap A$. Построим теперь аналитическую функцию $f(z)$, такую что

$$\operatorname{Re} f(z) = u(z) \text{ для всех } z \in U(z_1, \varepsilon).$$

Поскольку $u(z)$ постоянна в окрестности $U(z_0, \delta)$, то производная $f'(z) = 0$ для всех $z \in U(z_0, \delta)$. Из теоремы единственности для аналитических функций следует, что $f'(z) = 0$ для всех $z \in U(z_1, \varepsilon)$. Следовательно, $u(z) \equiv \operatorname{const}$ для всех $z \in U(z_1, \varepsilon)$. Противоречие. ►

Рассуждая аналогично доказательству принципа максимума для аналитических функций, можно получить следующее утверждение.

Теорема 4.6. (принцип максимума для гармонических функций). Непостоянная гармоническая функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ не достигает своего максимального и минимального значений в области D .

С л е д с т в и е 4.1. Пусть функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична в ограниченной области D , граница которой – замкнутая жорданова кривая $\Gamma = \partial D$. Если u непрерывна в замыкании $\operatorname{cl} D = D \cup \Gamma$ и принимает постоянные значений $u(z) \equiv K$ на Γ , то $u(z) \equiv K$ всюду в D .

С л е д с т в и е 4.2. Пусть функции $u_1, u_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармоничны в ограниченной области D , граница которой – замкнутая жорданова кривая $\Gamma = \partial D$. Если u_1, u_2 непрерывны в замыкании $\operatorname{cl} D = D \cup \Gamma$ и $u_1(z) \equiv u_2(z)$ на Γ , то $u_1(z) \equiv u_2(z)$ всюду в D .

Теорема 4.7 (Бореля – Каратеодори). Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| \leq R$. Обозначим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ и $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$. Тогда для любого r , $0 < r < R$,

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

◀ Если $f(z)$ тождественно равна постоянной, то левая и правая части неравенства совпадают. Поэтому достаточно рассмотреть случай непостоянной функции.

Если $f(0) = 0$, то из принципа максимума для гармонических функций вытекает, что $A(R) > A(0) = 0$. Поскольку для любого z , $|z| \leq R$, выполнены неравенства

$$\operatorname{Re} \{2A(R) - f(z)\} \geq A(R) > 0,$$

$$|2A(R) - f(z)|^2 \geq |f(z)|^2 + 4A(R)[A(R) - \operatorname{Re} f(z)] \geq |f(z)|^2,$$

то функция

$$g(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$$

является аналитической в круге $|z| \leq R$ и удовлетворяет в этом круге неравенству $|g(z)| \leq 1$. Тогда из леммы Шварца следует, что для любого r , $0 < r < R$,

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq r/R.$$

Используя связь между функциями f и g , отсюда получаем

$$|f(z)| = \left| \frac{2A(R)g(z)}{1+g(z)} \right| \leq \frac{2A(R)r/R}{1-r/R} = \frac{2rA(R)}{R-r}. \quad (4.6)$$

Откуда следует утверждение теоремы при $f(0) = 0$.

Если $f(0) \neq 0$, то доказательство вытекает из неравенства (4.6), примененного к функции $f(z) - f(0)$. ▶

Теорема 4.8. Пусть $f(z)$ — целая функция и $\operatorname{Re} f(z) \leq Mr^\lambda$ для всех z , $|z| = r \geq r_0$, и некоторого неотрицательного вещественного λ . Тогда $f(z)$ является полиномом степени не выше $[\lambda]$.

Следующие теоремы представляют собой гармонические аналоги интегральной теоремы Коши.

Лемма 4.1 (интегральная формула Пуассона для аналитических функций). Пусть функция $f(z)$ аналитична в области, содержащей единичный круг $|z| \leq 1$. Тогда для всех z , $|z| < 1$, справедливо представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

или, что эквивалентно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} f(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

◀ Из интегральной формулы Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - z} d\varphi \quad (|z| < 1). \quad (4.7)$$

Тогда для $z = 0$ требуемый результат следует из теоремы о среднем значении аналитической функции. Поэтому можно считать, что $z \neq 0$. Обозначим $z^* = 1/\bar{z}$ симметричную относительно единичной окружности точку.

Тогда для любого $|z| < 1$ имеем

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{z} f(\zeta)}{1 - \zeta \bar{z}} d\zeta. \quad (4.8)$$

Вычитая (4.8) из (4.7), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{1 - \zeta \bar{z}} \right] d\zeta.$$

С учетом того, что $|\zeta| = 1$, получаем первую из доказываемых формул. Вторая получается из первой, если положить $\zeta = e^{i\varphi}$. ►

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 4.9 (интегральная формула Пуассона для аналитических функций). Пусть функция $f(z)$ аналитична в области, содержащей круг $|z - a| \leq R$. Тогда для всех z , $|z - a| < R$, справедливо представление:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{R^2 - |z - a|^2}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - a},$$

или, что эквивалентно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z - a|^2}{|Re^{i\varphi} - (z - a)|^2} f(a + Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Теорема 4.10 (интегральная формула Пуассона для гармонических функций). Пусть функция $u(z)$ гармонична в области, содержащей круг $|z| \leq R$. Тогда для всех z , $|z| < R$, справедливо представление

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} u(\zeta) d\varphi,$$

или, что эквивалентно,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2} u(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Теорема 4.11. Пусть функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ аналитична в круге $|z| \leq 1$. Тогда для всех z , $|z| < 1$, справедливо представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) d\varphi + iv(0) \quad (\zeta = e^{i\varphi}).$$

Теорема 4.12. Пусть функция $u(z)$ гармонична в открытом единичном круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Тогда для всех $z = re^{i\theta}$, $r < 1$, справедливо представление

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} u(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Теорема 4.13 (теорема Шварца). Пусть функция F – непрерывная функция вещественной переменной, определенная на единичной окружности $|\zeta| = 1$. Тогда вещественнозначная функция $u(z)$, определенная равенством

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} F(e^{i\varphi}) d\varphi,$$

гармонична в круге $|z| < 1$ и для любого фиксированного t , $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\lim_{z \rightarrow e^{it}} u(z) = \lim_{\substack{r \rightarrow 1^- \\ \theta \rightarrow t}} u(re^{i\theta}) = F(e^{it}) \quad (|z| < 1).$$

(Если дополнительно положить $u(z) = F(z)$ для $|z| = 1$, то функция $u(z)$ является непрерывной в круге $|z| \leq 1$.)

Теорема 4.14 (неравенство Гарнака). Пусть $u(z)$ гармонична в круге $\Delta(z_0; R) = \{z : |z - z_0| < R\}$, причем $u(z) \geq 0$ для всех $z \in \Delta(z_0; R)$. Тогда для любого z в этом круге справедливо неравенство

$$u(z_0) \frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} \leq u(z) \leq u(z_0) \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|}.$$

Между гармоническими и аналитическими функциями есть еще одна связь. Гармоничность сохраняется при аналитических преобразованиях. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.15. Если функция $u(z)$ гармонична в области D , а функция $\varphi(\omega)$ аналитична в области G и принимает там значения из D , то композиция $u(\varphi(\omega)) = U(\omega)$ гармонична в G .

◀ Теорема доказывается прямым подсчетом, поскольку

$$\Delta U(\omega) = \Delta u(z) |\varphi(\omega)|^2. \blacktriangleright$$

4.2. Граничные значения гармонических и аналитических функций. Преобразование Гильберта

В настоящем разделе рассматриваются граничные свойства аналитических и гармонических функций в круге на комплексной плоскости. Формулировка этих свойств является очень важной для характеристики физических полей в композитах в окрестности линий раздела сред или компонентов композитов.

Рассмотрим функцию $F(z) = U(z) + iV(z)$, аналитическую в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Действительная $U(z)$ и мнимая $V(z)$ части аналитической функции – комплексно сопряженные гармонические в $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ функции. Аналитическая в круге функция $F(z)$ разлагается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, который равномерно сходится на компактных подмножествах круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Записав $z = re^{i\theta}$, имеем:

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (4.9)$$

где

$$A_n = \frac{1}{2} a_n, \quad n > 0;$$

$$A_0 = \operatorname{Re} a_0;$$

$$A_n = \frac{1}{2} \bar{a}_{-n}, \quad n < 0.$$

Таким образом, любая функция $U(z)$, гармоническая в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, допускает представление в виде ряда (4.9), равномерно сходящегося на компактных подмножествах этого круга.

Если $R > 1$, то при $r < 1$

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{it}) \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt.$$

Суммируя две геометрические прогрессии, получаем

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\varphi} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} \quad \text{при } 0 \leq r < 1.$$

Таким образом, имеет место представление Пуассона: если $U(z)$ – гармоническая функция в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, где $R > 1$, то при $0 \leq r < 1$

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{it}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} dt.$$

Это представление справедливо также и в тех случаях, когда подынтегральная функция U не обязательно гармонична в окрестности контура интегрирования.

Функция

$$P_r(\varphi) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\varphi} \quad (4.10)$$

называется *ядром Пуассона* для круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Пусть известно лишь, что функция $U(z)$ гармонична в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.16. Пусть $p > 1$, и пусть $U(z)$ – гармоническая функция в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Предположим, что средние

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\theta})|^p d\theta$$

равномерно ограничены относительно $r < 1$. Тогда существует такая функция $F \in L^p(-\pi, \pi)$, что

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} F(t) dt$$

для любых $0 \leq r < 1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Аналогичный результат справедлив и для случая $p = \infty$.

Теорема 4.17 (теорема Фату). Если $U(z)$ – ограниченная гармоническая функция в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, то существует такая функция $F \in L^\infty(-\pi, \pi)$, что

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} F(t) dt$$

для любых $0 \leq r < 1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Для случая $p = 1$ имеет место следующий результат.

Теорема 4.18. Если $U(z)$ – гармоническая функция в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и средние

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\theta})| d\theta$$

равномерно ограничены относительно $r < 1$, то существует конечная вещественная мера μ на $[-\pi, \pi]$, такая что

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\mu(t)$$

для любых $0 \leq r < 1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Следствие 4.3. Пусть $U(z)$ – функция, гармоническая и неотрицательная в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Тогда существует конечная положительная мера μ на $[-\pi, \pi]$, такая что

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t), \quad 0 \leq r < 1.$$

Если имеет место одно из представлений

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} F(t) dt,$$

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\mu(t),$$

то возникает задача нахождения связи между $U(z)$ и функцией $F(t)$ или мерой μ .

Ядро Пуассона (4.10) обладает следующими свойствами:

а) $P_r(\varphi) > 0$, $0 \leq r < 1$;

б) $P_r(\varphi + 2\pi) = P_r(\varphi)$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 2\pi$ для любого $0 \leq r < 1$.

Свойства а) и б) проверяются непосредственно, а свойство в) следует из разложения в ряд функции $P_r(\varphi)$.

Если $F \in L^p(-\pi, \pi)$, то удобно считать, что функция F периодически продолжена на все множество $\mathbb{R}$: $F(t+2\pi) = F(t)$.

Справедливы обращения теорем 4.16 – 4.18 о представлениях.

Теорема 4.19. Если $p \geq 1$, $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt$, где $F \in L^p(-\pi, \pi)$, то $U(z)$ – гармоническая в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \text{const}$, $0 \leq r < 1$.

◀ Пусть $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} F(t) dt = A_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда для $0 \leq r < 1$ имеем

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Поскольку ряд сходится равномерно во внутренней части круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (что означает равномерную сходимость на компактных подмножествах), то функция $U(z)$ гармонична в круге. Если функция F – вещественная, то ряд, очевидно, является вещественной частью аналитической функции, которая легко выписывается.

Для данного $r < 1$ в силу свойства б) и 2π -периодичности функции можно записать

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta - s) P_r(s) ds.$$

Рассмотрим теперь $G \in L^q(-\pi, \pi)$, $\|G\|_q = 1$, так что (для любого фиксированного r функция G , конечно, будет зависеть от r)

$$\sqrt[p]{\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\theta})|^p d\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} U(re^{i\theta}) G(\theta) d\theta.$$

По теореме Фубини интеграл справа равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta - s) P_r(s) G(\theta) d\theta ds,$$

что по модулю не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) \|F\|_p \|G\|_q ds = \|F\|_p$$

(в силу выбора G и свойства в)).

Наконец,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| U(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \leq \|F\|_p^p,$$

что завершает доказательство. ►

Ядро Пуассона $P_r(\theta)$ обладает еще одним свойством:

г) для любого $\delta > 0$ $P_r(\theta) \rightarrow 0$ равномерно для $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ при $r \rightarrow 1$.

Это непосредственно следует из формулы для $P_r(\theta)$.

Применяя это свойство, можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 4.20. Пусть функция F непрерывна на $\mathbb{R}$ и 2π -периодична, т. е. $F(t + 2\pi) = F(t)$. Пусть

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt.$$

Тогда $U(z) \rightarrow F(\varphi)$, когда $z \rightarrow e^{i\varphi}$ и сходимость равномерна по φ .

Замечание. Свойства а), б), в), г) показывают, что $\frac{1}{2\pi} P_r(\theta)$ представляет собой так называемую *аппроксимативную единицу*. Приведенная выше теорема имеет место не только для ядра Пуассона, но и для других ядер, являющихся аппроксимативными единицами.

Приведем теоремы о граничном поведении функции $U(re^{i\theta})$ при различных предположениях относительно функции F .

Теорема 4.21. Пусть $F \in L^1(-\pi, \pi)$, и пусть функция $F(t)$ непрерывна в точке θ_0 . Тогда $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt$ стремится к $F(\theta_0)$ при стремлении $re^{i\theta}$ к $e^{i\theta_0}$.

Теорема 4.22. Пусть $F \in L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$, и пусть $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt$. Тогда $\int_{-\pi}^{\pi} \left| U(re^{i\theta}) - F(\theta) \right|^p d\theta \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$, т. е. $U(re^{i\theta})$ стремится к $F(\theta)$ в L^p -норме при $r \rightarrow 1$.

Теорема 4.23. Пусть $F \in L^\infty(-\pi, \pi)$ и $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt$, тогда $U(re^{i\theta}) \xrightarrow{w^*} F(\theta)$ при $r \rightarrow 1$.

Пусть функция $U(z)$, гармоническая в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, допускает одно из представлений

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt, \quad F \in L^p(-\pi, \pi), \quad (4.11)$$

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t). \quad (4.12)$$

Исследуем поточечное поведение функции $U(z)$ при z , стремящемся к точке $e^{i\theta}$ на границе единичного круга. Нельзя изучить это поведение только на основе свойств а) – г) аппроксимативной единицы, для этого требуется более детальное рассмотрение свойств ядра $P_r(\theta)$.

Представление (4.12) для $U(z)$ является более общим и содержит представление (4.11), так как если $F \in L^p(-\pi, \pi)$ и мы возьмем $d\mu(t) = F(t)dt$, то μ будет мерой на $[-\pi, \pi]$. Удобно ввести функцию $\mu(\theta)$ ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$, задаваемую формулой

$$\mu(\theta) = \int_0^{\theta} d\mu(t). \quad (4.13)$$

Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 4.24 (теорема Фату). Пусть $-\pi < \varphi_0 < \pi$, и пусть производная $\mu'(\varphi_0)$ существует и конечна. Тогда $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$ стремится к $\mu'(\varphi_0)$ при $re^{i\theta}$, стремящемся к $e^{i\varphi_0}$ внутри любого сектора вида $|\theta - \varphi_0| \leq c(1 - r)$.

Замечание 1. Таким образом, предписывается, чтобы точка $z = re^{i\theta}$ стремилась к $e^{i\varphi_0}$, оставаясь внутри сектора раствора меньше 180° с вершиной в точке $e^{i\varphi_0}$, симметричного относительно радиуса, ведущего из 0 в $e^{i\varphi_0}$. В таком случае говорят, что $U(re^{i\theta}) \rightarrow \mu'(\varphi_0)$ при $re^{i\theta}$, стремящемся к $e^{i\varphi_0}$ по некасательным направлениям.

Замечание 2. Аналогичный результат имеет место и для $\varphi_0 = \pm\pi$ при условии, что существует производная $\mu'(\varphi_0)$.

Теорема 4.25. Пусть $1 \leq p < \infty$, и пусть $U(z)$ – функция, гармоническая в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для которой

$$\sqrt[p]{\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\theta})|^p d\theta} \leq c$$

при $0 \leq r < 1$. Тогда почти для всех θ при $z \rightarrow e^{i\theta}$ по некасательному направлению функция $U(z)$ стремится к конечному пределу $U(e^{i\theta})$, и для $0 \leq r < 1$

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} U(e^{it}) dt. \quad (4.14)$$

Исследуем далее граничное поточечное поведение функции $V(z)$, гармонически сопряженной с гармонической в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцией $U(z)$. В силу условий Коши – Римана сопряженные функции определены одна через другую с точностью до постоянного слагаемого:

$$V(z) = \int_0^z -\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy + V(0), \quad (4.15)$$

где $z = x + iy$, $|z| < 1$, интегрирование ведется по любой гладкой кривой, лежащей в единичном круге и соединяющей точки 0 и z .

Для функций в единичном круге обычно полагают $V(0) = 0$. Такую сопряженную с $U(z)$ гармоническую функцию будем обозначать далее через $\tilde{U}(z)$. Предположим, что

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta}. \quad (4.16)$$

Тогда, интегрируя в (4.15) по отрезку, соединяющему точки 0 и $z = re^{i\theta}$, получим представление:

$$\tilde{U}(re^{i\theta}) = -\sum_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn} n A_n r^{|n|} e^{in\theta}. \quad (4.17)$$

Функция (4.17), очевидно, гармоническая в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\tilde{U}(0) = 0$, а функция

$$U(re^{i\theta}) + i\tilde{U}(re^{i\theta}) = A_0 + \sum_1^{\infty} 2A_n r^n e^{in\theta} -$$

аналитическая функция в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Если $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$, где μ – мера на $[-\pi, \pi]$, то коэффициенты ряда (4.2.8) вычисляются по формуле

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t).$$

Подставляя их в (4.17), получим:

$$\tilde{U}(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn} n A_n r^{|n|} e^{in(\theta-t)} d\mu(t).$$

Функция

$$Q_r(\theta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn} n r^{|n|} e^{in\theta}$$

называется *сопряженным ядром Пуассона*. С помощью непосредственного суммирования геометрических прогрессий найдем, что

$$Q_r(\theta) = \frac{2r \sin \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.26. Если $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} d\mu(t)$, то гармонически сопряженная с U функция $\tilde{U}$ задается соотношением

$$\tilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r \sin(\theta-t)}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} d\mu(t). \quad (4.18)$$

Изучим граничное поведение гармонически сопряженной функции вблизи дуги, на которой исходная функция имеет непрерывную производную.

Пусть имеет место представление (4.11), в котором функция F принадлежит пространству $L^p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$. Предположим, что F определена с помощью 2π -периодического продолжения на $\mathbb{R}$, запишем:

$$\tilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta-t) F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2r \sin s}{1+r^2-2r \cos s} [F(\theta-s) - F(\theta+s)] ds.$$

Имеем

$$\frac{r \sin s}{1+r^2-2r \cos s} = \frac{2r \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{s}{2}}.$$

Если $\int_0^\pi \frac{|F(\theta-s) - F(\theta+s)|}{s} ds < \infty$, то получим:

$$\tilde{U}(re^{i\theta}) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{F(\theta-s) - F(\theta+s)}{\operatorname{tg} \frac{s}{2}} ds \text{ при } r \rightarrow 1,$$

причем интеграл правой части сходится абсолютно.

Последнее соотношение имеет место, в частности, если производная $F'(\theta)$ существует и конечна. Более того, если $F'(\theta)$ непрерывна для $\alpha < \theta < \beta$, то $\tilde{U}(z)$ обладает непрерывным продолжением вплоть до любой замкнутой дуги, целиком принадлежащей открытой дуге $\{e^{i\theta}; \alpha < \theta < \beta\}$ единичной окружности, и для таких θ

$$\tilde{U}(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} \tilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{F(\theta-t) - F(\theta+t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt,$$

где интеграл сходится абсолютно.

Предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^\pi \frac{F(\theta-t) - F(\theta+t)}{2\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$ существует почти всюду, если

$$F \in L^2(-\pi, \pi).$$

Замечание. Соотношения $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases}$ с учетом абсо-

лютной сходимости показывают, что если функция $U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^\infty A_n r^{|n|} e^{in\theta}$

гармонична в круге $|z| < 1$, то

$$\int_{-\pi}^\pi \left| U(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^\infty |A_n|^2 r^{2|n|}$$

для $0 \leq r < 1$.

Отсюда вытекает следующая лемма.

Лемма 4.2. Если функция $U(z)$ гармонична в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, то сопряженная гармоническая $\tilde{U}(z)$ представляется интегралом

$$\tilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} F(t) dt$$

с плотностью $F \in L^2(-\pi, \pi)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты ряда (4.16) удовлетворяют условию

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |A_n|^2 < \infty.$$

Теорема 4.27. Пусть $F \in L^2(-\pi, \pi)$ — 2π -периодическая функция. Тогда $\tilde{F}(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{F(\theta - t) - F(\theta + t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$ существует для почти всех θ , при этом $\tilde{F} \in L^2(-\pi, \pi)$ и $\|\tilde{F}\|_2 \leq \|F\|_2$ и представима интегралом Пуассона с функцией F .

Если

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt,$$

то интеграл в представлении сопряженной гармонической функции

$$\tilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta - t) F(t) dt$$

совпадает с $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \tilde{F}(t) dt$.

Отображение, переводящее граничную функцию для заданной гармонической в граничную функцию для сопряженной гармонической, называется *преобразованием Гильберта*. Из теоремы 4.27 следует, что если граничная функция F для гармонической в единичном круге функции удовлетворяет условиям: F — 2π -периодическая, $F \in L^2(-\pi, \pi)$, то преобразование Гильберта определяется формулой

$$\tilde{F}(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{F(\theta - t) - F(\theta + t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (4.19)$$

Такое представление справедливо и в некоторых других классах функций F . Формулу (4.19) можно записать также исходя лишь из условий на заданную гармоническую функцию в единичном круге.

4.3. Конформные отображения

Определение 4.3. Функция комплексного переменного $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется *регулярной в точке* $z_0 \in D$, если она представима в окрестности этой точки сходящимся степенным рядом по степеням $(z - z_0)$.

Регулярная во всех точках области D функция называется *регулярной в этой области*.

Определение 4.4. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется локально однолистной в окрестности $U(z_0)$ точки z_0 , если $\forall z_1, z_2 \in U(z_0), z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, и однолистной в области D , если существует f^{-1} , однозначная на $f(D)$.

Определение 4.5. Отображение $f : D \rightarrow G = f(D)$ называется конформным в области D , если:

- 1) f однолисна в области D ;
- 2) f регулярна в области D за исключением, может быть, одной точки, в которой она имеет полюс первого порядка.

Конформное отображение обладает следующими свойствами:

1. Постоянство растяжений в точке.
2. Сохранение углов (по величине и направлению).

Ниже приведены теоремы, называемые основными принципами теории конформных отображений.

Теорема 4.28 (принцип сохранения области). Пусть функция f регулярна в области D и $f(z) \neq \text{const}$. Тогда $f(D)$ является областью.

Теорема 4.29 (принцип соответствия границ). Пусть D и G – области в $\mathbb{C}$, границами которых являются простые замкнутые кусочно-гладкие кривые L и Γ . Если функция f конформно отображает D на G , то:

- 1) $f(z)$ можно продолжить на замыкание $\bar{D}$ области D ;
- 2) f отображает L на Γ взаимно однозначно.

Теорема 4.30 (обратный принцип соответствия границ, или критерий однолистности). Пусть функция f регулярна в области D и непрерывна вплоть до границы $L = \partial D$, где L – простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Пусть $f(D) = G$ является областью в $\mathbb{C}$, граница которой Γ – простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Тогда f однолисна в D тогда и только тогда, когда f взаимно однозначно отображает L на Γ .

Теорема 4.31 (теорема Римана о конформных отображениях).

Пусть D – односвязная область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда:

1) существует функция f , которая конформно отображает область D на единичный круг $\mathbf{D} = \{w: |w| < 1\}$;

2) эта функция единственна, если выполняются условия

$$f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \alpha; \quad z_0 \in D, w_0 \in \mathbf{D}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1. Исключительными для данной теоремы являются следующие области $D = \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$.

Замечание 2. В теореме 4.31 и далее в этом разделе речь идет о конформных отображениях односвязных областей. Конформные отображения многосвязных областей обсуждаются в разделе 4.5.

При конформных отображениях сохраняется свойство гармоничности функций в области. Связь теории гармонических функций с теорией конформных отображений проявляется также в связи соответствующих граничных задач.

Пусть f отображает область D на единичный круг $\mathbf{D} = \{w: |w| < 1\}$. С помощью конформных отображений можно решить для этой области задачу Дирихле – отыскание гармонической в области функции по заданной граничной функции u . Если предположить, что граница области D является простой кусочно-гладкой кривой, то, как известно из теории конформных отображений, функция f продолжается до непрерывного и взаимно однозначного отображения $\overline{D}$ на $\overline{\mathbf{D}}$. Поэтому на единичной окружности $|w|=1$ мы можем рассмотреть обратную к f функцию f^{-1} и с ее помощью перенести на эту окружность заданные граничные значения: $U(w) = u(f^{-1}(w))$. Теперь по этим значениям с помощью интеграла Пуассона можно построить гармоническую в круге $|w| < 1$ функцию

$$U(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega) \frac{1 - |w|^2}{|1 - w\overline{\omega}|^2} d\tau, \quad \omega = e^{i\tau}.$$

Остается вернуться к переменной z и воспользоваться сохранением гармоничности при конформных отображениях. Мы получим искомое решение: $u(z) = U(f(z))$.

Во многих случаях оказывается полезным обратный ход – построение конформного отображения области D на единичный круг при помощи решения в D задачи Дирихле. Зададим точку $z_0 \in D$, которую искомое

отображение f переводит в центр круга $w = 0$. В этой точке функция f должна иметь нуль, и притом первого порядка, ибо в окрестности нулей высшего порядка аналитическая функция не взаимно однозначна. Поэтому в окрестности z_0 функция f должна иметь тейлоровское разложение вида:

$$f(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

где $c_1 = f'(z_0) \neq 0$. Отсюда следует, что функция $\frac{f(z)}{z - z_0} = c_1 + c_2(z - z_0) + \dots$

аналитична в точке z_0 , а в остальных точках области D она и подавно аналитична. Эта функция нигде в области D не обращается в нуль, потому что числитель дроби равен нулю лишь в точке $z = z_0$, но

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = c_1 \neq 0$. Но тогда логарифм этой функции аналитичен в D , а

значит, его действительная часть, т. е. функция

$$u(z) = \ln \frac{|f(z)|}{|z - z_0|},$$

должна быть гармонической в D .

Если f отображает D на единичный круг, то $|f(z)|$ должен равняться 1 на границе D . Следовательно, граничные значения гармонической функции $u(z)$ равны $u(\zeta) = \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|}$, $\zeta \in \partial D$ (и не зависят от конформного отображения f). Эти значения определяются лишь геометрической формой границы области и выбранной точкой z_0 .

Чтобы найти искомое конформное отображение нужно, следовательно, выполнить такие операции:

1) по известным граничным значениям $u(\zeta)$ построить гармоническую в D функцию $u(z)$ (задача Дирихле);

2) найти функцию $v(z)$, гармонически сопряженную с $u(z)$ (интегрирование). Тем самым определена аналитическая в области D функция

$$g(z) = u(z) + iv(z) = \ln \frac{f(z)}{z - z_0},$$

с помощью которой искомое отображение находится по формуле

$$f(z) = (z - z_0)e^{g(z)}.$$

Из конструкции видно, что функция f аналитична в D и что на границе D ее модуль равен 1. Однако остается еще доказать, что эта функция взаимно однозначно отображает D на единичный круг. Это можно сделать непосредственной проверкой.

4.4. Граничное поведение конформных отображений

Определение 4.6. *Жордановой кривой* называется непрерывный взаимно однозначный образ в $\mathbb{C}$ единичной окружности. Непрерывная взаимно однозначная функция, отображающая окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ на жорданову кривую, называется параметризацией кривой.

Определение 4.7. *Жордановой дугой* называется непрерывный взаимно однозначный образ в $\mathbb{C}$ интервала или отрезка вещественной прямой.

Заметим, что жорданова кривая может быть очень сложным объектом. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.32 (теорема Жордана). Пусть Γ – жорданова кривая. Тогда $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент D и Ω , одна из которых, например Ω , содержит все z с достаточно большим модулем. Если точка $\omega \in \Gamma$, то любая ее окрестность содержит как точки из D , так и точки из Ω .

В этом случае Ω называют внешностью кривой Γ , а D – внутренностью кривой Γ и обозначают соответственно $\Omega = \text{ext } \Gamma$ и $D = \text{int } \Gamma$.

Можно доказать, что имеет место следующее свойство: если Γ – жорданова кривая, а D – ее внутренность, то D односвязна.

Пусть Γ – жорданова кривая, а $D = \text{int } \Gamma$ – ее внутренность. Теорема Римана гарантирует, что существует конформное отображение Φ единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на область D , так как область D односвязна.

Имеют место следующие важные результаты.

Теорема 4.33 (теорема Каратеодори). Конформное отображение Φ единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на внутренность D жордановой кривой Γ обладает непрерывным взаимно однозначным продолжением вплоть до $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Это продолжение отображает $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ на Γ .

Для того чтобы сформулировать следующий результат, введем следующее определение: будем называть некоторую дугу кривой *дугой Ляпунова*, если она спрямляема, имеет в каждой точке касательную, причем угол наклона ϑ касательной к положительному направлению оси Ox как функция длины дуги удовлетворяет условию Гельдера, т. е. существуют постоянные $C > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$, такие что

$$|\vartheta(s_2) - \vartheta(s_1)| < C |s_2 - s_1|^\alpha, \quad \forall s_1, s_2.$$

Теорема 4.34 (теорема Келлога – Варшавского). Пусть функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение области D на область D^* , при этом некоторая граничная дуга Ляпунова $\gamma \subseteq \partial D$ переходит в граничную дугу Ляпунова $\gamma^* \subseteq \partial D^*$. Тогда функция $f(z)$ имеет на γ производную, которая не обращается в 0 и удовлетворяет условию Гельдера.

Теорема 4.35 (теорема Линделёфа). Пусть D – односвязная область, ограниченная простой жордановой кривой Γ . Примем, не ограничивая общности, что $0 \in \Gamma$. Пусть функция $f(z)$ конформно отображает $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на D . Функция $f(z)$ допускает непрерывное взаимно однозначное продолжение вплоть до $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, отображающее эту окружность на Γ , которое индуцирует параметризацию кривой Γ .

Если Γ имеет в точке $0 = f(1)$ касательную, то

$$\arg f(z) - \arg(1 - z) \rightarrow \text{const при } |z| < 1, z \rightarrow 1.$$

Это означает, что конформные образы секторов единичного круга с вершинами в 1 асимптотически являются такими же, как секторы в области D того же раствора с вершинами в нуле.

В доказательстве теоремы Линделёфа используется следующее свойство функции $f(z)$, которое может быть установлено независимо от теоремы Линделёфа с помощью теоремы 4.32 (Жордана): для конформного отображения f единичного круга на область D , ограниченную жордановой кривой, выполнено неравенство

$$|\arg f(z)| < \text{const при } |z| < 1.$$

◀ *Доказательство теоремы Линделёфа.* Поскольку функция $f(e^{i\theta})$ непрерывна и $f(e^{i\theta}) \neq 1$ при $e^{i\theta} \neq 1$ (Γ – простая жорданова кривая), то функция $\arg f(e^{i\theta})$ (определенная как $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \arg f(z)$) является непрерывной для всех точек $e^{i\theta}$, кроме точки 1. По свойству, приведенному выше, эта функция ограничена.

Поскольку Γ имеет касательную в точке 1, то $\arg f(e^{i\theta})$ стремится к определенному пределу α при $\theta \rightarrow +0$ и стремится к $\alpha + \pi(2k + 1)$ при $\theta \rightarrow -0$. Из соображений ориентации следует, что $k = 0$. Функция $\arg f(e^{i\theta}) - \arg(1 - e^{i\theta})$ непрерывна в 0, где она равна $\alpha - \frac{\pi}{2}$. Поскольку

функция $\arg f(z) - \arg(1 - z)$ гармонична и ограничена в $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, то из теоремы 4.25 следует, что

$$\arg f(re^{i\theta}) - \arg(1 - re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} \arg \left[\frac{f(e^{it})}{1 - e^{it}} \right] dt$$

для $|z| < 1$.

Из непрерывности (см. теорему 4.20) следует:

$$\arg f(z) - \arg(1 - z) \rightarrow \alpha - \frac{\pi}{2} \text{ при } z \rightarrow 1. \blacktriangleright$$

Теорема Линделёфа имеет важные приложения к исследованию граничного поведения функций, аналитических в областях, ограниченных простыми жордановыми спрямляемыми кривыми. Спрямляемая жорданова кривая имеет касательную почти в каждой своей точке. Следовательно, почти во все граничные точки области (т. е. области, ограниченной простой жордановой спрямляемой кривой) переносится с помощью конформного отображения из единичного круга понятие углового предельного значения. Такое конформное отображение переводит всякий лежащий в единичном круге сектор раствора, меньшего 180° , с вершиной в прообразе граничной точки в подмножество области, являющейся асимптотическим сектором того же раствора с вершиной в точке на границе.

В частности, этот факт позволяет распространить многие результаты о граничном поведении функций, аналитических в единичном круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, на функции, ограниченные спрямляемой жордановой кривой.

Рассмотрим область D , ограниченную спрямляемой жордановой кривой Γ . Пусть f — конформное отображение единичного круга $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на область D .

Имеет место следующая теорема

Теорема 4.36. Производная конформного отображения $f : \mathbf{D} \rightarrow D$ принадлежит классу Харди H^1 , т. е.

$$f'(z) \in H^1 = \left\{ \varphi \in H(\mathbf{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})| d\theta < \infty \right\}.$$

Из нее следуют два важных утверждения — теоремы 4.37 и 4.38.

Теорема 4.37 (теорема Ф. и М. Риссов). Если J — дуга единичной окружности и $\Lambda = f(J)$, то

$$\text{длина } \Lambda = \int_J |f'(e^{i\theta})| d\theta.$$

Теорема 4.38 (теорема Харди). Степенной ряд функции $f(z)$, реализующей конформное отображение D на D абсолютно сходится в замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

4.5. Конформные отображения многосвязных областей

В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемые области не содержат изолированных граничных точек. Если функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область G и точка z_0 – изолированная граничная точка области D , тогда можно доказать, что точка z_0 должна быть устранимой особой точкой или полюсом первого порядка функции $f(z)$. Более того, если через D_* обозначить область, полученную присоединением к области D всех ее изолированных граничных точек, то функция $w = f(z)$ будет однолистной в D_* .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.39. Пусть область D – N -связная область плоскости z и функция $w = f(z)$ является однолистной мероморфной функцией в D , которая отображает D в область G плоскости w . Тогда G также является N -связной областью.

Сформулированная теорема показывает, что N -связная область при конформном отображении должна сохранять порядок связности. Но если две многосвязные области имеют один и тот же порядок связности, означает ли это, что между ними можно построить конформное отображение? В общем случае это неверно. В дальнейшем ограничимся рассмотрением двусвязных областей. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.40. Любую двусвязную область можно конформно отобразить на концентрическое кольцо.

Рассмотрим вопрос о существовании конформного отображения между произвольными двусвязными областями. С учетом теоремы 4.40 достаточно рассмотреть возможность конформного отображения одного концентрического кольца на другое.

Теорема 4.41. Аналитическая однолистная функция, отображающая кольцо $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $\rho_1 < |w| < \rho_2$, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (4.20)$$

◀ Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$. В противном случае, как установлено в начале раздела, можно свести задачу к задаче существования конформного отображения между двумя односвязными областями присоединением изолированной граничной точки области к самой области.

Достаточность очевидна, так как если условие (4.20) выполняется, то функция

$$w = f(z) = \frac{\rho_1}{r_1} z \text{ или } w = f(z) = \frac{r_1 \rho_2}{z}$$

конформно отображает кольцо $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $\rho_1 < |w| < \rho_2$.

Необходимость. С помощью принципа симметрии можно продолжить аналитически функцию $w = f(z)$ в области

$$\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1 \text{ и } r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1},$$

которые симметричны кольцу $r_1 < |z| < r_2$ относительно окружностей $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$ соответственно. Следовательно, $w = f(z)$ отображает кольцо $r_1 \leq |z| \leq r_2$ биективно и взаимно непрерывно на кольцо $\rho_1 < |w| < \rho_2$, и отображает окружности $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$ на окружности $|w| = \rho_1$ и $|w| = \rho_2$ соответственно или на окружности $|w| = \rho_2$ и $|w| = \rho_1$ соответственно. Полученная в результате такого аналитического продолжения функция

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\rho_1^2}{f(r_1^2/\bar{z})}, & \frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1, \\ f(z), & r_1 \leq |z| \leq r_2, \\ \frac{\rho_2^2}{f(r_2^2/\bar{z})}, & r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1} \end{cases}$$

однолистка и аналитична внутри кольца $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ и отображает его

на кольцо $\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < |w| < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$. Аналогично строится функция $F(z)$ во втором случае.

Далее применим принцип симметрии для аналитического продолжения $w = f(z)$ на кольцо:

$$r_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 < |z| < r_2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^4,$$

продолженная функция будет конформно отображать это кольцо на

$$\rho_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^4 < |w| < \rho_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^4.$$

В результате получим, что построенная с помощью симметрий функция конформно отображает область $0 < |z| < \infty$ на область $0 < |w| < \infty$. При этом в первом случае имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \infty, \quad (4.21)$$

а во втором:

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0. \quad (4.22)$$

Таким образом, функция $w = F(z)$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость на себя, и поэтому функция $F(z)$ является дробно-линейной. С учетом формул (4.21) и (4.22) получим:

$$F(z) = az \quad \text{или} \quad F(z) = \frac{a}{z},$$

где a – некоторое комплексное число. В частности, $f(z) = az$ или $f(z) = \frac{a}{z}$ при $r_1 < |z| < r_2$. Очевидно, что (4.20) выполняется в обоих случаях. ►

Рассмотрим конформные отображения многосвязной области на круговые области. *Круговой областью* называется область, граница которой состоит из объединения окружностей. Приведем теоремы о существовании и единственности однолистной функции, которая конформно отображает многосвязную область на круговую.

Лемма 4.3. Предположим, что D – N -связная круговая область, полученная удалением $N-1$ круга из единичного круга $\{z : |z| < 1\}$, причем $z = 0 \in D$, и G – N -связная круговая область, полученная удалением $N-1$ круга из единичного круга $\{w : |w| < 1\}$, причем $w = 0 \in G$. Если

$w = f(z)$ конформно отображает область D на область G и удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $f(0) = 0, f(1) = 1$;
- 2) $f(a_j) = a_j$, где $a_j (j = 1, 2, 3)$ – различные точки окружности $|z| = 1$, то $w = f(z) = z$.

◀ Пусть $\Gamma_j \equiv \{ |z - z_j| = \gamma_j \} (j = 1, \dots, N)$ – граничные окружности области D , где $\Gamma_1 = \{ z : |z| = 1 \}$, $L_j \equiv \{ |w - w_j| = \rho_j \} (j = 1, \dots, N)$ – граничные окружности области G , где $L_1 = \{ w : |w| = 1 \}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $w = f(z)$ отображает Γ_j на $L_j (j = 1, \dots, N)$. Обозначим через 2η кратчайшее расстояние между Γ_j и $z = 0$, тогда понятно, что $\eta > 0$. Во-первых, продолжим по симметрии $f(z)$ на внешность области D , получим:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \bar{D}, \\ \frac{\rho_j^2}{f\left(\frac{\gamma_j^2}{\bar{z} - \bar{z}_j} + z_j\right) - w_j} + w_j, & z \in D_j, \end{cases}$$

где $D_1 : 1 < |z| < \frac{1}{1-\eta}$ и $D_j : \frac{\gamma_j^2}{\gamma_j + \eta} < |z - z_j| < \gamma_j, j = 2, \dots, N$. Функция

$w = F(z)$ – однолистная аналитическая в области $\bar{D} \cup \bigcup_{j=1}^N D_j$. Обозначим

$w = w(z) = F(z) - z, z \in \bar{D} \cup \bigcup_{j=1}^N D_j$, и предположим, что $w(z)$ не равна

тождественно нулю. Поскольку нули аналитической функции являются изолированными, то можно найти положительное число $\delta, 0 < \delta < \eta$, такое что $w(z)$ не имеет нулей в следующих областях:

$$D'_1 : 1 < |z| \leq \frac{1}{1-\delta},$$

$$\tilde{D}_1 : 1 - \delta \leq |z| < 1,$$

$$D'_j : \frac{\gamma_j^2}{\gamma_j^2 + \delta} \leq |z - z_j| < \gamma_j,$$

$$\tilde{D}_j : \gamma_j < |z - z_j| \leq \gamma_j + \delta (j = 2, \dots, N).$$

Обозначим

$$w_j = z_j, \quad \rho_j = \gamma_j \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$w_j = z_j, \quad \rho_j \neq \gamma_j \quad (j = m+1, \dots, l),$$

$$w_j \neq z_j \quad (j = l+1, \dots, N)$$

и определим

$$\Gamma_{\delta_1} \equiv \left\{ z : |z| = \frac{1}{1-\delta} \right\},$$

$$\tilde{\Gamma}_{\delta_1} \equiv \{ z : |z| = 1 - \delta \},$$

$$\Gamma_{\delta_j} \equiv \left\{ z : |z - z_j| = \frac{\gamma_j^2}{\gamma_j + \delta} \right\},$$

$$\tilde{\Gamma}_{\delta_j} \equiv \{ z : |z - z_j| = \gamma_j + \delta \} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Пусть $D_\delta = \bar{D} \cup \bigcup_{j=1}^m D'_j$, $\tilde{D}_\delta = D - \bigcup_{j=1}^m \tilde{D}_j$, где $\Gamma_\delta = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_{\delta_j} \cup \bigcup_{j=m+1}^N \Gamma_j$ является границей $\tilde{D}_\delta$. Используя N_D и N_{Γ_1} для обозначения нулей функции $w(z)$ в области D и на единичной окружности Γ_1 соответственно, по принципу аргумента для аналитических функций получим:

$$\Delta_{\Gamma_\delta} \arg w(z) \geq 2\pi(N_D + N_{\Gamma_1}).$$

Отметим, что

$$w(z) = F(z) - z =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{f(1/\bar{z})} - \frac{1}{1/\bar{z}} = \frac{\overline{-w(\xi)}}{f(\xi)\xi}, \quad \xi = \frac{1}{\bar{z}}, \quad |z| = \frac{1}{1-\delta}, \\ \frac{\gamma_j^2}{f(\gamma_j^2/(\overline{z-z_j}) + z_j) - z_j} - \frac{\gamma_j^2}{(\gamma_j^2/(\overline{z-z_j}) + z_j) - z_j} = \frac{-\gamma_j^2 \overline{w(\xi)}}{(f(\xi) - z_j)(\xi - z_j)}. \end{cases}$$

Тогда для $\xi = \gamma_j^2/(\overline{z-z_j}) + z_j$, $|z - z_j| = \frac{\gamma_j^2}{\gamma_j + \delta}$ ($j = 1, \dots, m$) получим:

$$\Delta_{\Gamma_{\delta_1}} \arg w(z) = \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta_1}} \arg f(\xi) + \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta_1}} \arg \xi - \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta_1}} \arg w(\xi) = 4\pi - \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta_1}} \arg w(\xi),$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma_{\delta j}} \arg w(z) &= \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta j}} \arg [f(\xi) - z_j] + \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta j}} \arg (\xi - z_j) - \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta j1}} \arg w(\xi) = \\ &= -4\pi - \Delta_{\tilde{\Gamma}_{\delta j}} \arg w(\xi), \quad j = 2, \dots, m,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma_j} \arg w(z) &= \Delta_{\Gamma_j} \arg ([f(z) - z_j] - (z - z_j)) = \\ &= \Delta_{\Gamma_j} \arg [f(z) - z_j] - \Delta_{\Gamma_j} \arg \left[1 - \frac{z - z_j}{f(z) - z_j} \right] = -2\pi, \quad j = m+1, \dots, l.\end{aligned}$$

Изобразим окружности Γ_j и L_j , $l+1 \leq j \leq N$, на одной комплексной плоскости. Можно доказать, что

$$\Delta_{\Gamma_j} \arg w(z) \leq 0, \quad l+1 \leq j \leq N. \quad (4.23)$$

Если Γ_j и L_j не пересекаются и не касаются друг друга (если касаются внешним образом, то $f(z) \neq z$ в точке касания), тогда по крайней мере одно из приведенных ниже неравенств выполняется на Γ_j (за исключением, быть может, z_j или w_j):

1. $|f(z) - z_j| > |z - z_j|$,
2. $|f(z) - w_j| < |z - w_j|$.

В первом случае имеем:

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma_j} \arg w(z) &= \Delta_{\Gamma_j} \arg (f(z) - z_j - (z - z_j)) = \\ &= \Delta_{\Gamma_j} \arg [f(z) - z_j] + \Delta_{\Gamma_j} \arg \left[1 - \frac{z - z_j}{f(z) - z_j} \right] \leq 0.\end{aligned}$$

Аналогично для второго случая. Предположим сначала, что Γ_j и L_j касаются внешним образом в точке A , в которой $f(z) = z$ (рис. 4.1.). Если z начинает движение от точки A по окружности Γ_j в положительном направлении, то вектор $f(z) - z$ переходит из положения $\overrightarrow{AB_1}$ в положение $\overrightarrow{AB_2}$. Это показывает, что $\Delta_{\Gamma_j} \arg [f(z) - z] = -\pi < 0$.

Предположим, что Γ_j и L_j пересекаются в двух точках A_1 и A_2 , в которых $f(z) = z$ (рис. 4.2). Обозначим через Γ_* часть круговой дуги, которая обходится вдоль Γ_j в положительном направлении от точки A_1

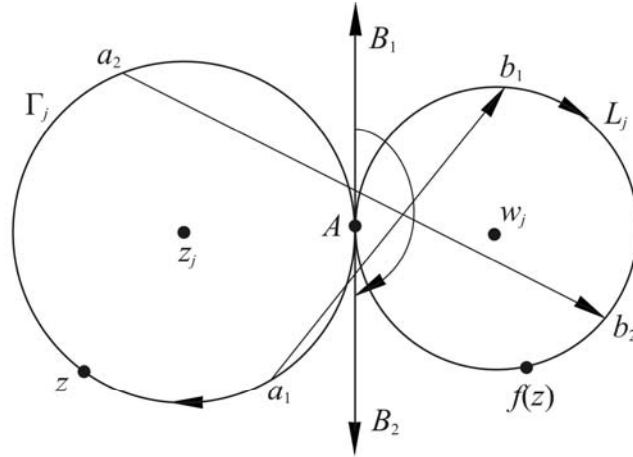


Рис. 4.1. Случай внешнего касания окружностей Γ_j и L_j

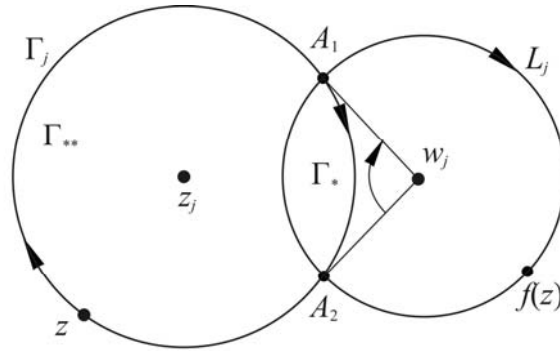


Рис. 4.2. Случай пересечения окружностей Γ_j и L_j

к точке A_2 . Пусть $\Gamma_{**} = \Gamma_j - \Gamma_*$. Для $z \in \Gamma_*$ $f(z)$ лежит во внешности Γ_j и $|f(z) - w_j| > |z - w_j|$. Для $z \in \Gamma_{**}$ $f(z)$ лежит во внутренности Γ_j и $|f(z) - w_j| < |z - w_j|$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma_j} \arg[f(z) - z_j] &= \Delta_{\Gamma_*} \arg[f(z) - w_j] + \Delta_{\Gamma_*} \arg \left[1 - \frac{z - w_j}{f(z) - w_j} \right] + \\ &+ \Delta_{\Gamma_{**}} \arg[f(z) - w_j] + \Delta_{\Gamma_{**}} \arg \left[1 - \frac{z - w_j}{f(z) - w_j} \right] \leq -2\pi + \pi + \pi = 0, \end{aligned}$$

где $\Delta_{\Gamma_{**}} \arg(z - w_j) = \Delta_{\Gamma_{**}} \arg(f(z) - w_j)$. Остальные случаи могут быть проанализированы аналогично.

Объединяя все полученные выше соотношения, имеем:

$$N_D + N_{\Gamma_1} \leq \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_8} \arg w(z) = 2(2-l) - \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_8} \arg w(z) + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{j=l+1}^N \Delta_{\Gamma_j} \arg w(z) \leq 2 - N_D \Rightarrow 2N_D + N_{\Gamma_1} \leq 2. \quad (4.24)$$

Однако, по условию данной леммы $w(0) = f(0) - 0 = 0$, $w(1) = f(1) - 1 = 0$, следовательно, $N_D \geq 1, N_{\Gamma_1} \geq 1$, что противоречит (4.24). Более того, из второго условия леммы $w(a_j) = f(a_j) - a_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, следовательно, $N_{\Gamma_1} \geq 3$, что снова противоречит (4.24). Эти противоречия доказывают, что

$$w(z) \equiv 0, \text{ т. е. } f(z) \equiv z, \quad z \in D.$$

Что и требовалось доказать. ►

Из леммы 4.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.42. Пусть D — N -связная область комплексной плоскости z , содержащей бесконечно удаленную точку. Тогда существует не более одной однолистной мероморфной функции $w = f(z)$ в D , которая конформно отображает D на круговую область G плоскости w , причем $w(\infty) = \infty$ и в окрестности точки $z = \infty$ имеет место разложение

$$w = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots \quad (4.25)$$

Для доказательства теоремы существования конформного отображения многосвязной области на круговую используется метод связности.

Теорема 4.43. Пусть D — N -связная область комплексной плоскости z , содержащей бесконечно удаленную точку. Тогда существует однолистная мероморфная функция $w = f(z)$ в D , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $w = f(z)$ конформно отображает D на N -связную круговую область плоскости ω ;
- 2) $w = f(z)$ отображает $z = \infty$ в $\omega = \infty$, и в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение

$$w = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots \quad (4.26)$$

4.6. Группы Шоттки

Конечное или бесконечное множество преобразований называют *группой* относительно групповой операции, именуемой произведением, если:

а) вместе с каждым преобразованием множеству принадлежит и обратное преобразование;

б) произведение любых двух преобразований, принадлежащих множеству, есть преобразование, принадлежащее множеству.

Под такое определение подходят множества различных типов преобразований. В случае множества дробно-линейных преобразований групповой операцией является композиция преобразований.

Из пункта б) определения следует, что преобразование, равносильное совокупности последовательно выполненных преобразований, принадлежащих множеству, также принадлежит этому множеству. В частности, любая положительная или отрицательная целая степень принадлежащего группе преобразования T также принадлежит группе. Преобразование $TT^{-1}(=id)$ также принадлежит группе. Значит, каждая группа содержит тождественное преобразование.

Например, множество всех дробно-линейных преобразований, оставляющих неизменной некоторую фигуру плоскости z , есть группа. В частности, множество всех дробно-линейных преобразований, оставляющих неподвижной фиксированную точку, есть группа. Множество вращений относительно начала координат, порожденное преобразованиями

$z' = z, e^{\frac{2\pi i}{m}} z, e^{\frac{4\pi i}{m}} z, \dots, e^{\frac{2(m-1)\pi i}{m}} z$, также образует группу.

Определение 4.8. Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ и $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N$ – два семейства окружностей. Пусть окружности каждого семейства расположены вне друг друга (т. е. окружности каждого из семейств не налегают друг на друга). Пусть T_j – дробно-линейное преобразование относительно z или $\bar{z}$, которое отображает Q_j на Q'_j и внутренность каждой окружности Q_j на внешность окружности Q'_j . Такое преобразование порождает группу K_j . Композиция этих групп $K_j, j=1, 2, \dots, N$, называется *группой Шоттки*, порожденной преобразованиями $T_j, j=1, 2, \dots, N$.

Группы Шоттки в общем случае имеют достаточно сложную структуру. Поэтому нет возможности доказать в общем виде свойства таких групп.

Рассмотрим специальный случай группы Шоттки, когда порождающее ее преобразование – это преобразование симметрии относительно

окружностей Q_j ($Q_j = Q'_j$). Пусть $Q_j = Q_j(a_j, r_j) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| = r_j\}$, $j = 1, 2, \dots, N$ – семейство окружностей на комплексной плоскости. Рассмотрим отображения

$$z_{(j_m, j_{m-1}, \dots, j_1)}^* := \left(z_{(j_{m-1}, \dots, j_1)}^* \right)_{(j_m)}^*, \quad (4.27)$$

где $z_{(j)}^* = \frac{r_j^2}{z - a_j} + a_j$ – преобразование симметрии относительно окружности Q_j . Таким образом, $z_{(j_m, j_{m-1}, \dots, j_1)}^*$ – композиция последовательно выполненных преобразований симметрии относительно окружностей $Q_{j_1}, \dots, Q_{j_{m-1}}, Q_{j_m}$. В наборе индексов $j_m, j_{m-1}, \dots, j_1$ два рядом стоящих индекса не являются равными. Число m называют *уровнем отображения* $z_{(j_m, j_{m-1}, \dots, j_1)}^*$. Если m – четное, то отображения представляют собой преобразования Мебиуса. Если m – нечетное, то отображения представляют собой преобразования Мебиуса относительно $\bar{z}$. Эти отображения можно записать в виде

$$\varphi_k(z) = (\alpha_k z + \beta_k) / (\gamma_k z + \delta_k), \text{ если } m \text{ – четное,}$$

$$\varphi_k(\bar{z}) = (\alpha_k \bar{z} + \beta_k) / (\gamma_k \bar{z} + \delta_k), \text{ если } m \text{ – нечетное,}$$

где $\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1$.

Таким образом, $\varphi_0(z) = z$, $\varphi_1(\bar{z}) = z_{(1)}^*$, $\varphi_2(z) = z_{(2)}^*$, $\dots$, $\varphi_m(z) = z_{(m)}^*$, $\varphi_{m+k}(z) = z_{(k+1,1)}^*$, $k \geq 1, \dots$.

Функции φ_k порождают группу Шоттки $\mathbf{K}$. Обозначим через G подгруппу группы $\mathbf{K}$, содержащую отображения φ_k четного порядка, а через F – семейство, содержащее отображения φ_k нечетного порядка.

Отметим некоторые свойства симметрий.

1. Любое дробно-линейное преобразование $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ комплексной

плоскости $\mathbb{C}$ эквивалентно четному числу преобразований симметрии относительно некоторой окружности.

2. Дробно-линейное преобразование комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (отличное от тождественного) имеет не более двух неподвижных точек. Таким образом, этим свойством обладают элементы подгруппы G .

3. Любое преобразование $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ может быть представлено в форме

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = K \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$$

или $w - \zeta_1 = K(z - \zeta_1)$, где ζ_1, ζ_2 – неподвижные точки отображения, а коэффициент K – комплексное число, удовлетворяющее соотношению

$$\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} = \alpha + \delta.$$

4. Если $K = Ae^{i\theta}$, ($A > 0, \theta \in [0, 2\pi)$), то говорят, что преобразование w :

- 1) гиперболического типа, если $K = A$;
- 2) эллиптического типа, если $K = e^{i\theta}$;
- 3) локсодромического типа, если $K = Ae^{i\theta}, \theta \neq 0$.

5. Пусть преобразование $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ имеет две неподвижные точки ζ_1, ζ_2 и представимо в форме

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = K \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}.$$

Тогда m -я итерация этого преобразования, т. е. преобразование

$$w^{(m)} = \underbrace{w \circ w \circ \dots \circ w}_{m \text{ раз}},$$

имеет те же неподвижные точки, что и w , и представима в виде

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = K^m \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}.$$

Следует заметить, что такое свойство выполняется только для преобразований симметрии четного порядка. Для преобразований симметрии нечетного порядка ситуация более сложная.

6. Множеством неподвижных точек преобразования нечетного порядка $w = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$ может являться либо вся комплексная плоскость S , либо окружность, либо две точки, либо одна точка, либо пустое множество.

Литература

1. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. 3-е изд. М., 1977.
2. *Голузин, Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. 2-е изд. М., 1966.
3. *Гюнтер, Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. М., 1953.
4. Итоги науки и техники : Современные проблемы математики. Новейшие достижения / редкол. : Р. В. Гамкрелидзе (гл. ред.) [и др.]. М., 1975. Т. 7 : Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной / Б. В. Хведелидзе.
5. *Келдыш, М. В.* Конформные отображения многосвязных областей на канонические области / М. В. Келдыш // Успехи матем. наук. 1939.
6. *Коппенфельс, В.* Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. М., 1963.
7. *Михлин, С. Г.* Интегральные уравнения и их приложения в задачах механики, математической физики и техники / С. Г. Михлин. 2-е изд. М. ; Л., 1949.
8. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. 3-е изд. М., 1968.
9. *Сидоров, Ю. В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. М., 1982.
10. *Симоненко, И. Б.* Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом / И. Б. Симоненко // Доклады АН СССР. 1960. Т. 135, № 3.
11. *Gaier, D.* Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung / D. Gaier. Berlin, 1964.
12. *Mityushev, V. V.* Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions : Theory and applications / V. V. Mityushev, S. V. Rogosin. Boca Raton-London, 1999.
13. *Wen, G. C.* Conformal mapping and boundary Value Problems / G. C. Wen. Rhode Island, Providence, 1992.

Глава 5

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

5.1. Функциональные пространства

Для построения классических решений краевых задач, возникающих при исследовании композиционных материалов, необходимо предписывать определенную гладкость граничным значениям этих решений. Обычно это делается с использованием некоторых классических определений функциональных пространств. Приведем ряд основных определений пространств гладких и кусочно-гладких функций, определенных на связных подмножествах $X \subseteq \mathbb{R}^M$ ($M = 1, 2, 3$) (в частности, на каждой связной компоненте границы $\partial\Omega$ области Ω).

Семейство функций

$$C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}); f \text{ непрерывна на } X\}$$

формирует *пространство непрерывных функций*. Если X – либо замкнутая поверхность, либо замкнутая кривая, то $C(X)$ является банаховым пространством с нормой, определяемой формулой

$$\|f\|_C = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Пространство *непрерывных по Гельдеру функций* $H^\alpha(X)$ вводится для любого фиксированного $0 < \alpha \leq 1$ с помощью следующего условия:

$$H^\alpha(X) = \{f \in C(X) : \exists C > 0, |f(x_1) - f(x_2)| < C |x_1 - x_2|^\alpha, \forall x_1, x_2 \in X\}$$

(здесь $|x_1 - x_2|$ означает евклидово расстояние между точками множества X в $\mathbb{R}^M$). Эти пространства носят название пространств Гельдера (кроме указанного выше, встречаются также следующие обозначения для таких пространств: $Lip_\alpha(X)$, $C^{0,\alpha}(X)$). Они являются линейными подпространствами пространства $C(X)$. Опять же, если X – связное замкнутое множество (в частности, замкнутая поверхность, замкнутая кривая), то

$H^\alpha(X)$ является банаховым пространством с нормой, определяемой формулой

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_C + \sup_{x_1, x_2 \in X} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} =: \|f\|_C + h(f; \alpha).$$

В случае, когда множество X не является замкнутым множеством (например, X — область, кривая, кусочно-гладкая поверхность, кусочно-гладкая кривая), то удобно использовать понятие весовых пространств Гельдера

$$H^\alpha(X; \rho) = \{f : \exists f_0, f(x) = f_0(x)\rho(x), f_0 \in H^\alpha(X)\}$$

для некоторой заданной весовой функции ρ (например, $\rho(x) = \prod_{l=1}^n |x - x_l|^{\beta_l}$,

где $\beta_l \in \mathbb{R}_+$).

Для того чтобы ввести пространства дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^M$, удобно воспользоваться понятием мультииндекса. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in X \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Обозначим $\partial_j f := \frac{\partial f}{\partial x_j}$ производную функции f по переменной x_j . Вектор $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ называется мультииндексом, а $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$ — его длиной. $\mathbf{k}$ -я (частная) производная функции f определяется равенством

$$\partial^{\mathbf{k}} f = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}}, \partial^{\mathbf{0}} f = f.$$

Тогда пространство $C^m(X; \mathbb{R})$ ($C^m(X; \mathbb{C})$), $m \in \mathbb{N}$, — это пространство всех функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (соответственно $f : X \rightarrow \mathbb{C}$), таких что все частные производные $\partial^{\mathbf{k}} f$, $0 \leq |\mathbf{k}| \leq m$, непрерывны на множестве X . Заметим, что если множество X или его часть представляет собой гладкую поверхность или гладкую кривую, то соответствующие производные берутся в касательном направлении к поверхности или кривой.

Семейство пространств Шаудера определяется, например в случае пространств вещественнозначных функций, следующим образом (для любых $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$):

$$\begin{aligned} C^{m, \alpha}(X; \mathbb{R}) &= \{f \in C^m(X; \mathbb{R}) : \exists C > 0, |\partial^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_1) - \partial^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_2)| < C |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^\alpha, \\ &\quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, |\mathbf{k}| = m\}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются пространства Шаудера комплексно-значных функций $C^{m,\alpha}(X;C)$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$. Если X – либо замкнутая поверхность, либо замкнутая кривая, то $C^{m,\alpha}(X;R)$ ($C^{m,\alpha}(X;C)$) является банаховым пространством с нормой, определяемой формулой

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^m \|\partial^{\mathbf{k}} f\|_C + \sum_{|\mathbf{k}|=m} h(\partial^{\mathbf{k}} f; \alpha).$$

Наконец, семейство бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(X)$ определяется следующим образом:

$$C^\infty(X) = \{f \in C(X) : \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^3, \forall \mathbf{x} \in X, \exists \partial^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x})\}.$$

Следует отметить, что пространство R^2 изометрично C . Поэтому все приведенные выше производные могут вычисляться относительно комплексной переменной $z = x + iy$. Однако полученные при этом определения будут сильнее определений, содержащих производные относительно двух вещественных переменных x, y . Функция $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ C -дифференцируема (т. е. дифференцируема относительно переменной z) в некоторой области на комплексной плоскости тогда и только тогда, когда функция f R -дифференцируема (т. е. дифференцируема относительно двух вещественных переменных x, y) и в этой области выполнены условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Пусть Γ – простая замкнутая кривая на комплексной плоскости C , а $X = \text{int } \Gamma$ – конечная часть плоскости, ограниченная Γ . Множество всех непрерывных функций из $C(\Gamma)$, допускающих аналитическое продолжение в область $X = \text{int } \Gamma$, будем обозначать $C_A(\Gamma)$ (или $C_A(X)$). Это пространство является банаховым с нормой, совпадающей с супремум-нормой на $\text{cl } X$. Аналогичное определение может быть дано для пространств функций из $C^{m,\alpha}(\Gamma;C)$, допускающих аналитическое продолжение в область $X = \text{int } \Gamma$. Такие пространства обозначаются $C_A^{m,\alpha}(\Gamma)$ (или $C_A^{m,\alpha}(X)$). Наконец, аналогичным образом вводятся пространства $C_A^\infty(\Gamma)$ (или $C_A^\infty(X)$).

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^M$ – открытое связное множество. Символом $L_p(X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначается множество всех измеримых (в смысле Лебега) функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\int_X |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < +\infty. \quad (5.1)$$

Две функции, удовлетворяющие подобному условию, называются эквивалентными, если интеграл вида (5.1) от их разности равен нулю (или, что то же самое, мера множества точек из X , на котором эти функции не совпадают, равна нулю). Множество классов эквивалентности функций из $L_p(X)$ образуют пространство Лебега $L_p(X)$, $1 \leq p < \infty$, которое является банаховым с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Символом $L_\infty(X)$ обозначается множество всех измеримых (в смысле Лебега) функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, ограниченных в существенном, т. е. таких, для которых конечен существенный супремум

$$\text{ess sup}_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})| < +\infty. \quad (5.2)$$

Последнее условие означает, что существует множество $E \subset X$, $\text{mes } E = 0$, такое что

$$\sup_{\mathbf{x} \in X \setminus E} |f(\mathbf{x})| < +\infty.$$

Две измеримые функции из $L_\infty(X)$ называются эквивалентными, если существенный супремум модуля их разности равен нулю. Классы эквивалентности функций из $L_\infty(X)$ образуют пространство Лебега $L_\infty(X)$, которое является банаховым с нормой

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})|.$$

Во многих задачах математической физики недостаточно рассматривать только классические решения соответствующих дифференциальных уравнений, т. е. решения, принадлежащие одному из пространств дифференцируемых функций. Среди наиболее удобных обобщений введенных выше пространств следует выделить так называемые *пространства Соболева*. Основная идея, ведущая к построению этих пространств, связана с использованием понятия *слабой производной*.

Говорят, что множество $X' \subset X \subset \mathbb{R}^M$ является собственным подмножеством множества X , если замыкание X' есть подмножество X ,

т. е. $\text{cl } X' \subset X$. Этот факт обозначается символом $X' \subset\subset X$. Пространство $L_{p,\text{loc}}(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, – это пространство (классов эквивалентности) измеримых по Лебегу функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, таких что

$$\int_{X'} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < +\infty \quad (\text{соответственно } \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in X'} |f(\mathbf{x})| < +\infty)$$

для любого ограниченного измеримого множества $X' \subset\subset X$. Обозначим также символом $C_0^\infty(X)$ класс всех бесконечно дифференцируемых функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, имеющих компактный носитель в X , т. е. для которых существует замкнутое ограниченное множество $X' \subset\subset X$, такое что $f(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in X \setminus \text{cl } X'$.

Пусть $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^3$ – мультииндекс, $f, g \in L_{1,\text{loc}}(X)$, и для любой функции $\eta \in C_0^\infty(X)$ выполняется соотношение

$$\int_X f(\mathbf{x}) \partial^{\mathbf{k}} \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (-1)^{|\mathbf{k}|} \int_X g(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Тогда функция g называется *слабой частной производной* функции f порядка $\mathbf{k}$. Слабая частная производная обозначается тем же символом, что и обычная (сильная) производная $g = \partial^{\mathbf{k}} f$.

Пространство Соболева $W^{s,p}(X)$, $1 \leq p < +\infty$, $s \in \mathbb{Z}_+$, состоит из всех (классов эквивалентности) функций $f \in L_{p,\text{loc}}(X)$, для которых существуют слабые производные $\partial^{\mathbf{k}} f$ любого порядка $\mathbf{k}$, $|\mathbf{k}| \leq s$, такие что $\partial^{\mathbf{k}} f \in L_p(X)$, $\forall \mathbf{k}$, $|\mathbf{k}| \leq s$. Пространство $W^{s,p}(X)$ является банаховым, если ввести норму по формуле

$$\|f\|_{s,p,X} = \sum_{|\mathbf{k}| \leq s} \|\partial^{\mathbf{k}} f\|_p.$$

При $p = 2$ пространство $W^{s,2}(X)$ имеет специальное обозначение $H^s(X)$. Пространство $H^s(X)$ является гильбертовым со скалярным произведением, определенным соотношением

$$\langle f, g \rangle_{s,X} = \sum_{|\mathbf{k}| \leq s} \left\langle \partial^{\mathbf{k}} f, \partial^{\mathbf{k}} g \right\rangle_{L_2(X)} = \sum_{|\mathbf{k}| \leq s} \int_X \partial^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) \overline{\partial^{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$

Множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^M)$ является всюду плотным подмножеством множества $H^1(\mathbb{R}^M)$. Если $X \neq \mathbb{R}^M$, то замыкание в $H^1(X)$ множества $C_0^\infty(X)$ по норме пространства $H^1(X)$ обозначается $H_0^1(X)$.

Множество всех линейных непрерывных функционалов на $H_0^1(X)$ относительно скалярного произведения в $H_0^1(X)$

$$\langle f, g \rangle_{1,X} = \int_X f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + \sum_{|\mathbf{k}| \leq 1} \int_X \partial^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) \overline{\partial^{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

обозначается $H^{-1}(X)$.

Пусть Q – это параллелепипед в $\mathbb{R}^M$, $M = 2, 3$. Тогда пространства $C_{A,\text{per}}^{m,\alpha}(\partial Q) = C_{A,\text{per}}^{m,\alpha}(\text{cl}Q)$, $C_{A,\text{per}}^\infty(\partial Q) = C_{A,\text{per}}^\infty(\text{cl}Q)$, $W_{\text{per}}^{s,p}(\text{cl}Q)$, $H_{\text{per}}^s(\text{cl}Q)$ – это подпространства $C_A^{m,\alpha}(\text{cl}Q)$, $C_A^\infty(\text{cl}Q)$, $W^{s,p}(\text{cl}Q)$, $H^s(\text{cl}Q)$ соответственно, содержащие такие функции, которые допускают периодическое продолжение с Q на все пространство $\mathbb{R}^M$.

5.2. Простейшие краевые задачи и их решение

Краевая задача Римана для аналитических функций. Предположим, что D^+ – ограниченная $(N+1)$ -связная область на плоскости z , и граница этой области состоит из $N+1$ простой гладкой замкнутой кривой: $L = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_N$, где контур L_0 содержит внутри себя все остальные $L_1, \dots, L_N$. Пусть L_0 – граница области D_0 , а L_j – граница области D_j , $j \in \overline{1, N}$, и $D^- = (\mathbb{C} \setminus \text{cl}D_0) \cup D_1 \cup \dots \cup D_N$. Ориентация на контуре L выбрана так, что область D^+ остается слева при обходе контура. Для определенности $0 \in D^+$.

Краевой задачей Римана называется задача нахождения кусочноаналитической функции $F(z)$ в D^+ и D^- , непрерывной вплоть до границы L и удовлетворяющей следующему условию:

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (5.3)$$

где $G(t)$ и $g(t)$ – заданные комплекснозначные функции на L , $G(t) \neq 0$, и $G, g \in H^\mu(L)$, $0 < \mu < 1$. В частности, если $g(t) = 0$, то (5.3) принимает вид

$$F^+(t) = G(t)F^-(t), \quad t \in L, \quad (5.4)$$

и называется *однородной краевой задачей Римана*.

Рассмотрим частный случай задачи Римана – задачу о скачке, т. е. когда в краевом условии (5.3) $G(t) \equiv 1$:

$$F^+(t) - F^-(t) = g(t), \quad t \in L.$$

Функция $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau$ дает единственное решение задачи о

скачке в классе функций, исчезающих на бесконечности, т. е. $F^-(\infty) = 0$.

Разрешимость задач (5.3) и (5.4) определяется так называемым индексом задачи. Индексом κ функции $G(t)$ по ориентированной кривой L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в соответствии с выбранной ориентацией: $\kappa = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L$. Индексом краевой задачи Римана называется индекс ее коэффициента.

Канонической функцией $X(z)$ будем называть функцию, удовлетворяющую краевому условию (5.4), кусочно-аналитическую и имеющую нулевой порядок всюду в плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, где ее порядок равен индексу задачи.

Теорема 5.1. Для однородной краевой задачи Римана (5.4) справедливы следующие утверждения о ее разрешимости:

1. При $\kappa \geq 0$ общее решение задачи (5.4), ограниченное на бесконечности, имеет вид:

$$\Psi(z) = X(z)P_\kappa(z), \quad (5.5)$$

где P_κ – многочлен степени не выше κ с комплексными коэффициентами, а каноническая функция $X(z)$ определяется равенством (в котором $z_j \in D_j$ – некоторые фиксированные точки, а $\kappa_j = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{L_j}$):

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)} (z - z_1)^{-\kappa_1} \dots (z - z_N)^{-\kappa_N}, & z \in D^+, \\ z^{-\kappa} e^{\Gamma(z)}, & z \in D^-. \end{cases}$$

2. При $\kappa < 0$ единственным решением задачи (5.4), ограниченным на бесконечности, является нулевое решение.

Теорема 5.2. Для неоднородной краевой задачи Римана (5.3) справедливы следующие утверждения о ее разрешимости:

1. При $\kappa \geq 0$ общее решение задачи (5.3), ограниченное на бесконечности, представляется в виде:

$$F(z) = F_0(z) + \Psi(z),$$

$$F_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)dt}{X^+(t)(t - z)}, \quad (5.6)$$

где $\Psi(z) = X(z)P_\kappa(z)$ – общее решение однородной задачи Римана (5.4).

2. При $\kappa < 0$ неоднородная задача Римана имеет решение, ограниченное на бесконечности, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия разрешимости:

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)} t^n dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, |\kappa| - 2. \quad (5.7)$$

В этом случае решение: $F(z) = F_0(z)$.

Краевая задача Гильберта для аналитических функций в односвязной области. Пусть задан простой гладкий замкнутый контур L и действительные функции $a(s), b(s), c(s)$ длины дуги s контура, удовлетворяющие условию Гельдера. *Краевой задачей Гильберта* называется следующая задача: найти аналитическую в области D^+ (для определенности $z = 0 \in D^+$) и непрерывную на контуре функцию $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, предельные значения действительной и мнимой частей которой удовлетворяют на контуре линейному соотношению

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s). \quad (5.8)$$

Если $c(s) \equiv 0$, то задача называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Будем считать, что коэффициенты $a(s)$ и $b(s)$ не обращаются одновременно в нуль. Поделив краевое условие на $\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}$, приведем его к такому случаю, когда коэффициенты удовлетворяют условию $a^2(s) + b^2(s) = 1$. Тогда краевое условие (5.8) можно переписать в одной из двух равносильных форм:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{F(t)}{a(s) + ib(s)} \right\} = c(s), \quad (5.8')$$

$$\operatorname{Re} \{ (a(s) - ib(s)) F(t) \} = c(s), \quad (5.8'')$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – искомая функция.

Индекс κ функции $a(s) + ib(s)$ называется *индексом задачи Гильберта*.

Определение 5.1. Регуляризирующим множителем комплексной функции $a(s) + ib(s)$, заданной на контуре L , называется действительная положительная функция точек контура $p(s)$, такая что $p(s)[a(s) + ib(s)]$ есть краевое значение функции $\chi^+(z)$, аналитической и имеющей нулевой порядок всюду в области D^+ , за исключением, может быть, начала координат, где ее порядок равен индексу κ .

Теорема 5.3. Произвольная функция точек контура, удовлетворяющая на нем условию Гёльдера и не обращающаяся в нуль, имеет единственный действительный регуляризующий множитель. Причем возможны следующие случаи:

1) $\kappa = 0$. Функцию $\chi^+(z)$ можно представить в виде $\chi^+(z) = e^{i\gamma(z)}$, $\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y)$. Регуляризующий множитель определяется с точностью до постоянного множителя:

$$p(s) = \frac{e^{-\omega_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}},$$

где $\omega_1(x, y)$ – сопряженная гармоническая функция для гармонической функции $\omega(x, y)$, которая является решением задачи Дирихле:

$$\omega(s) = \operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)}.$$

2) $\kappa \neq 0$. Тогда $p(s) = \frac{|t|^\kappa e^{-\omega_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}$, где $\omega(s) = \operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)} - \kappa \arg t$.

Поделив обе части краевого условия однородной задачи Гильберта на регуляризующий множитель, получим следующее краевое условие:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{F(t)}{t^\kappa e^{i\gamma(t)}} \right] = 0.$$

Теорема 5.4. Для однородной краевой задачи Гильберта справедливы следующие утверждения о ее разрешимости:

1. Если индекс задачи Гильберта $\kappa = 0$, то единственное решение задачи имеет вид $F(z) = i\beta_0 e^{i\gamma(z)}$, где β_0 – произвольная вещественная постоянная.

2. Если $\kappa > 0$, то общее решение однородной задачи Гильберта имеет вид:

$$F(t) = z^\kappa e^{i\gamma(z)} Q(z), \text{ где } Q(z) = i\beta_0 + \sum_{n=1}^{\kappa} \left\{ c_k [w(z)]^n - \bar{c}_k [\overline{w(z)}]^n \right\} \quad (w = w(z) -$$

функция, конформно отображающая область D^+ плоскости z на единичный круг плоскости w , причем $w(z_0) = 0$, $w'(z_0) > 0$). Таким образом, задача имеет $2\kappa + 1$ линейно независимое решение над полем вещественных чисел.

3. Если $\kappa < 0$, то однородная задача неразрешима.

Рассмотрим неоднородную задачу Гильберта. Разделив обе части краевого условия на регуляризующий множитель функции $a(s) + ib(s)$, имеем:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{F(t)}{t^{\kappa} e^{i\gamma(t)}} \right] = |t|^{-\kappa} e^{\omega_1(s)} c(s).$$

Теорема 5.5. Для неоднородной краевой задачи Гильберта (5.8) справедливы следующие утверждения о ее разрешимости:

1. Если индекс задачи Гильберта $\kappa = 0$, то единственное решение задачи (5.8) имеет вид $F(z) = e^{i\gamma(z)} \left[S(e^{\omega_1(s)} c(s)) + i\beta_0 \right]$, где S – оператор Шварца, определяющий аналитическую в области функцию по значениям на границе ее вещественной части, β_0 – произвольная вещественная постоянная.

2. Если $\kappa > 0$, то общее решение неоднородной задачи Гильберта имеет вид $F(t) = z^{\kappa} e^{i\gamma(z)} \left[S(|t|^{-\kappa} e^{\omega_1(s)} c(s)) + Q(z) \right]$.

3. Если $\kappa < 0$, то неоднородная задача (5.8) разрешима тогда и только тогда, когда функция $S(|t|^{-\kappa} e^{\omega_1(s)} c(s)) + iC$ имеет при некотором $C \in \mathbb{R}$ в точке $z = 0$ нуль порядка $-\kappa$. При выполнении этого условия единственное решение задачи задается равенством $F(t) = z^{\kappa} e^{i\gamma(z)} \left[S(|t|^{-\kappa} e^{\omega_1(s)} c(s)) + iC \right]$.

Краевая задача Гильберта для аналитических функций в многосвязной области. В случае задачи Гильберта порядок связности области влияет на разрешимость краевой задачи и на число ее решений.

Пусть D^+ – $(N+1)$ -связная область на плоскости z , и граница этой области состоит из $(N+1)$ простой гладкой замкнутой кривой: $L = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_N$, причем L_0 содержит внутри себя все остальные кривые $L_1, \dots, L_N$. Компоненты границы ориентированы так, что при их обходе область D^+ остается слева.

Краевая задача Гильберта для аналитических функций в многосвязной области D состоит в нахождении всех функций $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, однозначных и аналитических в области D^+ , непрерывно продолжимых на границу L области D^+ и удовлетворяющих краевому условию:

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(t)} F(t) \} = c(t), \quad t \in L, \quad (5.9)$$

где $a(s) + ib(s) = \lambda[t(s)]$, $|\lambda(t)| = 1$. Функция $\lambda(t)$ называется *коэффициентом задачи Гильберта*.

Обозначим $\kappa_j = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{L_j}$, $j = \overline{0, N}$, вычисляя приращение аргумента в соответствии с принятой ориентацией кривых. Величина $\kappa = \sum_{j=0}^N \kappa_j$ называется *индексом коэффициента* $\lambda(t)$ задачи Гильберта.

Определение 5.2. Регуляризирующим множителем функции $\lambda(t)$ в случае многосвязной области D^+ называется положительная функция $p(t)$, удовлетворяющая равенству

$$p(t)\lambda(t) = t^{\kappa-N} \prod_{j=1}^N (t - z_j) e^{i\gamma(t)}, \quad t \in L, \quad (5.10)$$

где точки $z_1, z_2, \dots, z_N$ лежат внутри $L_1, \dots, L_N$ соответственно, а функция $\gamma(z)$ – однозначная аналитическая функция в D^+ .

Если известен регуляризирующий множитель $p(t)$ для коэффициента $\lambda(t)$, то решение задачи Гильберта для многосвязной области сводится к построению оператора Шварца для многосвязной области (см. подраздел 5.8). Нахождение регуляризирующего множителя представляет собой отдельную задачу.

5.3. Краевая задача R-линейного сопряжения

Пусть контур L состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова $L_0, L_1, \dots, L_N$, ограничивающих конечную $N+1$ -связную область $D^+ = \text{int } L_0 \bigcap_{k=1}^N \text{ext } L_k$. Обозначим через D^- дополнение этой области до полной плоскости C , т. е. $D^- = C \setminus \text{cl } D^+$. D^- – несвязное множество, состоящее из конечного числа ограниченных компонент $D_k^- = \text{int } L_k$, $k = 1, \dots, N$, и неограниченной компоненты $D_0^- = \text{ext } L_0$.

Краевая задача R-линейного сопряжения (называемая также задачей Маркушевича) состоит в следующем: найти функции $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$, аналитические в D^+ , D^- , D^- соответственно и представимые интегралом типа Коши, если почти всюду на L они имеют граничные значения $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$, удовлетворяющие следующему условию сопряжения:

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + \overline{b(t)\varphi^-(t) + c(t)}, \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (5.11)$$

где $a(t), b(t), c(t)$ – заданные функции точек контура L .

Условия на коэффициенты, так же как и классы решений задачи (5.11), определены ниже. Линейная независимость будет пониматься в смысле линейных комбинаций с вещественными коэффициентами (т. е. над полем вещественных чисел). Напомним, что краевая задача называется *нормально разрешимой*, если конечно число решений однородной задачи (т. е. при $c(t) \equiv 0$) и число условий разрешимости неоднородной задачи, причем последнее совпадает с числом решений сопряженной задачи. Далее будет показано, что краевая задача (5.11) является нормально разрешимой при $a(t) \neq 0$. Для этой задачи выделяются три случая, называемые соответственно

- 1) эллиптическим $|a(t)| > |b(t)|$;
- 2) параболическим $|a(t)| \equiv |b(t)|$;
- 3) гиперболическим $|a(t)| < |b(t)|$.

Исследование разрешимости задачи R-линейного сопряжения в эллиптическом случае. Исследуем разрешимость задачи (5.11) в классе аналитических функций, представимых интегралом типа Коши, предельные значения которых $\varphi^+(t), \varphi^-(t) \in L_p(L)$, $p > 1$, в эллиптическом случае.

Теорема 5.6. Пусть $a(t) \in C(L)$, $a(t) \neq 0$, $\kappa = \text{ind}_\Gamma a(t)$, $b(t)$ ограничена и измерима, $c(t) \in L_p(L)$, $p > 1$, и, кроме того, выполняется условие

$$\sup_{t \in L} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < \frac{2}{1 + S_p}, \quad (5.12)$$

где S_p – норма в $L_p(L)$ сингулярного интегрального оператора

$$S\mu := \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Тогда

- а) при $\kappa > 0$ однородная краевая задача (5.11) имеет 2κ линейно-независимых решений, а неоднородная безусловно разрешима;
- б) при $\kappa = 0$ краевая задача (5.11) имеет единственное решение;
- в) при $\kappa < 0$ однородная задача имеет только тривиальное решение, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно выполнения $2|\kappa|$ вещественных или $|\kappa|$ комплексных условий разрешимости:

$$\int_L t^{-k} Q[c(t)dt] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\kappa| - 1, \quad (5.13)$$

где Q – некоторый линейный оператор.

Доказательство. 1) $a(t) \equiv 1$.

Представим искомое решение в виде интеграла типа Коши:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+ \cup D^-, \quad (5.14)$$

с плотностью $\mu \in L_p(L)$, $p > 1$. Тогда для почти всех $t \in L$ выполняются формулы Сохоцкого:

$$\varphi^+(t) = \frac{1}{2}(\mu + S\mu), \quad \varphi^-(t) = \frac{1}{2}(-\mu + S\mu). \quad (5.15)$$

Подставляя (5.15) в краевое условие (5.11), получим эквивалентное задаче R-линейного сопряжения интегральное уравнение

$$\mu = \frac{b}{2} \overline{(-\mu + S\mu)} + c. \quad (5.16)$$

По предположению, $\frac{1}{2}(1 + S_p) \cdot \sup_{t \in L} |b(t)| < 1$, значит, к уравнению (5.16) применим принцип сжимающих отображений, из которого следует, что данное уравнение имеет единственное решение для любой правой части $c(t) \in L_p(L)$, $p > 1$.

2) $a(t)$ не равно тождественно единице, но $\kappa_j = \text{ind}_{L_j} a(t) = 0$ для всех $j = 0, 1, \dots, N$.

Предположим сначала, что функция $a(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, т. е. $a(t) \in H^\alpha(L)$. Тогда $a(t)$ представляется в виде $a(t) = X^+(t)/X^-(t)$, где $X(z)$ – соответствующая каноническая функция, $X^-(\infty) = 1$, $X^\pm(t) \in H^\alpha(L)$, $X^\pm(t) \neq 0$. В терминах этой функции краевое условие (5.11) может быть переписано в виде

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \overline{\psi^-(t)} + \frac{c(t)}{X^+(t)}, \quad (5.17)$$

где $\psi^\pm(t) = \frac{\varphi^\pm(t)}{X^\pm(t)}$. Таким образом, задача в рассматриваемом случае свелась к предыдущей (задаче (5.11) в случае 1). При этом условие (5.12) гарантирует применимость принципа сжимающих отображений.

Если же $a(t)$ просто непрерывна, но не обязательно удовлетворяет условию Гельдера, то равномерно аппроксимируем ее гельдеровскими функциями $a_n(t) \in H^\alpha(L)$. Перепишем краевое условие (5.11) в виде

$$\varphi^+(t) = a_n(t)\varphi^-(t) + \overline{b(t)\varphi^-(t)} + (a(t) - a_n(t))\varphi^-(t) + c(t).$$

Найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что будет выполнено условие

$$\max_{t \in L} |a(t) - a_n(t)| < 1 - \frac{2}{1 + S_p}.$$

Таким образом, можно применить описанный выше метод к последнему краевому условию. Следует, однако, заметить, что плюсовая компонента соответствующей канонической функции может иметь нули на контуре, хотя при этом будет удовлетворять условию $\frac{1}{X_n^+} \in L_r$ при лю-

бом $r > 1$. Следовательно, $\frac{c}{X_n^+} \in L_{p-\varepsilon}$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Разрешимость задачи в классе функций, имеющих граничные значения, принадлежащие $L_{p-\varepsilon}$, вытекает тогда из условия

$$\sup_{t \in L} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| \frac{1 + S_{p-\varepsilon}}{2} < 1,$$

которое является следствием (5.12) в силу произвольности $\varepsilon > 0$. Гарантировать разрешимость задачи в классе функций, граничные значения которых принадлежат L_p , в этом случае нельзя.

1) $\kappa_j \neq 0$ для хотя бы одного значения j , но $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \dots + \kappa_N = 0$.

Рассмотрим функцию $\Pi(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_j)^{\kappa_j}$, где $z_j \in D_j^-$. Тогда, вводя

новую неизвестную функцию $\psi^+(z) = \Pi(z)\varphi^+(z)$, преобразуем краевое условие (5.11):

$$\psi^+(t) = a(t)\Pi(t)\varphi^-(t) + b(t)\Pi(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t)\Pi(t).$$

Поскольку $\text{ind}_{L_j} a(t)\Pi(t) = 0$, $j = 0, 1, \dots, N$, и $\left| \frac{b(t)\Pi(t)}{a(t)\Pi(t)} \right| = \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right|$, то

приходим к случаю 2. Задача имеет единственное решение.

2) $\text{ind}_L a(t) = \kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \dots + \kappa_N \neq 0$.

Пусть $0 \in D^+$ и $P(z) = P_{\kappa-1}(z)$ – многочлен степени $\kappa - 1$ с произвольными коэффициентами. Полагая $\psi^+(z) = z^{-\kappa} [\varphi^+(z) - P(z)]$, получим:

$$\psi^+(t) = a_1(t)\varphi^-(t) + b_1(t)\overline{\varphi^-(t)} + c_1(t), \quad (5.18)$$

где $a_1(t) = t^{-\kappa} a(t)$, $b_1(t) = t^{-\kappa} b(t)$, $c_1(t) = t^{-\kappa} [c(t) - P(t)]$. Так как $\text{ind}_L a_1(t) = 0$ и $\left| \frac{b_1(t)}{a_1(t)} \right| = \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right|$, то приходим к случаю 3. Задача (5.18) имеет единственное решение при любой правой части $c_1(t)$.

Пусть $\kappa \geq 0$. Полагая $c(t) \equiv 0$ и $P(t)$ равным последовательно $1, i, t, it, \dots, t^{\kappa-1}, it^{\kappa-1}$, имеем серию задач (5.18), решая которые получим линейно независимые решения однородной задачи (5.18), а следовательно, однородной задачи (5.11). Полагая далее $P(t) \equiv 0$, но $c(t) \neq 0$, построим частное решение неоднородной задачи (5.11).

Пусть $\kappa < 0$. В этом случае $P(z) \equiv 0$, а функции $\psi^+(z) \varphi^+(z)$ связаны соотношением $\psi^+(z) = z^{-\kappa} \varphi^+(z)$. Тогда решение $\varphi^+(z)$ имеет, вообще говоря, полюс в точке $z = 0$. Решение $\varphi^+(z)$ будет аналитическим, если потребовать, чтобы $\psi^+(z)$ имела бы нуль порядка $|\kappa|$ в точке $z = 0$, что приводит к условиям разрешимости (5.13).

Качественное исследование однородной задачи.

Теорема 5.7. Пусть $a(t) \in C(L)$, $a(t) \neq 0$, $b(t)$ ограничена и измерима и, кроме того, выполняется условие

$$\sup_{t \in L} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < 1. \quad (5.19)$$

Если $\kappa = \text{ind}_L a(t) < 0$, то однородная краевая задача R-линейного сопряжения

$$\varphi^+(t) = a(t) \varphi^-(t) + \overline{b(t) \varphi^-(t)}, \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (5.20)$$

имеет только тривиальное решение в классе функций $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$, представимых интегралом типа Коши и имеющих квадратично суммируемые граничные значения ($\varphi^\pm \in L_2(L)$).

Предположим, что существует нетривиальное решение задачи в рассматриваемом классе. Тогда краевое условие может быть переписано в виде

$$\varphi^+(t) = a(t) \Theta(t) \varphi^-(t), \quad (5.21)$$

где

$$\Theta(t) = 1 + \frac{b(t) \overline{\varphi^-(t)}}{a(t) \varphi^-(t)}.$$

Задачу (5.21) можно интерпретировать как задачу Римана с коэффициентом $a(t)\Theta(t)$. Поскольку не было сделано никакого предположения относительно нулей функции $\varphi^-(t)$, то коэффициент задачи (5.21), вообще говоря, будет разрывным. Однако поскольку равенство $\varphi^-(t)=0$ возможно только на множестве меры нуль, то функция $\Theta(t) \in L_\infty(L)$,

причем $\left| \frac{\overline{\varphi^-(t)}}{\varphi^-(t)} \right| \equiv 1$ на $L \setminus E$, где E – некоторое множество меры нуль. От-

сюда следует, что значения функции $\Theta(t), t \in L \setminus E$, лежат внутри угла раствора меньше, чем π , и $\text{ind}_\Gamma \Theta(t) = 0$. Тогда утверждение теоремы вытекает из результатов И. Б. Симоненко [3].

Краевая задача R-линейного сопряжения в параболическом случае.

1. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$\varphi^+(t) = \overline{G(t)\varphi^+(t)} + g(t), \quad (5.22)$$

коэффициент которой и свободный член удовлетворяют условию Гельдера, т. е. $G(t), g(t) \in H^\alpha(L)$.

Пусть сначала $g(t) \equiv 0$ (однородная задача). Тогда, исключая с помощью комплексного сопряжения функцию $\overline{\varphi^+(t)}$, мы придем к соотношению $\varphi^+(t) = |G(t)|^2 \varphi^+(t)$. Отсюда вытекает необходимое условие существования нетривиального решения однородной задачи (5.22): $|G(t)| \equiv 1$. Будем далее предполагать, что данное условие выполнено.

Аналогично для неоднородной задачи необходимое условие разрешимости имеет вид

$$g(t) + G(t)\overline{g(t)} \equiv 0. \quad (5.23)$$

С помощью соотношения (5.23) краевое условие можно переписать в виде следующих двух краевых условий:

$$2\text{Re} \left[\frac{\overline{g(t)}}{|g(t)|} \varphi^+(t) \right] = |g(t)|, \quad (5.24)$$

$$2\text{Im} \left[\sqrt{G(t)} \varphi^+(t) \right] = -ig(t)\sqrt{G(t)}, \quad (5.25)$$

где правая часть вещественна в силу условия (5.23).

Каждое из этих условий представляет собой краевое условие задачи Гильберта. Однако если $g(t)$ имеет нули, то коэффициент первой задачи

может быть разрывным, а если $\kappa_j = \text{ind}_{L_j} G(t)$ есть нечетное число, то коэффициент второй задачи – многозначная функция на L_j . С другой стороны, из (5.23) следует, что если $g(t) \neq 0$ на L_j , то $\text{ind}_{L_j} G(t) = 2\text{ind}_{L_j} g(t)$ является четным. Если же $\text{ind}_{L_j} G(t)$ нечетен, то $g(t)$ обращается в нуль на L_j . Таким образом, различными являются следующие два случая:

- 1) $g(t)$ не имеет нулей на L , или, что эквивалентно, все κ_j четны;
- 2) $g(t)$ имеет нули, или хотя бы одно κ_j нечетно.

В первом случае каждая из задач может быть решена по обычной схеме исследования задачи Гильберта.

Рассмотрим случай 2). Если область D^+ односвязна, то, отображая ее конформно на единичный круг, получим из (5.24) или (5.25) задачу Гильберта для единичного круга. Отличие от стандартной ситуации здесь состоит только в том, что индекс задачи κ будет нечетным числом. После сведения задачи Гильберта для единичного круга к эквивалентной неоднородной задаче Римана мы можем выписать условия разрешимости последней:

$$\int_{\Gamma} \frac{t^{l-1} g(t)}{X^+(t)} dt = 0, \quad l = 1, \dots, |\kappa| - 1. \quad (5.26)$$

Учитывая, что $X^+(t) = \frac{t^{-\frac{\kappa}{2}} \sqrt{G(t)}}{\Omega(\varphi)}$, где $\Omega(\varphi)$ – некоторая вещественно-значная функция, получим равенства:

$$\int_{\Gamma} t^{l-\frac{\kappa-1}{2}} \Omega(\varphi) \frac{g(t)}{\sqrt{G(t)}} dt = 0, \quad l = 1, 2, \dots, |\kappa| - 1.$$

Преобразуя данные условия с помощью (5.23) и учитывая, что $\kappa = -2m - 1$, где $m > 0$ – целое число, получим $2m = |\kappa| - 1$ вещественных условий разрешимости:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Omega(\varphi) |g(\varphi)| \cos\left(j + \frac{1}{2}\right) \varphi d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \Omega(\varphi) |g(\varphi)| \sin\left(j + \frac{1}{2}\right) \varphi d\varphi &= 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Лемма 5.1. Пусть область D^+ односвязна, $|G(t)| \equiv 1$, $\kappa = \text{ind}_L G(t)$ и выполнено условие (5.23).

Если $\kappa \geq 0$, то число линейно-независимых решений над полем вещественных чисел $l = \kappa + 1$, а число условий разрешимости равно $p = 0$.

Если $\kappa < 0$, то $l = 0$, $p = |\kappa| - 1$.

Лемма также справедлива для внешней задачи

$$\overline{\varphi^-(t)} = G(t)\varphi^-(t) + g(t), \quad (5.28)$$

рассматриваемой в классе функций, ограниченных на бесконечности.

В случае многосвязной области проводится дополнительное исследование, поэтому далее будем рассматривать только случай односвязной области.

2. Рассмотрим задачу (5.11) для односвязной области в параболическом случае, т. е. при $|a(t)| \equiv |b(t)| > 0$. Взяв комплексное сопряжение в краевом условии, исключим $\varphi^-(t)$ и $\overline{\varphi^-(t)}$, тем самым перепишем (5.11) в эквивалентной форме:

$$\varphi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t)} \overline{\varphi^+(t)} + \left(c(t) - a(t) \frac{\overline{c(t)}}{\overline{b(t)}} \right). \quad (5.29)$$

В этом краевом условии $\left| \frac{a(t)}{b(t)} \right| \equiv 1$, и, кроме того, выполнено необходимое условие (5.23). Обозначая $\lambda = \text{ind}_L \frac{a(t)}{b(t)} = \text{ind}_L a(t) + \text{ind}_L b(t)$, применим к (5.29) утверждение леммы. С другой стороны, если найти из (5.29) $\varphi^+(z)$ и подставить в краевое условие (5.22), получим внешнюю задачу

$$\overline{\varphi^-(t)} = -\frac{a(t)}{b(t)} \varphi^-(t) + \frac{\varphi^+(t) - c(t)}{b(t)}. \quad (5.30)$$

Индекс этой задачи $\mu = \text{ind}_L \frac{a(t)}{b(t)} = \text{ind}_L a(t) - \text{ind}_L b(t)$ имеет ту же четность, что и индекс λ задачи (5.29). Заметим также, что задачи (5.29) и (5.30) могут быть переписаны в виде:

$$2 \text{Im} \left[\sqrt{\frac{a(t)}{b(t)}} \varphi^+(t) \right] = \text{Im} \left(c(t) \sqrt{\frac{a(t)}{b(t)}} \right), \quad (5.31)$$

$$2 \text{Re} \left[\sqrt{\frac{a(t)}{b(t)}} \varphi^-(t) \right] = \frac{\varphi^+(t) - c(t)}{\sqrt{a(t)b(t)}}. \quad (5.32)$$

Теорема 5.8. Пусть $|a(t)| \equiv |b(t)| > 0$, $a(t), b(t), c(t) \in H^\alpha(L)$; $\lambda + \mu = 2\kappa$, где λ, μ – индексы коэффициентов задач (5.29), (5.30), $\kappa = \text{ind}_L a(t)$; l – число линейно независимых решений однородной задачи (5.22), а p – число условий разрешимости неоднородной задачи.

Тогда картина разрешимости краевой задачи (5.22) в односвязной области определяется следующими соотношениями:

1) если $\lambda < 0, \mu < 0$, то $l = 0, p = 2|\kappa| - 2$;

2) если $\lambda < 0, \mu \geq 0$, то $l = \mu + 1, p = |\lambda| - 1$;

3) если $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, то $l = 2\kappa + 2, p = 0$;

4) если $\lambda \geq 0, \mu < 0$, то разрешимость определяется из системы $|\mu| - 1$ с $\lambda + 1$ неизвестными, при этом:

а) если $\kappa \geq -1$, то $p = 0$, а l может быть любым числом, удовлетворяющим неравенству $2\kappa + 2 \leq l \leq \lambda + 1$;

б) если $\kappa < -1$, то p и l могут быть любыми числами, удовлетворяющими неравенствам $0 \leq l \leq \lambda + 1, -2\kappa - 2 \leq p \leq |\mu| - 1$.

◀ Обозначим числа решений и условий разрешимости задач (5.29), (5.30) через $(l_1, p_1), (l_2, p_2)$ соответственно. Тогда тривиальному решению задачи (5.29) $\varphi^+(z) \equiv 0$ соответствуют некоторые решения неоднородной задачи (5.30) с $\varphi^+(z) \equiv 0$. Кроме того, каждому нетривиальному решению $\varphi^+(z)$ задачи (5.29) соответствует нетривиальное решение $\varphi^-(z)$ задачи (5.30), причем линейно независимым решениям φ^+ соответствуют линейно независимые решения φ^- . Для случаев 1), 2), 3) это сразу дает $l = l_1 + l_2, p = p_1 + p_2$, откуда и следует утверждение теоремы в указанных случаях.

В случае 4) общее решение задачи (5.29) имеет вид:

$$\varphi^+ = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{l_1} \alpha_k \varphi_k,$$

где α_k – произвольные вещественные постоянные; φ_k – линейно независимые решения однородной задачи, а φ_0 – частное решение неоднородной. Подставив φ^+ в (5.30), заметим, что, согласно лемме, для разрешимости последней должны выполняться p_2 – условий разрешимости. Это ведет к системе уравнений относительно постоянных α_k :

$$\sum_{k=1}^l A_{kj} \alpha_k = f_j, \quad j = 1, \dots, p_2,$$

где A_{kj} выражаются через $a(t), b(t)$, а f_j – через $a(t), b(t), c(t)$.

Если $l_1 \geq p_2$, то неизвестных больше, чем уравнений, и система всегда разрешима. Ранг системы $r \leq p_2$, и, следовательно, $l_1 - p_2 \leq l \leq l_1$.

Если $l_1 < p_2$, то неизвестных меньше, чем уравнений. Неоднородная система, вообще говоря, несовместна, и однородная имеет только тривиальное решение. Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы правая часть была ортогональной решениям транспонированной системы. Число решений последней $p = p_2 - r$, где ранг r , $0 \leq r \leq l_1$. Тогда однородная система будет иметь $l_1 - r$ нетривиальных решений. Учитывая $l_1 = \lambda + 1$, $p_2 = |\mu| - 1$, получаем утверждение теоремы в случае 4). ►

5.4. Функция Грина

Пусть D – односвязная область, ограниченная простой гладкой замкнутой кривой L .

Определение 5.3. Назовем функцию

$$G(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g(z, \zeta) \quad (5.33)$$

функцией Грина оператора Лапласа для области D , если $g(z, \zeta)$ – гармоническая функция по z в области D для любого $\zeta \in \bar{D}$ и $G|_L = 0$, т. е.

$$g|_L = -\ln \frac{1}{r} = \ln r \quad (z, \zeta \text{ изменяются в области } D, \quad r = |z - \zeta|).$$

В области D функция $G(z, \zeta)$ имеет особенность $\ln \frac{1}{|z - \zeta|}$.

С помощью функции Грина решение задачи Дирихле дается формулой:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial G(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma, \quad (5.34)$$

где $\tau = \tau(\sigma)$ – комплексная координата точек контура; n – внутренняя нормаль.

Пусть $H(z, \zeta)$ – гармоническая функция, сопряженная с $G(z, \zeta)$ по переменной z . Из условий Коши – Римана получим:

$$H(z, \zeta) = \int_{z_0}^z \left(-\frac{\partial G}{\partial y} dx + \frac{\partial G}{\partial x} dy \right), \quad (5.35)$$

где z_0 – фиксированная точка области D^+ , $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Поскольку область D является односвязной, то функция $H(z, \zeta)$ – однозначная и $H(z_0, \zeta) \equiv 0$.

Определение 5.4. Функция $M(z, \zeta) = G(z, \zeta) + iH(z, \zeta)$ называется *комплексной функцией Грина* области D .

Комплексная функция Грина аналитична по переменной z всюду, за исключением $z = \zeta$, где она имеет логарифмическую особенность. Тогда формула (как следует из (5.34), (5.35))

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial H(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma$$

определяет гармоническую функцию $v(x, y)$, сопряженную с $u(x, y)$. Отсюда

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial M(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma.$$

Это равенство задает аналитическую функцию, действительная часть которой на контуре равна $u(\sigma)$ и удовлетворяет дополнительному условию $v(z_0) = 0$.

Тогда оператор Шварца имеет вид:

$$Su = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial M(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma,$$

где $\frac{\partial M(z, \tau)}{\partial n}$ – ядро Шварца.

Если не учитывать условие $v(z_0) = 0$, то $F(z) = Su + i\beta_0$, где β_0 – произвольная константа и $\beta_0 = v(z_0)$.

Рассмотрим связь комплексной функции Грина для односвязной области с конформными отображениями.

Пусть функция $w = F(z, \zeta) = (z - \zeta)F_1(z, \zeta)$ конформно отображает область D в плоскости переменной z , ограниченную контуром L , на единичный круг в плоскости w и переводит точку $\zeta \in D$ в начало координат. В силу взаимной однозначности никакая другая точка области не переходит в 0, поэтому $F_1(z, \zeta) \neq 0$.

Теорема 5.9. Функция $M(z, \zeta) = G(z, \zeta) + iH(z, \zeta) = -\ln F(z, \zeta)$ есть комплексная функция Грина области D .

◀Достаточно установить, что $G(z, \zeta) = -\operatorname{Re} \ln F(z, \zeta)$ – это обычная функция Грина области D . По построению:

$$G(z, \zeta) = -\operatorname{Re} \ln F(z, \zeta) = -\ln |F(z, \zeta)| = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} - \ln |F_1(z, \zeta)|.$$

Функция $\ln|F_1(z, \zeta)|$ – гармоническая в области D (как действительная часть однозначной аналитической функции $\ln F_1$), поэтому G имеет единственную особенность $\ln \frac{1}{r}$. Когда z обходит контур L , соответствующая ей точка обходит единичную окружность. Поэтому на L $|F(z, \zeta)| = 1$, откуда $G|_L = 0$. ►

Замечание. Для многосвязной области такой простой связи функции Грина с конформными отображениями не существует.

В случае, когда соответствующее конформное отображение задается явно, функцию Грина можно также построить в явном виде. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решение задач Шварца и Дирихле для верхней полуплоскости.

На контуре (действительной оси) направление нормали n совпадает с направлением мнимой оси, причем $\frac{\partial \zeta}{\partial n} = i$, $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} = -i$, $\zeta = \xi + iy$, $\bar{\zeta} = \xi - iy$.

Следовательно, ядро Шварца имеет вид

$$T(z, \xi) = \frac{\partial M(z, \xi)}{\partial n} \Big|_{y=0} = \left[\frac{1}{z - \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial n} - \frac{1}{z - \bar{\zeta}} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \right]_{y=0} = i \left[\frac{1}{z - \xi} + \frac{1}{z - \xi} \right] = -\frac{2i}{\xi - z}.$$

Решение задачи Шварца в этом случае имеет вид:

$$f(z) = Su = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \frac{(-2i)}{\xi - z} d\xi + iv_0 = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi + iv_0,$$

а решение задачи Дирихле:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi.$$

Пример 2. Решение задач Шварца и Дирихле для круга с центром в начале координат радиусом R .

Функция, отображающая круг с центром в начале координат радиусом R на единичный круг, переводящая точку ζ в начало координат, имеет вид:

$$w = F(z, \zeta) = R \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - R^2}.$$

Тогда

$$M(z, \zeta) = -\ln F = -\ln(z - \zeta) + \ln(z\bar{\zeta} - R^2) - \ln R.$$

Проведем вычисления в полярных координатах, так как направление нормали противоположно направлению радиус-вектора точек контура.

$$\zeta|_L = Re^{i\varphi}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = -\frac{\partial \zeta}{\partial R} = -e^{i\varphi} = -\frac{\zeta}{R}, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} = -e^{-i\varphi} = -\frac{R}{\zeta}, \quad R^2 = \zeta \bar{\zeta}.$$

$$T(z, \zeta) = -\frac{\partial M}{\partial R} \Big|_L = \frac{-\frac{\partial \zeta}{\partial R}}{z - \zeta} + \frac{z \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial R}}{z \bar{\zeta} - R^2} = -\frac{\zeta}{R} \cdot \frac{1}{z - \zeta} - \frac{R}{\zeta} \cdot \frac{z}{\bar{\zeta}(z - \zeta)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z}.$$

Решение задачи Шварца:

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\varphi + iv_0.$$

Положив $z = re^{i\theta}$ и выделив действительную часть, получим решение задачи Дирихле для круга в виде интеграла Пуассона:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta)} d\varphi.$$

Замечание. Пусть D – конечносвязная область, ограниченная жордановыми кривыми. При однолистом отображении области D посредством функции $z^* = f(z)$ на некоторую другую область D^* , ограниченную кривыми Жордана, функция Грина $G(z, \zeta)$ переходит в функцию $G(f^{-1}(z^*), f^{-1}(\zeta^*))$, которая, очевидно, будет функцией Грина для области D^* . Следовательно, зная функцию Грина для одной области, можно получить посредством однолистных отображений функции Грина для других областей той же связности.

5.5. Краевые задачи для композиционных материалов

Рассмотрим математическую модель теплопроводности композиционных материалов. Ограничимся случаем стационарной ситуации (установившегося теплового потока). Пусть R^M , $M = 1, 2, 3$ – евклидово пространство переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$. Пусть композиционный материал геометрически описывается областью $D \subseteq R^M$, граница которой представляет собой замкнутую кусочно-гладкую поверхность (кривую) Γ . Пусть $\Omega \subset D$ – (многосвязная) область в D (матрица), заполненная не-

которым (проводящим) материалом, а D_k , $k=1, \dots, N$, – односвязные области (включения), заполненные другим материалом и дополняющие Ω до всей области D , т. е. $D = \Omega \bigcup_{k=1}^N L_k \bigcup_{k=1}^N D_k$, где $L_k = \partial D_k$ – замкнутые кусочно-гладкие поверхности (кривые).

В стационарном случае проводящие свойства композиционного материала описываются в терминах распределения температуры $T = T(\mathbf{x})$ и теплового потока $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$. С физической точки зрения температура измеряет энергию материальных частиц (молекул, электронов и т. п.) в единичном объеме материала, а тепловой поток характеризует скорость (в единицу времени) переноса тепла в единичном объеме. С математической точки зрения $T = T(\mathbf{x})$ представляет собой скалярное поле, зависящее от пространственной переменной $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$, а $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) = (q_1(\mathbf{x}), \dots, q_M(\mathbf{x}))$ – векторное поле той же переменной. Соотношение, описывающее зависимость теплового потока от температуры, называется *уравнением состояния*. В линейном случае уравнение состояния проводящего материала принимает форму закона Фурье:

$$\mathbf{q} = -\Lambda \nabla T, \quad (5.36)$$

где ∇T – градиент температуры; $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x})$ – некоторый тензор (называемый *тензором проводимости* материала). В случае композиционного материала соотношение (5.36) выполняется в каждой из компонент материала, и, следовательно, тензор $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x})$ принимает различные значения для различных компонент. Соотношение (5.36) означает (локальную) пропорциональность теплового потока и градиента температуры. Когда Λ зависит только от пространственной переменной $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$, соотношение (5.36) характеризует перенос тепла в смысле сплошной среды. В случае анизотропного материала тензор $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x})$ локально характеризуется симметричной положительно определенной матрицей:

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(\mathbf{x}) & \lambda_{12}(\mathbf{x}) & \lambda_{13}(\mathbf{x}) \\ \lambda_{21}(\mathbf{x}) & \lambda_{22}(\mathbf{x}) & \lambda_{23}(\mathbf{x}) \\ \lambda_{31}(\mathbf{x}) & \lambda_{32}(\mathbf{x}) & \lambda_{33}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Если $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}, T)$ зависит также от температуры, то композиционный материал представляет собой *нелинейную проводящую среду* и речь идет о нелинейной проводимости тепла.

Для локально-изотропной среды $\Lambda = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичный тензор; $\lambda(\mathbf{x})$ – скалярная положительная функция. В этом случае $\lambda(\mathbf{x})$ на-

зывается *коэффициентом (локальной) проводимости* (или просто *проводимостью*). Иногда для характеристики переноса тепла вводится величина $r = \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$ (или $R = \Lambda^{-1}$, где Λ^{-1} – обратная матрица для матрицы Λ), называемая *сопротивляемостью среды*.

Если в материале содержатся источники/стоки, плотность распределения которых равна $f(\mathbf{x})$, то тепловой поток $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ характеризуется уравнением

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \bigcup_{k=1}^N D_k. \quad (5.38)$$

Если источники и стоки отсутствуют, то соотношение (5.38) переходит в *уравнение непрерывности (неразрывности)* среды:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \bigcup_{k=1}^N D_k. \quad (5.39)$$

Подставляя (5.36) в (5.39), получаем, что температурное поле должно удовлетворять следующему (эллиптическому) уравнению:

$$\nabla \cdot (\Lambda \nabla T(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \bigcup_{k=1}^N D_k. \quad (5.40)$$

В случае, когда каждая из компонент материала является глобально изотропной, т. е. коэффициент проводимости $\lambda(\mathbf{x})$ постоянен в каждой из компонент, уравнение (5.40) представляет собой уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \bigcup_{k=1}^N D_k. \quad (5.41)$$

Другими словами, температурное поле является гармоническим во всех компонентах композиционного материала (в матрице и каждом включении). Поле температур характеризуется не только его внутренним состоянием, но также и соотношениями (краевыми условиями) на границе раздела сред.

Рассмотрим типы краевых условий в случае двумерных композиционных материалов. Пусть двумерный композиционный материал геометрически моделируется некоторой областью $D \subseteq \mathbb{C}$ на комплексной плоскости, а именно: матрица композиционного материала представляет собой многосвязную область $\Omega \subset D$ с внешней границей Γ , а N включений D_k , $k = 1, \dots, N$, (заполненных другим материалом) располагается внутри области Ω . Предположим для простоты, что граничные кривые Γ и

$L_k = \partial D_k$, $k = 1, \dots, N$, представляют собой простые кусочно-гладкие замкнутые кривые. Обозначим символом $\Lambda = \Lambda(z)$ тензор проводимости матрицы (т. е. материала, заполняющего область Ω), $\Lambda = \Lambda_k(z)$, $k = 1, \dots, N$, – тензоры проводимости включений. Граничные значения температуры на внешней граничной кривой Γ будем обозначать $T = T(t)$, $t \in \Gamma$, а предельные значения (изнутри и извне) температуры на кривых L_k будем обозначать соответственно

$$T_k^-(t) = \lim_{z \rightarrow t, z \in D_k} T_k(z), \quad T^+(t) = \lim_{z \rightarrow t, z \in \Omega} T(z).$$

Если на внешней границе Γ задано температурное поле $f(t)$, то соответствующее краевое условие (условие изотермальной перегородки)

$$T(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (5.42)$$

представляет собой краевое условие задачи Дирихле.

Если внешняя граница Γ является идеальным термоизолятором, то соответствующее краевое условие (условие адиабатической стенки) имеет вид краевого условия задачи Неймана

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(t) = 0, \quad t \in \Gamma, \quad (5.43)$$

в котором дифференцирование проводится в направлении внешней нормали.

Если внешняя граница пропускает некоторый тепловой поток, т. е. на границе Γ задан нормальный поток $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = g$, то краевое условие (5.43) переходит в условие вида

$$\Lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}(t) = g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (5.44)$$

Если матрица композита заполнена изотропным материалом, то условие (5.44) представляет собой неоднородное краевое условие Неймана

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(t) = g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (5.45)$$

Вместо материалов, удовлетворяющих закону Ньютона, можно рассматривать другие типы материалов. В частности, условие (5.45) может переходить при этом в более сложное краевое условие вида

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(t) + \gamma T(t) = h(t), \quad t \in \Gamma, \quad (5.46)$$

которое представляет собой краевое условие третьего рода.

Кроме краевых условий на внешней границе, температурное поле должно также удовлетворять некоторым условиям сопряжения на грани-

це раздела матрица – включения. Для простоты сформулируем эти условия в случае, когда каждая из компонент композита заполнена изотропным материалом, т. е. коэффициенты проводимости λ, λ_k постоянны. Наиболее распространенным условием сопряжения является так называемое *условие идеального контакта*:

$$T^+(t) = T_k^-(t), \quad \lambda \frac{\partial T^+}{\partial \mathbf{n}}(t) = \lambda_k \frac{\partial T_k^-}{\partial \mathbf{n}}(t), \quad t \in L_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.47)$$

Это условие означает непрерывность температуры и непрерывность потока при переходе через каждую из кривых L_k в нормальном направлении.

Естественным является также условие, когда температура и/или поток испытывают скачок при переходе через кривые L_k :

$$T^+(t) - T_k^-(t) = g_k(t),$$

$$\lambda \frac{\partial T^+}{\partial \mathbf{n}}(t) - \lambda_k \frac{\partial T_k^-}{\partial \mathbf{n}}(t) = h_k(t), \quad t \in L_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.48)$$

Рассматриваются также композиты, для которых на всех кривых L_k или хотя бы на части этих кривых выполняется условие *неидеального контакта*

$$\lambda \frac{\partial T^+}{\partial \mathbf{n}}(t) + \gamma_k (T^+(t) - T_k^-(t)) = 0, \quad \lambda \frac{\partial T^+}{\partial \mathbf{n}}(t) = \lambda_k \frac{\partial T_k^-}{\partial \mathbf{n}}(t). \quad (5.49)$$

Коэффициент γ_k^{-1} называется *коэффициентом Капицы*.

Наконец, в случае, когда некоторое включение заполнено идеальным проводником ($\lambda_k = \infty$), естественным является сформулировать для соответствующей кривой условие сопряжения в виде обобщенного условия Дирихле

$$T(t) = c_k, \quad t \in L_k, \quad (5.50)$$

где c_k – неопределенная положительная постоянная, которая находится в дальнейшем в ходе решения задачи.

Таким образом, задача определения распределения температуры в композиционном материале даже в случае потенциальных полей представляет собой смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа. Термин *смешанная краевая задача* означает в данном случае, что краевые условия, вообще говоря, различны для различных компонентов линии раздела сред.

Представим уравнение состояния и краевые условия, описывающие теплопроводность композиционных материалов, в комплексной форме. Предположим сначала, что области D_k заполнены пористым материалом. Тем самым неизвестную функцию $T(z)$ следует определить, исходя из краевых условий на границе многосвязной области. Пусть на границе выполняется одно из краевых условий (5.42), (5.45) или (5.46). Если температура $T(z)$ гармонична в многосвязной области Ω , то $T(z)$ может быть представлена в форме

$$T(z) = \operatorname{Re}[\Phi(z) + \sum_{k=1}^N A_k \ln(z - z_k)], \quad (5.51)$$

где $\Phi(z)$ – однозначная аналитическая функция в многосвязной области Ω , z_k – некоторые фиксированные точки в областях D_k , а вещественные постоянные A_k удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^N A_k = 0.$$

Подставляя значения $T(z)$ из (5.51) в соответствующее краевое условие, приходим к краевой задаче для аналитической функции $\Phi(z)$.

Предположим далее, что каждая из компонент композиционного материала заполнена изотропным материалом, т. е. коэффициенты проводимости $\lambda, \lambda_k, k=1, \dots, N$, постоянны. Пусть функция $T(z)$ гармонична в областях $\Omega, D_k, k=1, \dots, N$, т. е. удовлетворяет в этих областях уравнению Лапласа (5.41). Обозначим через T и T_k распределение температур в областях $\Omega, D_k, k=1, \dots, N$, соответственно. Предположим, что на каждой кривой L_k выполняется условие идеального контакта (5.47). Введем функции

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= T(z) + iV(z), \quad z \in \Omega; \\ \varphi_k(z) &= \frac{\lambda + \lambda_k}{2\lambda} (T_k(z) + iV_k(z)), \quad z \in D_k, \quad k=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.52)$$

которые являются однозначными аналитическими в соответствующих областях, непрерывно дифференцируемыми вплоть до их границ. Известно, что функция $\varphi(z)$ является, вообще говоря, многозначной аналитической функцией в многосвязной области Ω . Но в рассматриваемом случае функция $T(z)$ допускает однозначное гармоническое продолжение в односвязную область D . Следовательно, продолженная функция является

вещественной частью однозначной аналитической функции в D . Функция $\varphi(z)$ есть сужение этой аналитической функции на область Ω , т. е. является однозначной аналитической в Ω . Функции $\varphi(z)$, $\varphi_k(z)$ называются *комплексными потенциалами* соответствующих областей.

Представим условие идеального контакта (5.47) в комплексной форме. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} = -n_2 \frac{\partial}{\partial x} + n_1 \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5.53)$$

где нормальный вектор $\mathbf{n}$ отождествляется с комплексным числом $\mathbf{n} = n_1 + i n_2$, а $z = x + i y$. Применяя второй оператор (5.53) к первому краевому условию (5.47), получаем

$$-n_2 \frac{\partial T^+}{\partial x} + n_1 \frac{\partial T^+}{\partial y} = -n_2 \frac{\partial T_k^-}{\partial x} + n_1 \frac{\partial T_k^-}{\partial y}. \quad (5.54)$$

Второе краевое условие (5.47) преобразуется непосредственно:

$$\lambda n_1 \frac{\partial T^+}{\partial x} + \lambda n_2 \frac{\partial T^+}{\partial y} = \lambda_k n_1 \frac{\partial T_k^-}{\partial x} + \lambda_k n_2 \frac{\partial T_k^-}{\partial y}. \quad (5.55)$$

Введем вспомогательные комплексные потенциалы областей Ω , D_k :

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z \in \Omega; \\ \psi_k(z) &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\lambda + \lambda_k}{2\lambda} \left(\frac{\partial T_k}{\partial x} - i \frac{\partial V_k}{\partial y} \right), \quad z \in D_k, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Подставляя эти соотношения в (5.54), (5.55) и исключая $\overline{\psi^+}$, приходим к следующему краевому условию:

$$\psi^+(t) = \psi_k^-(t) + \rho_k \overline{\mathbf{n}^2} \psi_k^-(t), \quad t \in L_k, \quad (5.57)$$

где $\mathbf{n} = n_1 + i n_2$, а $\rho_k = \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda}$ — так называемый *контрастный параметр*

Бергмана. Интегрируя краевое условие (5.57) и принимая значение постоянной интегрирования равным 0, приходим к краевому условию относительно неизвестных функций $\varphi(z)$, $\varphi_k(z)$:

$$\varphi^+(t) = \varphi_k^-(t) + \rho_k \overline{\varphi_k^-(t)}, \quad t \in L_k. \quad (5.58)$$

Краевые задачи (5.57), (5.58) являются частными случаями *краевой задачи R-линейного сопряжения* (задачи Маркушевича).

Если вместо одного из первых условий (5.47) рассматривается условие с ненулевым скачком

$$T^+(t) - T_k^-(t) = g_k(t),$$

то, обозначая через $g_k^-(z)$ решение краевой задачи Шварца для соответствующей кривой

$$\operatorname{Re} g_k^-(t) = g_k(t),$$

введем новую неизвестную функцию $\tilde{T}_k^-(z) = T_k^-(z) + \operatorname{Re} g_k^-(z)$. Тогда краевое условие задачи с ненулевым скачком сводится к условию непрерывной продолжимости новых функций. Последнее условие обеспечивает, как и ранее, однозначность неизвестной гармонической функции в односвязной области D . Вводя тогда комплексные потенциалы по формулам, аналогичным (5.52) (или (5.56)), приходим к (неоднородному) краевому условию задачи R-линейного сопряжения на соответствующей кривой L_k :

$$\varphi^+(t) = \varphi_k^-(t) + \rho_k \overline{\varphi_k^-(t)} + c_k(t), \quad t \in L_k.$$

Аналогичные рассуждения можно провести в случае, когда неоднородным заменяется второе условие из (5.47) (но уже для потенциалов ψ).

Несколько более сложным является преобразование к комплексной форме краевого условия неидеального контакта (5.49). Прделаем эти преобразования. Будем предполагать, как и ранее, что коэффициенты проводимости $\lambda, \lambda_k, k = 1, \dots, N$, постоянны в соответствующих компонентах композиционного материала. Предположим также для простоты, что все включения имеют форму круговых цилиндров:

$$D_k = \mathbf{D}_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r_k\}.$$

Введем вспомогательные комплексные потенциалы:

$$\gamma(z) = T(z) + iV(z), \quad z \in \Omega;$$

$$\gamma_k(z) = T_k(z) + iV_k(z), \quad z \in \mathbf{D}_k, k = 1, \dots, N. \quad (5.59)$$

Зафиксируем кривую L_k , для которой проведем преобразование краевого условия, и для краткости в дальнейшем будем опускать индекс k у соответствующих функций. Перепишем тогда нормальные производные неизвестных функций в виде:

$$\frac{\partial T^\pm}{\partial \mathbf{n}}(t) = \mathbf{n} \cdot \nabla T^\pm(t) = \frac{1}{r_k} \operatorname{Re} \left[(t - a_k) (\gamma^\pm)'(t) \right], \quad |t - a_k| = r_k. \quad (5.60)$$

Применяя условия Коши – Римана и используя представление производных по нормали и по касательной (5.53), имеем

$$\frac{\partial T^\pm}{\partial \mathbf{n}} = n_1 \frac{\partial T^\pm}{\partial x} + n_2 \frac{\partial T^\pm}{\partial y} = n_1 \frac{\partial V^\pm}{\partial y} - n_2 \frac{\partial V^\pm}{\partial x} = \frac{\partial V^\pm}{\partial \mathbf{s}}.$$

Отсюда следует $\lambda \frac{\partial V^+}{\partial \mathbf{s}}(t) = \lambda_k \frac{\partial V^-}{\partial \mathbf{s}}(t)$, $|t - a_k| = r_k$. Интегрируя данное соотношение вдоль соответствующей окружности, получаем

$$\lambda V^+(t) = \lambda_k V^-(t), \quad |t - a_k| = r_k. \quad (5.61)$$

Используя (5.59), (5.60), преобразуем первое из условий (5.49) к виду

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha^+(t) - \alpha^-(t) + \frac{\lambda_k}{r_k \gamma_k} (t - a_k) (\alpha^-)'(t) \right\} = 0, \quad |t - a_k| = r_k. \quad (5.62)$$

Используя (5.61), (5.62), приходим к следующей форме краевого условия (5.49):

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) = \varphi^-(t) - \rho_k \overline{\varphi^-(t)} + 2\mu_k \operatorname{Re} \left\{ (t - a_k) (\varphi_k^-)'(t) \right\} = 0, \\ |t - a_k| = r_k, \end{aligned} \quad (5.63)$$

где $\rho_k = \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda}$; $\mu_k = \frac{1 + \rho_k}{2r_k \gamma_k}$; $\varphi_k = \frac{\lambda_k + \lambda}{2\lambda_k} \alpha_k$. Используя симметрию относительно окружности, окончательно получаем из (5.63)

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) = \varphi^-(t) - \rho_k \overline{\varphi^-(t)} + \mu_k (t - a_k) (\varphi_k^-)'(t) + \\ + \mu_k \frac{r_k^2}{(t - a_k)} \overline{(\varphi_k^-)'(t)} = 0, \quad |t - a_k| = r_k. \end{aligned}$$

Преобразуем к комплексной форме краевые условия на внешней границе области Ω . Рассмотрим простейшую из приведенных выше задач – задачу Дирихле (5.42). Построим сначала решение краевой задачи Шварца для внешности области D :

$$\operatorname{Re}\{f_0(t)\} = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (5.64)$$

Тогда, вводя новую неизвестную функцию $\varphi_0^-(z)$, аналитическую во внешности области D , перепишем краевое условие задачи Дирихле в следующей комплексной форме:

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) - \overline{\varphi^-(t)} + f_0(t), \quad t \in \Gamma.$$

Аналогичным образом преобразуются другие краевые условия на внешней границе (при этом, например для краевого условия задачи Неймана, используются потенциалы ψ, ψ_k).

5.6. Задача Дирихле для многосвязной области. Гармоническая мера

Конформное отображение многосвязной области аналитическими функциями можно применить для решения задачи Дирихле в случае многосвязных областей.

Пусть D – $(N+1)$ -связная область, ограниченная кусочно-гладкими кривыми $L_0, L_1, \dots, L_N$, причем $\text{cl}(\text{int } L_k) \cap \text{cl}(\text{int } L_j) = \emptyset$, $k, j = 1, \dots, N$, $k \neq j$; $\text{cl}(\text{int } L_k) \subset \text{int } L_0$, $k = 1, \dots, N$. Рассмотрим задачу Дирихле для такой области: пусть на граничных кривых области D задана $N+1$ функция $f_0, f_1, \dots, f_N$, ограниченная и непрерывная на $L_0, L_1, \dots, L_N$, за исключением некоторого замкнутого счетного множества точек разрыва; требуется найти функцию $u(z)$, гармоническую и ограниченную в области D , такую что

$$\lim_{z \rightarrow \zeta \in L_k} u(z) = f_k(\zeta)$$

для любой точки непрерывности $\zeta \in L_k$.

Единственность решения задачи Дирихле устанавливается для любой регулярной области, доказательства же существования решений в случае односвязной и многосвязной областей различаются существенно.

Обозначим для краткости через $f(\zeta)$ семейство заданных функций (т. е. $f(\zeta)|_{L_k} = f_k(\zeta)$). Пусть далее $\omega: D \rightarrow \{w: |w| < 1\}$ – функция (не обязательно однозначная), осуществляющая конформное отображение области D на единичный круг, а $z(w)$ – обратная к ней функция. Обозначим через G_0 фундаментальную область группы автоморфизмов $\gamma(D, w)$ области D . Проведем в области D попарно непересекающиеся разрезы, соединяющие внешнюю компоненту границы L_0 с каждой из внутренних компонент. Обозначим через D' односвязную область, получающуюся из D после проведения разрезов (напомним, что D' является образом области G_0 при отображении $z(w)$). Группу $\gamma(D, w)$ будем считать состоящей из отображений $A_0 = \text{id}, A_1, A_2, \dots$, занумерованных в каком-нибудь порядке. Обозначим через G_γ образ области G_0 при отображении

единичного круга $|w| < 1$ с помощью дробно-линейного отображения A_v . Пусть σ_v – совокупность дуг окружности $|w| = 1$, отображаемых на границу ∂G_v области G_v .

Теорема 5.10. Функция $u(z)$, решающая задачу Дирихле в области D с граничной функцией $f(\zeta)$, может быть представлена в виде $u(z) = v(\omega(z))$, где

$$v(\rho e^{i\varphi}) = \sum_v \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_{\sigma_v} \frac{f(z(e^{i\theta})) d\theta}{1-2\rho \cos(\varphi-\theta) + \rho^2} \quad (\rho < 1). \quad (5.65)$$

Пусть D – некоторая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а E – некоторое множество, расположенное на границе этой области. Обозначим через $\omega(z, E, D)$ решение задачи Дирихле в области D с граничными данными, равными единице на множестве E и нулю на остальной части границы ∂D . Функция $\omega(z, E, D)$ называется *гармонической мерой множества E относительно области D* .

Известно, что решение указанной задачи Дирихле существует, если D – односвязная (и даже конечно-связная, см. теорему 5.10), ограниченная кусочно-гладкой кривой (кривыми), а E – конечное или даже счетное множество дуг этих кривых.

Из определения решения задачи Дирихле следует, что гармоническая мера является гармонической и ограниченной в области D и непрерывной в каждой точке непрерывности граничных данных. Кроме того, в силу принципа максимума и минимума гармонической функции имеем

$$0 \leq \omega(z, E, D) \leq 1. \quad (5.66)$$

При этом, если для некоторого $z \in D$ имеет место знак равенства в левой (правой) части (5.66), то $\omega(z, E, D) \equiv 0$ (соответственно $\omega(z, E, D) \equiv 1$).

Отметим некоторые свойства гармонической меры.

Если множество E состоит из не более чем счетного множества точек, то $\omega(z, E, D) \equiv 0$, а если $\partial D \setminus E$ не более чем счетно, то $\omega(z, E, D) \equiv 1$.

Если $E_1, E_2 \subseteq \partial D, E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то

$$\omega(z, E_1 \cup E_2, D) = \omega(z, E_1, D) + \omega(z, E_2, D). \quad (5.67)$$

Если функция $w(z)$ конформно отображает область D на область D' , а множество E переходит при этом во множество E' , то

$$\omega(z, E, D) = \omega(w(z), E', D').$$

Гармоническая мера является решением задачи Дирихле при специальных граничных данных. Однако сама гармоническая мера может быть использована для построения решения краевых задач при любых граничных данных.

Ниже используем понятие гармонической меры при построении оператора Шварца для многосвязной круговой области. Пусть $\mathbf{D}_k = \mathbf{D}(a_k, r_k) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a_k| < r_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{D}_k \cap \mathbf{D}_j = \emptyset, k \neq j$.

Рассмотрим бесконечную N -связную круговую область $\mathbf{D} = \text{ext} \bigcup_{k=1}^N \text{cl} \mathbf{D}_k$,

ограниченную окружностями $\mathbf{T}_k = \partial \mathbf{D}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Для определенности выберем ориентацию на этих окружностях, оставляющую область $\mathbf{D}$ слева при обходе. Введем по формулам (4.27) отображения симметрии

$$z_{(k_m k_{m-1} \dots k_1)}^* = \left(z_{(k_{m-1} \dots k_1)}^* \right)_{k_m}^*.$$

Лемма 5.2. Пусть $v_k = \exp(-i\mu_k)$, $\mu_k \in \mathbf{R}$, — заданные комплексные числа, $w \in \text{cl} \mathbf{D}$ — фиксированная точка из замыкания области $\mathbf{D}$. Тогда система функциональных уравнений

$$\gamma_k(z) = -v_k \sum_{n \neq k} \overline{v_n} \left[\overline{\gamma_n(z_{(n)}^*)} - \overline{\gamma_n(w_{(n)}^*)} \right],$$

$$|z - a_k| \leq r_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5.68)$$

имеет только тривиальное решение в классе функций, аналитических в объединении областей $\mathbf{D}_k$.

◀Предположим противное. Пусть γ_k — нетривиальное решение системы (5.68). Тогда функция

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^N \overline{v_n} \left[\overline{\gamma_n(z_{(n)}^*)} - \overline{\gamma_n(w_{(n)}^*)} \right]$$

аналитична в области $\text{cl} \mathbf{D}$. Функции γ_k, ψ удовлетворяют краевому условию задачи $\mathbf{R}$ -линейного сопряжения (см. раздел 5.3):

$$v_k \psi(t) = \gamma_k(t) - \overline{\gamma_k(t)} + \gamma_n(w_{(k)}^*), \quad t \in \mathbf{T}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Последние соотношения могут быть переписаны в виде

$$\text{Re } v_k \psi(t) = c_k, \quad t \in \mathbf{T}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.69)$$

$$2 \text{Im } \gamma_k(t) = \text{Im } \psi(t) + d_k, \quad t \in \mathbf{T}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.70)$$

где $c_k + i d_k = \gamma_k(w_{(k)}^*)$. Рассмотрим первую из этих задач (задачу Гильберта с постоянными коэффициентами). Пусть ψ — решение этой зада-

чи. Тогда граница области $\psi(\mathbf{D})$ состоит из отрезков $\operatorname{Re} v_k \zeta = c_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Но в этом случае точке $\zeta = \infty \in \psi(\mathbf{D})$ соответствует внутренняя точка области $\mathbf{D}$. Это противоречит ограниченности функции ψ в $\operatorname{cl} \mathbf{D}$. Следовательно, (5.69) имеет только постоянное решение $\psi(z) \equiv c$, $\operatorname{Re} v_k c = c_k$, в классе функций, аналитических в $\mathbf{D}$ и непрерывных в $\operatorname{cl} \mathbf{D}$. Тогда $\gamma_k(z) = \operatorname{const}$, а следовательно, в силу (5.68) $\gamma_k(z) \equiv 0$. ►

5.7. Метод функциональных уравнений

В случае установившегося стационарного потока без источников и стоков свойства композиционных материалов могут быть сформулированы в терминах потенциалов соответствующих полей (в частности, поля температур). Это означает, что функция $T = T(z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в каждой части композита:

$$\Delta T(z) = 0, \quad z \in \Omega \bigcup_{k=1}^N D_k, \quad (5.71)$$

где область Ω соответствует матрице, а D_k , $k = \overline{1, N}$, соответствуют включениям.

Поведение поля температур вблизи границы области Ω может быть описано краевыми условиями различных типов. Обозначим через Γ внешнюю границу композиционного материала, а через L_k – границу области D_k . Предположим, что эти кривые – кусочно-гладкие и не имеют общих точек. Метод функциональных уравнений применим в случае, когда все граничные кривые – окружности, т. е. в случае многосвязной круговой области Ω . Зафиксируем ориентацию граничных кривых. Будем считать кривую Γ ориентированной против часовой стрелки, а все кривые L_k – по часовой стрелке. Предположим также, что на границе раздела матрицы и включений выполняется условие идеального контакта:

$$T^+(t) = T_k(t), \quad \lambda \frac{\partial T^+}{\partial n}(t) = \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial n}(t), \quad t \in \bigcup_{k=1}^N L_k, \quad (5.72)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению вектора внешней нормали,

$$T^+(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in \Omega}} T(z), \quad T_k(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D_k}} T(z).$$

Продemonстрируем, как метод функциональных уравнений применяется для решения смешанной краевой задачи (5.71) – (5.72), которая может быть переформулирована как задача R- линейного сопряжения.

Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $C(\partial U)$ – банахово пространство функций, непрерывных на окружности $\partial U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, снабженное нормой $\|f\| = \max_{\partial U} |f(z)|$.

Пусть $C^+ \subset C$ – подпространство функций, определенных на ∂U , которые можно аналитически продолжить с ∂U на $\bar{U}$. Для функции $f \in C^+$, $f : \partial U \rightarrow \mathbb{C}$, и ее аналитического продолжения $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $\bar{U} = U \cup \partial U$, будем использовать одно и то же обозначение. Тогда можно считать, что $C^+ = C^+(\bar{U})$, $\|f\|_{C^+} = \max_{z \in \bar{U}} |f(z)|$.

Рассмотрим отображение замкнутого единичного круга в открытый круг U $f : \bar{U} \rightarrow U$, где $f \in C^+(\bar{U})$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 5.11 (теорема Данжуа – Вулфа). Пусть $f \in C^+(\bar{U})$ отображает замкнутый единичный круг $\bar{U}$ в открытый единичный круг U . Тогда f имеет единственную неподвижную точку z_0 в U и $|f'(z_0)| < 1$. Последовательность приближений $f^n(z)$, определяемая формулами $f^0(z) = z$, $f^1(z) = f(z)$, $f^2(z) = f(f(z))$, ..., $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$ сходится равномерно в $\bar{U}$ к точке z_0 .

Уравнение

$$\varphi(z) = G(z)\varphi[f(z)] + g(z), \quad (5.73)$$

которое выполняется в окрестности точки z_0 , называется *локальным функциональным уравнением*. Здесь $G(z)$, $g(z)$ – заданные функции, $\varphi(z)$ – неизвестная функция. Все функции предполагаются аналитическими в окрестности z_0 .

Если для заданных функций g , $G \in C^+$ уравнение (5.73) выполняется в $\bar{U}$, то его называют *глобальным функциональным уравнением* относительно $\varphi \in C^+$ в единичном круге.

Решение глобального функционального уравнения (5.73) в классе аналитических функций основано на методе последовательных приближений, а именно: имеют место следующие утверждения (теоремы 5.12, 5.13).

Теорема 5.12. Пусть функция $G(z) \in C^+(\bar{U})$, а отображение $f: \bar{U} \rightarrow U$ является отображением внутрь области. Если $G(z_0)[f'(z_0)]^j \neq 1$ для всех $j = 0, 1, \dots$, то однородное функциональное уравнение

$$\varphi(z) = G(z)\varphi[f(z)], |z| \leq 1, \quad (5.74)$$

имеет только тривиальное решение в классе функций $C^+(\bar{U})$. Если при некотором j выполняется равенство $G(z_0)[f'(z_0)]^j = 1$, то уравнение (5.74) будет иметь тривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняются условия разрешимости (эти условия могут быть выписаны в терминах коэффициентов Тейлора функций f, G в точке z_0).

Теорема 5.13. Пусть $g \in C^+(\bar{U})$, а отображение $f: \bar{U} \rightarrow U$ является отображением внутрь области, $g(z_0) = 0$, где z_0 – неподвижная точка отображения f . Тогда уравнение

$$\varphi(z) = \varphi[f(z)] + g(z), |z| \leq 1, \quad (5.75)$$

имеет решение с точностью до произвольной постоянной, представляемое в форме равномерно сходящегося функционального ряда:

$$\varphi(z) = \sum g[f^j(z)] + c. \quad (5.76)$$

Рассмотрим метод функциональных уравнений на примере решения задачи R-линейного сопряжения, которая является важной задачей для механики композиционных материалов. Необходимо найти функции $\psi(z)$, $\psi_k(z)$, аналитические в Ω , D_k соответственно ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^N \bar{D}_k$, $D_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r_k\}$, $k = \overline{1, N}$), непрерывные в замыкании этих областей, удовлетворяющие условию R-линейного сопряжения:

$$\psi(t) = \psi_k(t) + \rho \left(\frac{r_k}{t - a_k} \right)^2 \overline{\psi_k(t) - 1}, |t - a_k| = r_k, k = \overline{1, N}, \quad (5.77)$$

где ρ – заданная константа. Предположим, что $|\rho| < 1$ (этот случай является наиболее интересным с точки зрения механики).

Сведем уравнение (5.77) к системе функциональных уравнений. $N+1$ неизвестная функция $\psi(z)$, $\psi_1(z)$, ..., $\psi_N(z)$ удовлетворяет N краевым условиям R-линейного сопряжения (5.7.7). Таким образом, не-

обходимо найти еще одно уравнение, чтобы замкнуть систему. Построим на основе функций $\psi(z)$, $\psi_1(z)$, ..., $\psi_N(z)$ новую функцию Φ , аналитическую в Ω и на $\bigcup_{k=1}^N D_k$, имеющую нулевой скачок вдоль каждого контура L_k и ограниченную в $\mathbb{C}$. Применяя теорему Лиувилля получим, что $\Phi(z) = c$, где c – константа (причем $c = 0$). Функция Φ имеет следующий вид:

$$\Phi(z) := \begin{cases} \psi_m(z) - \rho \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, m_2}^* (W_{m_1, m_2, k} \psi_k)(z) - 1, & |z - a_m| \leq r_m, \quad m = \overline{1, N}, \\ \psi(z) - \rho \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, m_2} (W_{m_1, m_2, k} \psi_k)(z), & z \in \Omega, \end{cases}$$

где

$$(W_{m_1, m_2, k} \psi_k)(z) = \left(\frac{r_k}{z - a_k - m_1 - im_2} \right)^2 \overline{\psi_k \left(\frac{r_k^2}{t - a_k - m_1 - im_2} + a_k \right)} \quad (5.78)$$

и

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m_1, m_2}^* W_{m_1, m_2, k} := \sum_{k \neq m} \sum_{m_1, m_2} W_{m_1, m_2, k} + \sum_{m_1, m_2} {}'W_{m_1, m_2, k},$$

$\sum_{m_1, m_2} {}'$ означает суммирование по всем m_1, m_2 , кроме $(m_1, m_2) = (0, 0)$. Пре-

образование $\alpha(\bar{z}) = \frac{r_k^2}{t - a_k - m_1 - im_2} + a_k$ является преобразованием Мобиуса по $\bar{z}$ для фиксированного k . Если $m_1 + im_2 = 0$, то $\alpha(\bar{z})$ – это инверсия относительно окружности L_k . $\alpha(\bar{z}) \neq 0$ есть композиция инверсии относительно окружности $L_k + m_1 + im_2$ и переноса на вектор $-m_1 - im_2$, т. е. отображение $\alpha(\bar{z})$ переводит замкнутый круг $|z - a_k| \leq r_k$ в другой круг, лежащий внутри открытого круга $|z - a_k| < r_k$.

Рассмотрим банахово пространство C_k непрерывных на L_k функций с нормой $\|\psi_k\| = \max_{L_k} |\psi_k(t)|$, $k = \overline{1, N}$, и замкнутое подпространство $C_k^+ \subset C_k$ функций ψ_k , допускающих аналитическое продолжение на D_k .

Рассмотрим также банахово пространство C^+ , состоящее из функций $\Psi := \psi_k \in C_k^+$ для всех $k = \overline{1, N}$ с нормой $\|\Psi\| := \max_k \|\psi_k\|$.

Оператор $W_{m_1, m_2, k}$, определяемый формулой (5.78), является компактным в C_k^+ при фиксированных $m_1, m_2 \in Z$.

Так как $\Phi(z) = 0$, получаем систему линейных функциональных уравнений:

$$\psi_m(z) = \rho \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, m_2}^* (W_{m_1, m_2, k} \psi_k)(z) + 1, \quad |z - a_m| \leq r_m, \quad m = \overline{1, N}, \quad (5.79)$$

относительно $\psi_m \in C_m^+$. Эта система может быть рассмотрена как уравнение в пространстве C^+ с неизвестной функцией $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \rho \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, m_2}^* (W_{m_1, m_2, k} \Psi)(z) + 1, \quad z \in \bigcup_{k=1}^N (D_k \cup T_k), \quad (5.80)$$

где $\Psi(z) = \psi_m(z)$, $|z - a_m| \leq r_m$, $m = \overline{1, N}$. Заметим, что система уравнений (5.79) и уравнение (5.80) могут быть сведены к системе функциональных уравнений вида (5.73) на каждом из кругов D_k . Зафиксируем $m = m_0$ и рассмотрим все соотношения в (5.79) при $m \neq m_0$. В каждом из них сделаем замену переменной $Z = \alpha(\bar{z})$. Тогда, находя в этих соотношениях $\overline{\psi_m \alpha(\bar{z})}$ и подставляя их в соотношение с номером m_0 , получим функциональное уравнение относительно $\psi_{m_0}(z)$ на круге D_{m_0} . Проведем эту операцию с каждым из фиксированных значений индекса. Непосредственно вычисляется, что условие $G(z_0)[f'(z_0)]^j \neq 1$, приведенное в теореме 5.72, в данном случае выполняется для любого j . Имеет место следующий результат.

Теорема 5.14. Функциональное уравнение (5.80) имеет единственное решение в классе функций C^+ , которое может быть найдено методом последовательных приближений в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} \psi_m(z) = & 1 + \rho \sum_{k_1=1}^N \sum_{j_1}^* W_{j_1, k_1} \Psi(z) + \\ & + \rho^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{j_1}^* \sum_{j_2}^* W_{j_1, k_1} W_{j_2, k_2} \Psi(z) + \dots, \quad |z - a_m| \leq r_m, \quad m = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Функция $\psi(z)$ имеет вид

$$\psi(z) = \rho \sum_{k=1}^N \sum_j (W_{j,k} \psi_k)(z), \quad z \in \Omega \cup \partial\Omega. \quad (5.82)$$

Сходимость в C^+ равномерная, поэтому суммы рядов (5.81) и (5.82) являются аналитическими функциями в D_k и Ω соответственно.

Литература

1. Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. 2-е изд. М., 1970.
2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М., 1977.
3. Симоненко, И. Б. Новый общий метод исследования операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений / И. Б. Симоненко // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 3.
4. Kuczma, M. Iterative functional equations / M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger. Cambridge, 1990.
5. Kuczma, M. Functional Equations in a Single Variable / M. Kuczma. Warsaw, 1968.
6. Kufner, A. Function Spaces / A. Kufner, O. John, S. Fučík. Amsterdam, 1977.
7. Mityushev, V. V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / V. V. Mityushev, E. V. Pesetskaya, S. V. Rogosin // Thermal Properties of Cellular and Porous Materials / Ed. A. Öchsner, Murch, de Lemos. Amsterdam, 2007.
8. Mityushev, V. V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions : Theory and applications / V. V. Mityushev, S. V. Rogosin. Boca Raton-London, 1999.
9. Mityushev, V. V. Hilbert boundary value problem for multiply connected domains / V. V. Mityushev // Complex variables. 1998. Vol. 35.

Глава 6

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ И ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

6.1. Принцип гомогенизации для композитов с богатой микроструктурой

Следующие общие замечания о применении метода гомогенизации при исследовании композиционных материалов приводятся в основном в соответствии с монографией А. В. Черкаева [5]. Под композиционным материалом (композитом) понимают структуру, собранную из большого числа компонентов (фрагментов) данных материалов, перемешанных определенным способом. Такую ситуацию можно, например, смоделировать, если считать, что сам композит неограничен. Предполагается, что каждая компонента по размеру гораздо меньше, чем материал в целом, однако больше, чем входящие в нее молекулы. Обычно полагают, что способ перемешивания является в некотором смысле регулярным. В частности, метод гомогенизации хорошо работает в случае периодических, квазипериодических или статистически однородных материалов.

Поскольку не всегда возможно получить полную информацию о локальных значениях параметров неоднородного материала, к тому же не все эти значения являются важными, то модель композиционного материала упрощается с помощью использования метода усреднения. Такая процедура называется *гомогенизацией* (более подробное описание применения метода гомогенизации при исследовании дифференциальных уравнений можно найти, например, в монографии В. В. Жикова, С. М. Козлова, О. А. Олейник [8]). Применяя гомогенизацию в случае композиционных материалов, мы заменяем исходный материал с быстро меняющимся свойством $\sigma(\mathbf{x})$ (например, с проводимостью $\lambda(\mathbf{x})$) на однородный материал с усредненным свойством σ_e (например, с усредненной проводимостью λ_e). Эти усредненные параметры образуют тензор эффективного свойства (например, тензор эффективной проводимости). В от-

личие от быстро осциллирующего исходного параметра $\sigma(\mathbf{x})$, тензор эффективного свойства является либо постоянным, либо (в частности, в квазипериодическом случае) достаточно гладко меняющейся тензорной функцией от $\mathbf{x}$.

Для того чтобы пояснить данное определение в случае небольших периодических элементов, используем итерационную процедуру. Пусть композиционный материал имеет периодическую двухфазовую структуру. Предположим, что соответствующая область Ω состоит из кубов Ω_i и тензор проводимости каждого куба линейного размера $\frac{1}{2^m}$ один и тот же. Будем считать также, что каждый куб такого размера Ω^m разделен на две части – Ω_1^m и Ω_2^m , содержащие материалы с постоянными тензорами проводимости λ_1 и λ_2 соответственно. Тогда тензор проводимости $\lambda(\mathbf{x})$ в каждой точке $\mathbf{x}$ куба Ω^m равен

$$\lambda(\mathbf{x}) = \chi^m(\mathbf{x})\lambda_1 + (1 - \chi^m(\mathbf{x}))\lambda_2,$$

где χ^m – периодическое продолжение характеристической функции множества Ω_1^m .

Рассмотрим последовательность таких процедур, а именно, будем считать, что каждый репрезентативный куб Ω^m разделен на 8 кубов Ω^{m+1} , линейные размеры которых в два раза меньше линейных размеров Ω^m . Остановим процесс деления кубов на части на некотором уровне, зафиксировав «характеристический» размер $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ периодической ячейки $\Omega_\varepsilon = \Omega^m$, и предположим, что такие ячейки полностью заполняют область Ω . Рассмотрим уравнение проводимости в области Ω . Его решение может быть представлено в виде

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}) + \varepsilon T_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon), \quad (6.1)$$

где $T_0(\mathbf{x})$ – гладкая составляющая решения, не зависящая от ε , а $\varepsilon T_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ – почти периодическая осциллирующая компонента, такая что

$$\int_{\Omega_\varepsilon} T_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = 0,$$

причем T_ε является однородной порядка 1.

Описанный выше процесс усреднения может быть осуществлен с помощью оператора усреднения

$$\langle z \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon(\mathbf{x})} z(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где $\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon(\mathbf{x})$ – характеристический куб линейного размера ε с центром в точке $\mathbf{x}$. С помощью такого подхода можно, например, дать определение тензора эффективной проводимости (см. подраздел 6.2).

6.2. Тензор эффективной проводимости

Понятие *тензора эффективной проводимости* является интуитивно ясным для физиков и инженеров. Несмотря на это, строгое математическое определение тензора эффективной проводимости нуждается в некотором теоретическом обосновании. Можно выделить три варианта такого обоснования: наивное описание; определение, основанное на использовании теории гомогенизации; вариационное определение тензора эффективной проводимости.

Наивное описание. Для того чтобы описать определение такого типа, рассмотрим стационарный тепловой поток в двумерном неоднородном композиционном материале с конечным числом компонентов, которые заполнены макроскопически однородными материалами. Другими словами, матрица (геометрически описываемая конечносвязной областью Ω), а также каждое из включений (описываемых односвязными, взаимно не пересекающимися областями D_k , $k = 1, \dots, N$) имеют постоянные коэффициенты проводимости λ , λ_k , $k = 1, \dots, N$, вообще говоря, различные для разных частей композита.

Предположим для простоты, что распределение температуры T в каждой из компонент материала является гармонической функцией (или, что то же самое, – T удовлетворяет уравнению Лапласа, или что тепловой поток $\mathbf{q}$ имеет потенциал в каждом компоненте). Пусть также на внешней границе $L = \partial D = \partial(\Omega \cup \text{cl } D_k)$ функция T принимает заданные значения (т. е. удовлетворяет условию Дирихле), а на границе раздела матрица – включения удовлетворяет условию идеального контакта.

Говорят, что неоднородный композиционный материал имеет эффективные свойства в направлении оси Ox , если существует постоянная λ_e^x , такая что выполнено следующее соотношение:

$$\lambda_e^x F = \lambda \iint_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x} dx dy + \sum_{k=1}^n \lambda_k \iint_{D_k} \frac{\partial T}{\partial x} dx dy, \quad (6.2)$$

где функция F в левой части равенства представляет собой общий поток в направлении рассматриваемой оси:

$$F = \iint_D \operatorname{Re} f'(z) dx dy, \quad (6.3)$$

а $f(z)$ – комплексный потенциал, соответствующий решению задачи Дирихле в области D . Аналогичное определение может быть введено для любого другого направления, а также в случае одномерного или трехмерного композита. Константы, соответствующие различным направлениям, вообще говоря, различны. В случае трехмерного композита существует шесть, а в случае двумерного – три независимые постоянные, определяющие эффективные свойства данного композита. Они образуют так называемый *тензор эффективной проводимости*, имеющий, например в случае $2D$ -композитов, следующий вид:

$$\Lambda_e = \begin{pmatrix} \lambda_e^x & \lambda_e^{xy} \\ \lambda_e^{xy} & \lambda_e^y \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Приведенное выше определение имеет следующий смысл: неоднородный композиционный материал обладает эффективными проводящими свойствами, если существует однородный материал, проводящие свойства которого в соответствующих направлениях описываются тензором Λ_e , т. е. однородный материал, эквивалентный данному неоднородному по проводящим свойствам.

На практике определение компонент тензора эффективной проводимости является достаточно сложной задачей. Например, если в случае $2D$ -композита область Ω представляет собой многосвязную круговую область, то компонента λ_e^x может быть вычислена по формуле

$$\lambda_e^x = \lambda \int_{\partial D} T dy + 2\pi\lambda \sum_{k=1}^n r_k^2 \rho_k \frac{\partial T}{\partial x}(a_k), \quad (6.5)$$

где $D_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r_k\}$, $\rho_k = \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda}$. Приводя краевое условие задачи Дирихле к комплексной форме, можно получить в этом случае формулу для двух компонент тензора эффективной проводимости:

$$\lambda_e^x - i\lambda_e^{xy} = \lambda \int_{\partial D} \operatorname{Re} \psi(z) dy + 2\pi\lambda \sum_{k=1}^n r_k^2 \rho_k \psi(a_k), \quad (6.6)$$

где ψ – решение соответствующей краевой задачи для внутренних областей D_k . Эти формулы могут быть нормализованы, если положить, что

среднее по всей области D от вещественной части решения ψ совпадает с площадью этой области $|D|$, т. е.

$$\iint_D \operatorname{Re} \psi(z) dx dy = |D|.$$

Тогда формулы (6.5), (6.6) принимают соответственно вид:

$$\frac{\lambda_e^x}{\lambda} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n v_k \rho_k \frac{\partial T}{\partial x}(a_k), \quad (6.5')$$

$$\frac{\lambda_e^x - i \lambda_e^{xy}}{\lambda} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n v_k \rho_k \psi(a_k), \quad (6.6')$$

где отношение $v_k = \frac{\pi r_k^2}{|D|}$ есть так называемая концентрация k -го включения D_k в области D .

Гомогенизация и определение эффективной проводимости. Рассмотрим так называемые периодические композиты, т. е. такие материалы, термальные свойства которых периодически повторяются в одном, двух или трех направлениях. Для определенности рассмотрим ситуацию трехмерного композиционного материала, периодического относительно трех взаимно ортогональных направлений. Предположим, что линейные размеры периода (периодов) имеют размеры $\varepsilon \ll L$, где L – линейные размеры экзаменационной выборки (области $G \subset \mathbb{R}^3$ в пространстве, ограниченной простой замкнутой поверхностью Γ). Рассмотрим задачу Дирихле в пространстве $H_0^1(G)$:

$$\nabla \cdot (\Lambda_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \nabla \cdot T_\varepsilon(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (6.7)$$

$$T_\varepsilon(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (6.8)$$

Пусть $\Lambda_\varepsilon \nabla T_\varepsilon(\mathbf{x})$ слабо сходится в пространстве квадратично суммируемых функций, т. е.

$$\Lambda_\varepsilon \nabla T_\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{w} \hat{\Lambda}_e \nabla T_0 \quad \text{в } L_2(G), \quad (6.9)$$

где $\hat{\Lambda}_e$ – некоторый постоянный тензор; T_0 – решение задачи Дирихле:

$$\nabla \cdot (\hat{\Lambda}_e \cdot \nabla \cdot T_0(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in G; \quad T_0(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (6.10)$$

Тогда тензор $\hat{\Lambda}_e$ называется *тензором эффективной проводимости*. С помощью теории гомогенизации можно обосновать существование слабого предела в (6.9) и независимость этого предела от вида поверхности

Γ и от краевых условий. При этом вместо условия Дирихле (6.8) может быть рассмотрено другое краевое условие, например условие Неймана.

Из теории гомогенизации следует также, что тензор $\hat{\Lambda}_e$ может быть вычислен согласно формуле

$$\hat{\Lambda}_e \mathbf{q} = \langle \Lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) \rangle, \quad (6.11)$$

где $\langle F(\mathbf{x}) \rangle$ означает усреднение величины $F(\mathbf{x})$ относительно репрезентативной ячейки Q , т. е.

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{|Q|} \int_Q F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (6.12)$$

где $T(\mathbf{x})$ – решение следующей квазипериодической задачи:

$$\begin{aligned} \nabla(\Lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in Q, \\ T(x_1 + \alpha, x_2, x_3) - T(x_1, x_2, x_3) &= q_1, \\ T(x_1, x_2 + \beta, x_3) - T(x_1, x_2, x_3) &= q_2, \\ T(x_1, x_2, x_3 + \gamma) - T(x_1, x_2, x_3) &= q_3, \end{aligned} \quad (6.13)$$

а $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ – вектор внешнего потока. Таким образом, тензор эффективной проводимости $\hat{\Lambda}$ полностью определяется с помощью решений трех краевых задач типа (6.13), соответствующих «единичным» потокам $\mathbf{q} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{q} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{q} = (0, 0, 1)$.

В общем случае тензор эффективной проводимости $\hat{\Lambda}_e$ является симметричным положительно определенным тензором. Он может быть приведен к диагональной форме:

$$\hat{\Lambda}_e = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_3 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Точнее говоря, существует линейное преобразование пространства к такой системе координат, в которой тензор $\hat{\Lambda}_e$ принимает форму (6.14). Оси координат x'_j ($j = 1, 2, 3$) этой новой системы называются *главными осями* для данного композита, а компонента $\hat{\lambda}_j$ ($j = 1, 2, 3$) – проводимостью композита в направлении оси x'_j .

Тензор $\hat{\Lambda}_e$ макроскопически изотропного композиционного материала имеет вид:

$$\hat{\Lambda}_e = \hat{\lambda} \mathbf{I}, \quad (6.15)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор, а $\hat{\lambda} := \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3$. Скалярная величина $\hat{\lambda}$ называется *коэффициентом эффективной проводимости* (или просто *эффективной проводимостью*).

Пусть $\lambda(\mathbf{x})$ – некоторая скалярная функция. Тогда в случае макроскопически изотропного материала формула (6.11) дает

$$\hat{\Lambda}_e \mathbf{q} = \langle \lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) \rangle, \quad (6.16)$$

где $T(\mathbf{x})$ – решение квазипериодической задачи (6.13), соответствующее произвольному единичному вектору $\mathbf{q}$. Для определенности можно считать, что $\mathbf{q} = (1, 0, 0)$.

Вариационное определение. Если заданный тензор проводимости $\Lambda(\mathbf{x})$ является симметричным (что на самом деле не всегда выполняется), то удобно использовать другое определение тензора эффективной проводимости. Рассмотрим следующую квадратичную форму $\hat{\Lambda}_e \xi \cdot \xi$, где $\hat{\Lambda}_e$ – гомогенизированная проводимость, определенная выше. Тогда эта форма может быть переписана в виде

$$\hat{\Lambda}_e \xi \cdot \xi \equiv \int_{\Omega_\varepsilon} \Lambda(\mathbf{y}) (\xi + \nabla w_\varepsilon(\mathbf{y})) \cdot (\xi + \nabla w_\varepsilon(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad (6.17)$$

где w_ε – периодическое относительно Ω_ε решение (или Ω_ε -периодическое решение) следующей задачи:

$$-\operatorname{div} \Lambda(\mathbf{y}) (\xi + \nabla w_\varepsilon(\mathbf{y})) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (6.18)$$

Можно заметить, что соотношение (6.2.17) представляет собой уравнение Эйлера – Лагранжа для следующего вариационного принципа: найти элемент $w(\mathbf{y})$, минимизирующий функционал энергий

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Lambda(\mathbf{y}) (\xi + \nabla w(\mathbf{y})) \cdot (\xi + \nabla w(\mathbf{y})) d\mathbf{y}$$

на множестве всех Ω_ε -периодических функций.

Таким образом, тензор эффективной проводимости $\hat{\Lambda}_e$ может быть определен как тензор, доставляющий минимальное значение следующему функционалу:

$$\hat{\Lambda}_e \xi \cdot \xi = \min_{w \in H_{\#}^1(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} \Lambda(\mathbf{y}) (\xi + \nabla w(\mathbf{y})) \cdot (\xi + \nabla w(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad (6.19)$$

где $H_{\#}^1(\Omega_{\varepsilon})$ – пространство Ω_{ε} -периодических функций w , обладающих конечной энергией

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} (w^2 + |\nabla w|^2) dy < +\infty.$$

6.3. Репрезентативная ячейка

Одно из наиболее важных понятий в теории композиционных материалов – это понятие *репрезентативного объемного элемента (репрезентативной ячейки)*. Можно дать следующее нечеткое физическое определение этого термина. Репрезентативный объемный элемент – это часть материала, которая достаточно мала с макроскопической точки зрения, поэтому может восприниматься как типичная часть гетерогенной среды. С другой стороны, эта часть достаточно велика с точки зрения микроскопической шкалы для того, чтобы представлять типичные характеристики микроструктуры рассматриваемого композиционного материала. Рассмотрим двумерную двухкомпонентную периодическую композиционную среду, состоящую из коллекции неперекрывающихся, одинаковых по размеру круговых включений, имеющих постоянную одинаковую проводимость λ , вложенных в матрицу постоянной проводимости $\lambda_m = 1$. Пусть $\rho = (\lambda - 1)/(\lambda + 1)$ – контрастный параметр Бергмана. Было установлено, что тензор эффективной проводимости Λ_e такого материала имеет вид двойных рядов, зависящих от концентрации включений и от «базовых элементов», определяемых исключительно положением включений. Эти базовые элементы могут быть записаны в терминах рядов Эйзенштейна, причем коэффициенты этих двойных рядов зависят от ρ . Будем говорить, что два композиционных материала эквивалентны, если разложения их тензоров эффективной проводимости Λ_e имеют одинаковые базовые элементы.

Таким образом, все множество композиционных материалов с одинаковыми круговыми включениями разбивается на классы эквивалентности, определяемые только лишь структурой композитов. В частности, композиты с одинаковым расположением включений, но с различными значениями ρ будут принадлежать одному и тому же классу эквивалентности. Заметим, что композиты, принадлежащие одному классу эквивалентности, могут иметь различные значения тензора Λ_e , а композиты из различных классов могут иметь одинаковые значения тензора эффективной проводимости Λ_e . Каждый композиционный материал может быть

представлен периодической ячейкой, а в качестве представителя класса эквивалентности выберем такой композит, который имеет ячейку минимального размера. Такая ячейка называется *репрезентативной ячейкой рассматриваемого класса эквивалентности*.

Ниже будет предложен конструктивный алгоритм определения репрезентативной ячейки в случае произвольного распределения включений с использованием только геометрических параметров композиционного материала.

Рассмотрим ячейку $Q_{(0,0)}$, так называемую нулевую, содержащую N неперекрывающихся, одинаковых по размеру круговых включений D_k радиусом r с центрами $a_k \in Q_{(0,0)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Обозначим через D_0 дополнение до области $Q_{(0,0)}$ замыкания всех ячеек D_k . Исследуем проводимость двоякопериодического композиционного материала в случае, когда проводимости материалов, заполняющих области $D_{\text{per}} = \bigcup_{(m_1, m_2)} (D_0 \cup \partial Q_{(0,0)} + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)$ и $D_k + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$, равны соответственно λ_0 и λ . Здесь ω_1 и ω_2 – пара неколлинеарных векторов на плоскости. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_0 = 1$.

Потенциал (теплого) поля $u(z)$, $z \in Q_{(0,0)}$, предположим удовлетворяющим условиям идеального контакта на границе включений:

$$u^+(t) = u^-(t), \quad \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda \frac{\partial u^-}{\partial n}(t) \quad (6.20)$$

на $\partial D_k = \{t : |t - a_k| = r\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, а также условиям квазипериодичности:

$$u(z + \omega_1) = u(z) + \Omega_1, \quad u(z + \omega_2) = u(z) + \Omega_2. \quad (6.21)$$

Последние условия означают, что внешнее поле имеет градиент, равный (Ω_1, Ω_2) в системе координат, порожденной векторами ω_1 и ω_2 . Для определения тензора эффективной проводимости Λ_e достаточно решить задачу (6.20), (6.21) в классе функций, гармонических всюду в $Q_{(0,0)}$, кроме объединения границ включений ∂D_k , хотя бы для одной пары линейно независимых векторов Ω_1 и Ω_2 .

Тензор эффективной проводимости Λ_e рассматриваемого композиционного материала имеет следующую структуру:

$$\Lambda_e = (1 + 2\rho\nu)\mathbf{I} + 2\rho\nu \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_k \nu_k, \quad (6.22)$$

где $v = \frac{N\pi r^2}{|Q_{(0,0)}|}$ – концентрация включений в ячейке $Q_{(0,0)}$; v_k – концентрация k -го включения; $\mathbf{I}$ – тождественный тензор, а тензор $\mathbf{P}_k$ определяется равенствами

$$\mathbf{P}_k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_k & \operatorname{Im} A_k \\ \operatorname{Im} A_k & C_k \end{pmatrix},$$

$$A_k = |Q_{(0,0)}|^k \sum_{n_1 \dots n_p} B_{n_1 \dots n_p}^{(k)} e_{n_1 \dots n_p}(\omega_1, \omega_2). \quad (6.23)$$

Здесь постоянные коэффициенты $B_{n_1 \dots n_p}^{(k)}$ зависят только от k, ρ и $n_1, \dots, n_p$ ($n_j = 2, 3, \dots; k = 1, 2, \dots$). Значения величин C_k имеют форму, аналогичную (6.23). В представлении эффективной проводимости (6.22) только величины $e_{n_1 \dots n_p} = e_{n_1 \dots n_p}(\omega_1, \omega_2)$ зависят от расположения центров включений a_k . В свою очередь, величины A_k представляются через $e_{n_1 \dots n_p}$. Для ряда начальных значений индекса k эти представления выписаны в явной форме:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\rho}{\pi} e_2, \quad A_2 = \frac{\rho^2}{\pi^2} e_{22}, \quad A_3 = \frac{1}{\pi^3} [-2! \rho^2 e_{33} + \rho^3 e_{222}], \\ A_4 &= \frac{1}{\pi^4} [3! \rho^2 e_{44} - 2! \rho^3 (e_{332} + e_{233}) + \rho^4 e_{2222}], \\ A_5 &= \frac{1}{\pi^5} [-4! \rho^2 e_{55} + 3! \rho^3 (e_{442} + e_{343} + e_{244}) - \\ &\quad - 2! \rho^4 (e_{3322} + e_{2332} + e_{2233}) + \rho^5 e_{22222}], \\ A_6 &= \frac{1}{\pi^6} [5! \rho^2 e_{66} - 4! \rho^3 (e_{255} + e_{354} + e_{453} + e_{552}) + \\ &\quad + 3! \rho^4 (e_{2244} + e_{2343} + e_{2442} + e_{3432} + e_{4422}) + 4! \rho^4 e_{3333} - \\ &\quad - 2! \rho^5 (e_{22233} + e_{22332} + e_{23322} + e_{33222}) + \rho^6 e_{222222}], \end{aligned} \quad (6.24)$$

где индексы связаны между собой соотношениями

$$n_1 + \dots + n_p = 2k; \quad n_j \leq k - p \quad (j = 1, 2, \dots, p); \quad n_j \geq 2 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Таким образом, для того чтобы вычислить Λ_e с точностью до $O(v^{L+1})$, необходимо определить значения A_k для всех $k = 1, 2, \dots, L-1$, или соответствующее конечное число сумм Эйзенштейна – Релея $e_{n_1 \dots n_p}$.

Рассмотрим теперь достаточно большую фундаментальную область $Q'_{(0,0)}$, порожденную фундаментальными векторами ω'_1 и ω'_2 , содержащую N' неперекрывающихся, одинаковых по размеру круговых включений D'_k радиусом r с центрами $a'_k \in Q'_{(0,0)}$ ($k = 1, 2, \dots, N'$). Пусть Λ'_e – эффективная проводимость композиционного материала, имеющего в качестве геометрического представления область $Q'_{(0,0)}$ с включениями D'_k . Рассмотрим следующую задачу: можно ли заменить $Q'_{(0,0)}$ на некоторую другую малую ячейку $Q_{(0,0)}$, содержащую круговые включения $D_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, так что ее тензор эффективной проводимости Λ_e близок к тензору Λ'_e . При этом будет предполагаться, что концентрация включений v в обеих ячейках одинакова. Порядок близости будем оценивать соотношением $\Delta\Lambda_e = \Lambda_e - \Lambda'_e = O(v^{L+1})$ с некоторым предписанным значением L . Если такая близость достигнута, то будем говорить, что $Q_{(0,0)}$ является репрезентативной ячейкой для $Q'_{(0,0)}$ с точностью приближения $O(v^{L+1})$. Репрезентативная ячейка $Q_{(0,0)}$ будет называться минимальной для $Q'_{(0,0)}$, если она имеет минимально возможную площадь $|Q_{(0,0)}|$. Поскольку в дальнейшем речь пойдет только о минимальных репрезентативных ячейках, то слово «минимальная» будет опускаться. Опишем способ построения репрезентативных ячеек.

Рассмотрим формулы для вычисления Λ'_e , соответствующие формулам (6.22), (6.23):

$$\Lambda'_e = (1 + 2\rho v)\mathbf{I} + 2\rho v \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}'_k v_k, \quad (6.25)$$

$$A'_k = |Q'_{(0,0)}|^k \sum_{n_1 \dots n_p} B_{n_1 \dots n_p}^{(k)} e_{n_1 \dots n_p}(\omega'_1, \omega'_2). \quad (6.26)$$

Заметим, что коэффициенты $B_{n_1 \dots n_p}^{(k)}$ имеют одну и ту же форму как в (6.23), так и в (6.26). Следовательно, $\Delta \Lambda_e$ будет иметь порядок $O(v^{L+1})$, если $A_k = A'_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, L-1$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$|Q_{(0,0)}|^k e_{n_1 \dots n_p}(\omega_1, \omega_2) = |Q'_{(0,0)}|^k e_{n_1 \dots n_p}(\omega'_1, \omega'_2) \quad (6.27)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, L-1$ и соответствующих наборов индексов $n_1, \dots, n_p$.

Система (6.27) может рассматриваться как система уравнений относительно неизвестных векторов ω_1, ω_2 , неизвестных центров включений $a_1, a_2, \dots, a_N$, неизвестного количества включений N при дополнительных ограничениях $|a_j - a_m| \geq 2r$ ($j \neq m$). Поскольку геометрия любой ячейки определяется с точностью до параллельного переноса, то можно считать, что центр одной из ячеек лежит в начале координат, например $a_N = 0$. Фундаментальная область $Q_{(0,0)}$ и фундаментальные векторы ω_1, ω_2 могут быть выбраны бесконечным числом способов. Для любой двоякопериодической структуры всегда возможно построить такую пару векторов ω_1, ω_2 , что $\omega_1 > 0$ и $\text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{Im} \tau > 0$. Площадь ячейки $Q_{(0,0)}$ вычисляется по формуле

$$|Q_{(0,0)}| = \omega_1^2 \text{Im} \tau. \quad (6.28)$$

С другой стороны,

$$|Q_{(0,0)}| = \frac{N\pi r^2}{v},$$

следовательно,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{N\pi r^2}{v \text{Im} \tau}}. \quad (6.29)$$

Для того чтобы построить (минимальную) репрезентативную ячейку $Q_{(0,0)}$, для которой $\Delta \Lambda_e$ имеет порядок $O(v^{L+1})$, можно, например, решить систему уравнений (6.3.8) при фиксированном L , увеличивая количество включений N от 1 до N' . При этом можно считать, что число N фиксировано на каждом шаге исследования системы (6.27).

Применяя свойство сумм Эйзенштейна

$$e_{n_1 \dots n_p}(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-2k} e_{n_1 \dots n_p}(1, \tau), \quad 2k = n_1 + \dots + n_p,$$

а также формулу (6.28), мы можем переписать (6.27) в виде

$$(\operatorname{Im} \tau)^k e_{n_1 \dots n_p}(1, \tau) = |Q'_{(0,0)}| e_{n_1 \dots n_p}(\omega'_1, \omega'_2), \quad k = 1, 2, \dots, L-1. \quad (6.30)$$

Система уравнений (6.30) является системой относительно N неизвестных $\tau, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ при дополнительных ограничениях $|a_j - a_m| \geq 2r$ ($j \neq m$). Зная ее решение, мы можем вычислить неизвестный фундаментальный вектор ω_1 по формуле (6.29).

Можно также рассматривать задачу об отыскании репрезентативной ячейки предписанной формы. Например, в случае прямоугольной репрезентативной ячейки $Q_{(0,0)}$ имеем $\tau = i\alpha$, $\alpha > 0$, и, следовательно, (6.29) имеет вид

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{N\pi r^2}{\alpha v}}, \quad (6.29')$$

а система уравнений (6.30):

$$(\operatorname{Im} \tau)^k e_{n_1 \dots n_p}(1, \tau) = |Q'_{(0,0)}| e_{n_1 \dots n_p}(\omega'_1, \omega'_2), \quad k = 1, 2, \dots, L-1. \quad (6.30')$$

Аналитическое исследование систем (6.30) (или (6.30')) в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу. Подобное исследование в простых частных случаях проведено В. В. Митюшевым [6].

Литература

1. Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. 2-е изд. М., 1970.
2. Вейль, А. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру / А. Вейль. М., 1982.
3. Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. М., 2007.
4. Allair, G. Shape Optimization by the Homogenization Method / G. Allair. Berlin, 2002.
5. Cherkayev, A. Variational Methods for Structural Optimization / A. Cherkayev. New York, 2000.
6. Mityushev, V. V. Representative cell in mechanics of composites and generalized Eisenstein-Rayleigh sums / V. V. Mityushev // Complex variables. 2006. Vol. 51, № 8–11.
7. Panasenko, G. Multi-scale modelling for structures and composites / G. Panasenko. Dordrecht, 2005.
8. Zhikov, V. V. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals / V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Olejnik. Berlin, 1994.

Глава 7

КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

7.1. Периодические структуры

Решетчатые структуры широко распространены в современной инженерии. Они состоят из системы связанных между собой волокон (в двумерном случае – слоев). Значительная часть таких композиционных материалов имеет периодическую структуру или близкую к ней. Периодическими являются каркасные структуры (формы мостов, каркасы зданий, опоры линии электропередач и др.). Модель сплошной среды с периодически расположенными полостями описывает такие пористые среды, как порошки, пенопласты, древесина, почва, материалы с системой трещин, перфорированные пластины и др.

Под *периодической структурой* будем понимать среду, составленную из периодически повторяющихся элементов (ячеек). Например, волокнистый композит с однонаправленной системой армирования состоит из однонаправленных волокон одного вещества и матрицы из другого вещества, заполняющего расстояния между волокнами. Сечение такого материала схематически представлено на рис. 7.1.

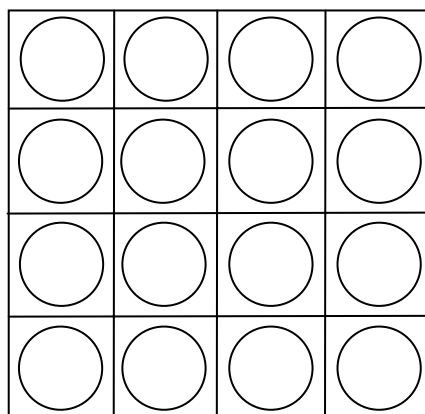


Рис. 7.1. Сечение композиционного материала с периодической структурой

Поля и процессы в периодических системах описываются уравнениями или системами уравнений с частными производными с периодическими коэффициентами. Например, если температура волокнистого композита постоянна в направлении ориентации волокон, то двумерное стационарное тепловое поле в композите описывается уравнением Пуассона в каждой ячейке периодичности B_ε , имеющей размер ε :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(K_\varepsilon(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(K_\varepsilon(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2}) = f(x_1, x_2) \quad (7.1)$$

всюду вне линий контакта волокон и матрицы. Здесь $K_\varepsilon(x_1, x_2)$ – коэффициент теплопроводности в точке (x_1, x_2) . Если точка попадает на волокно, то K_ε принимает значение коэффициента теплопроводности волокна K_B , в противном случае K_ε равно коэффициенту теплопроводности матрицы K_M . Функция $f(x_1, x_2)$ – плотность тепловых источников в композите (эта функция предполагается гладкой).

На линиях контакта волокон и матрицы выполняется условие идеального контакта, состоящее из условия непрерывности температуры $T(x_1, x_2)$ – скачок $[.]$ температуры при переходе через линию раздела равен нулю:

$$[T] = 0, \quad (7.2)$$

и условия непрерывности потока тепла

$$[K_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial n}] = 0. \quad (7.3)$$

Коэффициент теплопроводности $K_\varepsilon(x_1, x_2)$ изменяется на величину $K_B - K_M$ при изменении на величину порядка $\varepsilon \ll 1$. Таким образом, функция $K_\varepsilon(x_1, x_2)$ быстро осциллирует (рис. 7.2).

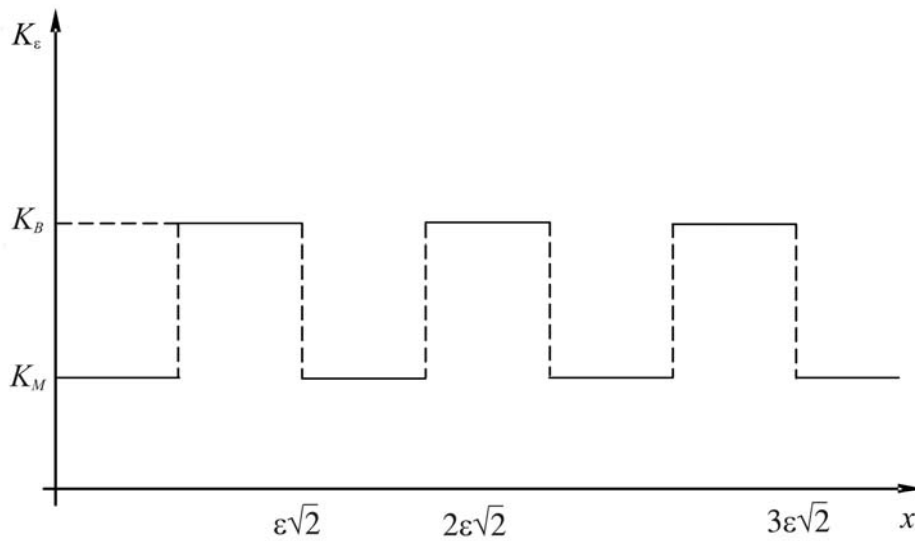


Рис. 7.2. Осцилляция коэффициента проводимости

Для исследования таких задач сложно применять численные методы, поскольку приходится брать слишком мелкую сетку, чтобы по крайней мере несколько узлов разностной схемы попало на каждое волокно.

Однако имеется возможность асимптотического исследования задачи (7.1) – (7.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Уравнения в частных производных, которые описывают состояние физических полей в такого рода структуре, *гомогенизируются (осредняются)*. Коэффициенты в этих уравнениях называют эффективными коэффициентами композиционного материала. Иногда при осреднении получаются уравнения совсем другого типа, чем исходные. Типичный в этом случае результат представлен в следующей теореме.

Теорема 7.1. Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей. Пусть $f \in C^1(\bar{G})$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta T_\varepsilon &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G \cap B_\varepsilon; \quad \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in G \cap B_\varepsilon; \\ T_\varepsilon &= 0, \quad \mathbf{x} \in G \cap \partial B_\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Пусть B – расширенная решетчатая структура для B_ε :

$$B = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (\{|\xi_1 - k| < t/2\} \cup \{|\xi_2 - k| < t/2\}) \right\}.$$

Пусть U – решение так называемой задачи для ячеек:

$$\Delta U = 0, \quad \xi \in B; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad \xi \in \partial B, \quad (7.5)$$

где функция является периодической по обоим переменным ξ_1, ξ_2 , и пусть $\hat{K}$ – эффективная проводимость:

$$\hat{K} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_1} U \right\rangle = \int_Q \frac{\partial U}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2, \quad (7.6)$$

где

$$Q = B \cap (-1/2, 1/2)^2.$$

Пусть T_0 – решение гомогенизированной задачи:

$$\hat{K} \Delta T_0 = \text{mes}(B \cap Q) f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad T_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G. \quad (7.7)$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\|T_\varepsilon - T_0\|_{L_2(G \cap B_{\varepsilon,\delta})} \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

где постоянная C не зависит от малого параметра.

Рассматриваются также модели композиционных материалов, описываемые двумя малыми параметрами. Обычно такие структуры моделируются периодическими конструкциями с ячейками, описываемыми двумя (или более) малыми параметрами: ε (отношением периода к характерному размеру задачи) и δ (отношением диаметра волокна к периоду структуры). Простейшая решетчатая структура в этом случае – это так называемая двумерная прямоугольная решетчатая структура

$$B_{\varepsilon,\delta} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (\{|x_1 - k\varepsilon| < \varepsilon\delta/2\} \cup \{|x_2 - k\varepsilon| < \varepsilon\delta/2\}),$$

которая состоит из двух периодических систем узких полосок, ориентированных в направлении координатных осей. В качестве малых параметров выбирается постоянный шаг ε (т. е. расстояние между осью и ближайшей полоской) и отношение δ ширины полоски к шагу периодичности ε .

Принцип расщепления гомогенизированного оператора дает возможность получить явные формулы для асимптотических компонент первого порядка. Типичным результатом асимптотического анализа на решетчатых структурах является следующая теорема.

Теорема 7.2. Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей, а $f \in C^1(\bar{G})$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta T_{\varepsilon,\delta} &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G \cap B_{\varepsilon,\delta}; \\ \frac{\partial T_{\varepsilon,\delta}}{\partial n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in G \cap B_{\varepsilon,\delta}; \\ T_{\varepsilon,\delta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in G \cap \partial B_{\varepsilon,\delta}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Пусть T_0 – решение так называемой гомогенизированной задачи:

$$\Delta T_0 = 2f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad T_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G. \tag{7.9}$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\frac{\|T_{\varepsilon,\delta} - T_0\|_{L_2(G \cap B_{\varepsilon,\delta})}}{\sqrt{\text{mes}(G \cap B_{\varepsilon,\delta})}} \leq C(\sqrt{\delta} + \sqrt{\varepsilon}), \tag{7.10}$$

где постоянная C не зависит от малых параметров.

Этот тип сходимости решения $T_{\varepsilon,\delta}$ исходной задачи к решению T_0 гомогенизированной задачи называется L -сходимостью.

В различных композиционных материалах в силу особенностей изготовления и дефектов периодичность нарушается. В этих случаях прибегают к осреднению свойств композитов. Существует также понятие почти периодической структуры, т. е. структуры, допускающей случайные сдвиги включений внутри ячейки вблизи центра. В этом случае предполагается, что концентрация включений относительно высока и соответственно движение включений ограничено. В случае малой концентрации включений могут образовываться структуры, сильно отличающиеся от почти периодических.

7.2. Двойкопериодические функции

В данном разделе изложены основные аспекты теории эллиптических функций. *Эллиптическими функциями* называются двойкопериодические мероморфные функции с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$, отношение которых ω_2/ω_1 не является вещественным. Из теоремы Лиувилля следует, что не существует целых эллиптических функций, отличных от постоянных, т. е. функций, не имеющих изолированных особых точек в конечной части плоскости. В дальнейшем для краткости будем употреблять термин *однозначные (или регулярные) аналитические функции (в C)*, понимая под этим функции, аналитические во всей комплексной плоскости, за исключением не более чем конечного числа изолированных особых точек (регулярного характера). Заметим также, что, в соответствии с теоремой Якоби, не существует однозначных аналитических функций, имеющих более двух линейно независимых периодов.

Будем говорить, что однозначная аналитическая функция $f(z)$ является *двойкопериодической* с периодами $2\omega_1, 2\omega_2, \text{Im } \omega_2/\omega_1 > 0$, если

$$f(z + w) = f(z), \quad \forall w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Любой параллелограмм с вершинами в точках $z_0, z_0 + 2\omega_1, z_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2, z_0 + 2\omega_2$ называется *параллелограммом периодов* (а при $z_0 = 0$ — *фундаментальной ячейкой*) эллиптической функции. Для определенности можно считать, что нижняя и левая стороны параллелограмма периодов ему принадлежат, а верхняя и правая — нет. Число полюсов с учетом их кратности, лежащих в фундаментальной ячейке, называется *порядком эллиптической функции*. Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех ее полюсов, лежащих в параллелограмме периодов, равна нулю. Производная эллиптической функции также является эллиптической функцией. Наконец, число нулей с учетом их кратности (так же, как и число a -точек), лежащих в фундаментальной ячейке, равно порядку эллиптической функции.

Приведем свойства одной из базовых эллиптических функций $\wp$ -функции Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m_1, m_2}' \left[\frac{1}{(z - 2m_1\omega_1 - 2m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^2} \right], \quad (7.11)$$

где символ $\sum_{m_1, m_2}'$ означает, что суммирование производится по всем целым $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ за исключением $m_1 = m_2 = 0$. Следующие свойства вытекают непосредственно из определения (7.11):

- а) $\wp(z)$ – двоякопериодическая функция с полюсами $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$;
- б) $\wp(z)$ – четная эллиптическая функция порядка 2;
- в) производная $\wp'(z)$ является нечетной функцией порядка 3;
- г) в окрестности начала координат главная часть разложения $\wp(z)$ в ряд Лорана равна $\frac{1}{z^2}$;

- д) разность $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ стремится к нулю при $z \rightarrow 0$;

е) функция $\wp(z)$ является обратной функцией для эллиптического интеграла:

$$z = \int_{\infty}^{\zeta} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \quad (\text{т. е. } \zeta = \wp(z)), \quad (7.12)$$

где

$$g_2 = 60 \sum_{m_1, m_2}' \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3 = 140 \sum_{m_1, m_2}' \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^6}; \quad (7.13)$$

ж) функции $\wp'(z)$ и $\wp(z)$ связаны между собой алгебраическим соотношением

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3. \quad (7.14)$$

С помощью $\wp$ -функции Вейерштрасса определяется так называемая ζ -функция Вейерштрасса (не следует смешивать ее с известной ζ -функ-

цией Римана, играющей важную роль в теории чисел). ζ -функция Вейерштрасса определяется посредством интегрирования $\wp$ -функции Вейерштрасса:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left\{ \wp(\xi) - \frac{1}{\xi^2} \right\} d\xi. \quad (7.15)$$

Из определения (7.15) и формулы (7.11) непосредственно вытекает следующее представление ζ -функции Вейерштрасса в виде ряда:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m_1, m_2} \left[\frac{1}{z - 2m_1\omega_1 - 2m_2\omega_2} + \frac{1}{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2} + \frac{z}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^2} \right].$$

Дифференцируя (7.15), имеем

$$\zeta'(z) = -\wp(z).$$

Таким образом, ζ -функция Вейерштрасса является нечетной функцией $\zeta(-z) = -\zeta(z)$, имеющей единственный простой полюс в параллелограмме периодов ($\wp$ -функции Вейерштрасса), причем вычет в этом полюсе равен 1. Отсюда следует, что ζ -функция Вейерштрасса не может быть эллиптической. Иногда ее называют *квазипериодической*, поскольку она удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1, \quad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2, \quad (7.16)$$

где постоянные η_1, η_2 равны соответственно

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1), \quad \eta_2 = \zeta(\omega_2). \quad (7.17)$$

Вычисляя криволинейный интеграл вдоль границы фундаментальной ячейки можно получить соотношение, связывающее значения этих постоянных и периоды $\wp$ -функции Вейерштрасса:

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}. \quad (7.18)$$

σ -функция Вейерштрасса определяется через ζ -функцию Вейерштрасса, а именно с помощью интегрирования функции $\zeta(z) - \frac{1}{z}$ вдоль произвольной кривой, начинающейся в начале координат и не проходящей через полюсы подынтегральной функции. Для того чтобы избежать многозначности, σ -функция Вейерштрасса задается равенством

$$\log \frac{\sigma(z)}{z} = \int_0^z \left\{ \zeta(\xi) - \frac{1}{\xi} \right\} d\xi. \quad (7.19)$$

Непосредственные вычисления, использующие представления ζ -функции Вейерштрасса в виде ряда, приводят к следующему представлению σ -функции Вейерштрасса в виде бесконечного произведения:

$$\sigma(z) = z \prod_{m_1, m_2} ' \left[\left(1 - \frac{z}{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2} \right) \exp \left(\frac{z}{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2} + \frac{z^2}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^2} \right) \right].$$

Здесь символ $\prod_{m_1, m_2} '$ означает то же, что и ранее. Формула дифференцирования имеет в этом случае вид:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z). \quad (7.20)$$

σ -функция Вейерштрасса является нечетной функцией, не имеющей особенностей в конечной части плоскости, нули которой расположены в точках $z = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Следовательно, она также не является эллиптической функцией. Для нее выполняются следующие соотношения:

$$\sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z), \quad \sigma(z + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z)$$

с теми же постоянными η_1, η_2 , что и в (7.16).

На практике достаточно часто полагают, что один из периодов эллиптической функции является вещественным. Переход к такому случаю может быть реализован с помощью следующей замены переменных:

$$v = \frac{z}{2\omega_1}, \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

В этих переменных эллиптическая функция имеет периоды 1 и τ , а предположение независимости периодов сохраняется и имеет вид $\text{Im} \tau > 0$. Относительно переменных v и τ так называемая θ -функция определяется в виде ряда

$$\theta(v) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi v i}, \quad (7.21)$$

где $q = e^{\pi i \tau}$. θ -функция связана с σ -функцией Вейерштрасса следующим соотношением:

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\theta'(0)} e^{\frac{\pi z^2}{2\omega_1}} \theta\left(\frac{z}{2\omega_1}\right). \quad (7.22)$$

Следовательно, θ -функция также не имеет полюсов в конечной части плоскости (а значит, тоже не является эллиптической функцией). Из определения θ -функции вытекает, что

$$\theta(v+1) = -\theta(v), \quad \theta(v+\tau) = -\frac{1}{q} e^{-2\pi v i} \theta(v). \quad (7.23)$$

Нулями θ -функции являются точки $v = m_1 + m_2 \tau$.

При исследовании композиционных материалов оказалось важным использовать эллиптические функции в форме так называемых *рядов Эйзенштейна*, введенных Эйзенштейном в 1847 г. Классические решетчатые суммы (или суммы Эйзенштейна) были использованы еще лордом Релеем для вычисления тензора эффективной проводимости для случая репрезентативной ячейки, содержащей одно включение.

Рассмотрим решетку Ξ , определяемую двумя фундаментальными векторами (или комплексными числами в $\mathbb{C}$) ω_1, ω_2 . При этом предполагается, как обычно, $\text{Im } \tau = \text{Im } \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Введем так называемую нулевую ячейку $Q_{(0,0)} = \{z = t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2 : -1/2 < t_j < 1/2, j = 1, 2\}$. Будем говорить, что решетка Ξ состоит из ячеек $Q_{(m_1, m_2)} = \{z \in \mathbb{C} : z - m_1 \omega_1 - m_2 \omega_2 \in Q_{(0,0)}\}$, где параметры m_1, m_2 пробегают все множество целых чисел. Суммирование в смысле Эйзенштейна определяется соотношением

$$\sum_{m_1, m_2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m_2 = -N}^{m_2 = N} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m_1 = -M}^{m_1 = M} \right). \quad (7.24)$$

Используя такой метод суммирования, введем следующие условно сходящиеся ряды (суммы Эйзенштейна – Релея):

$$S_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m_1, m_2} '(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^{-2}, \quad (7.25)$$

где суммирование производится по всем целым $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ за исключением $m_1 = m_2 = 0$. Непосредственно устанавливается, что

$$S_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{2}{\omega_1} \zeta \left(\frac{\omega_1}{2} \right), \quad (7.26)$$

где $\zeta(z)$ – ζ -функция Вейерштрасса. Известно также следующее представление для сумм $S_2(\omega_1, \omega_2)$:

$$S_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^2 \frac{1}{3} - 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m h^{2m}}{1 - h^{2m}}, \quad h = \exp(\pi i \tau). \quad (7.27)$$

$\wp$ -функция Вейерштрасса может быть представлена в окрестности начала координат следующим рядом Лорана:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)S_{2n}z^{2n-2}. \quad (7.28)$$

Семейство эллиптических функций Эйзенштейна E_m также вводится с помощью рядов

$$E_m(z) := \sum_{m_1, m_2} (z - m_1 - im_2)^{-m}. \quad (7.29)$$

Функции E_m связаны с $\wp$ -функцией Вейерштрасса соотношением:

$$E_m(z) = \wp(z) + S_2.$$

Кроме того, эти функции удовлетворяют дифференциально-рекуррентному соотношению $E'_l(z) = -lE_{l-1}(z)$.

Семейство модифицированных функций Эйзенштейна вводится по формулам:

$$\sigma_l(z) = E_l(z) - z^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (7.30)$$

Эти функции аналитичны в единичной ячейке $Q(0,0)$ и $\sigma_l(0) = S_l$, где $S_l = 0$ для l – нечетных. Кроме того, для квадратного массива $S_6 = S_{10} = S_{14} = \dots = 0$. Остальные S_i положительны и могут быть вычислены с помощью рекуррентных формул:

$$S_2 = \pi, \quad S_4 = 3,15121, \quad S_8 = 4,25577, \quad S_{12} = 3,9388, \dots$$

7.3. Представление тензора эффективной проводимости для двоякопериодических композитов

Для вычисления эффективных характеристик композиционных материалов физиками и инженерами используется аналитическая формула Клаузиуса – Мозотти

$$\frac{\lambda_l}{\lambda} = \frac{1 + \rho v}{1 - \rho v}$$

для случая малых концентраций включений v . Здесь λ – проводимость матрицы; λ_l – эффективная проводимость композита; $\rho = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda}$ – контрастный параметр Бергмана, выражающий разницу между проводимо-

стями материалов; λ_1 – проводимость включений, $0 < \lambda < +\infty$, $-1 \leq \rho \leq 1$.

Удобно считать проводимость матрицы равной единице. Тогда $\rho = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1}$.

Используя метод функциональных уравнений (см. подраздел 5.7), можно обобщить формулу Клаузиуса – Мозотти на случай большой концентрации включений:

$$\lambda_l = 1 + 2\rho v \sum_{p=0}^s A_p v^p + o(v^{s+1}). \quad (7.31)$$

Рассмотрим композиционный материал, имеющий двоякопериодическую структуру. Обозначим нулевую (*фундаментальную*) ячейку композита через $Q_{(0,0)} = \left\{ z = t_1 + it_2 \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < t_1 < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < t_2 < \frac{1}{2} \right\}$. Рассмотрим прямоугольную решетку Ξ , определяемую двумя фундаментальными векторами $\omega_1 = 1, \omega_2 = i$. Тогда семейство ячеек $Q_{(m_1, m_2)}$ (где $Q_{(m_1, m_2)} = Q_{(0,0)} + m_1 + im_2 := \{z \in \mathbb{C} : z - m_1 - im_2 \in Q_{(0,0)}\}$, m_1, m_2 – целые), геометрически описывает структуру двоякопериодического композиционного материала. Пусть взаимно непересекающиеся круговые включения

$$\mathbf{D}_k := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r\}, \quad k = \overline{1, N},$$

имеют одинаковые радиусы и периодически повторяются в ячейках $Q_{(m_1, m_2)}$ (рис. 7.3 для случая четырех симметрично расположенных включений в ячейке).

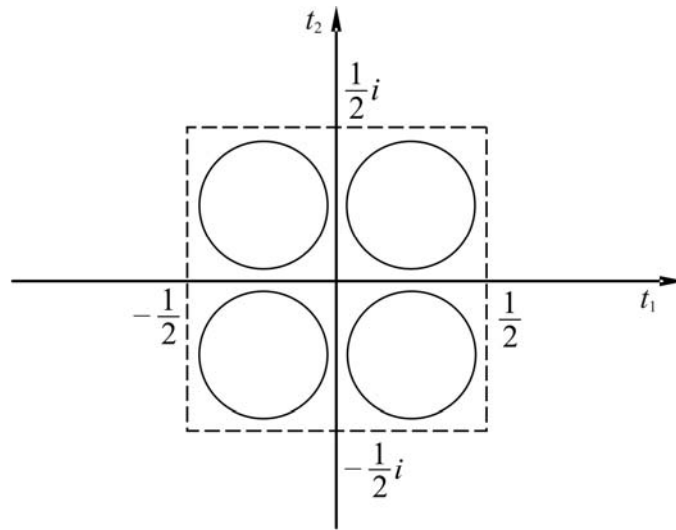


Рис. 7.3. Четыре включения в фундаментальной ячейке

Обозначим через $\mathbf{T}_k = \{t \in \mathbb{C} : |t - a_k| = r\}$ – границы кругов $\mathbf{D}_k$. Тогда связная область $D_0 := Q_{(0,0)} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^N \mathbf{D}_k \cup \mathbf{T}_k \right)$ представляет собой часть матрицы композита в нулевой ячейке $Q_{(0,0)}$.

Тепловое поле T удовлетворяет уравнению Лапласа (является потенциальным):

$$\Delta T = 0 \text{ на } \left(\bigcup_{k=1}^N (\mathbf{D}_k + m_1 + im_2) \cup (D_0 + m_1 + im_2) \right)$$

и условиям сопряжения:

$$\begin{cases} T^+ = T^-, \\ \frac{\partial T^+}{\partial n} = \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial n} \text{ на } T_k, \quad k = \overline{1, N}, \end{cases}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная в направлении внешней нормали. Кроме того, предположим, что поле T удовлетворяет следующим условиям квазипериодичности:

$$\begin{aligned} T(z+1) &= T(z) + 1, \\ T(z+i) &= T(z). \end{aligned} \tag{7.32}$$

Введем комплексные потенциалы $\varphi(z)$, $\varphi_k(z)$ – функции, аналитические в D_0 и $\mathbf{D}_k$ соответственно, непрерывно дифференцируемые в замыкании D_0 и $\mathbf{D}_k$. Эти функции связаны с неизвестным температурным полем T равенствами:

$$T(z) = \begin{cases} \operatorname{Re}(\varphi(z) + z), & z \in D_0, \\ \frac{2}{1 + \lambda_1} \operatorname{Re} \varphi_k(z), & z \in \mathbf{D}_k, \quad k = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Функция $\varphi(z)$ однозначна в D_0 . Кроме того, из (7.32) имеем:

$$\varphi(z+1) = \varphi(z) = \varphi(z+i).$$

Условия сопряжения для T могут быть переписаны в виде задачи Р-линейного сопряжения:

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) - \rho \overline{\varphi_k(t) - t}, \quad |t - a_k| = r, \quad k = \overline{1, N}. \tag{7.33}$$

Введем также вспомогательные потенциалы по формулам:

$$\psi(z) := \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad z \in D_0,$$

$$\psi_k(z) := \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} = \frac{\lambda_1 + 1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad z \in \mathbf{D}_k.$$

Дифференцируя (7.33), приходим к задаче

$$\psi(t) = \psi_k(t) + \rho \left(\frac{r}{t - a_k} \right)^2 \overline{\psi_k(t)} - 1, \quad |t - a_k| = r, \quad k = \overline{1, N}. \quad (7.34)$$

Функции ψ и ψ_k найдем с помощью метода функциональных уравнений (см. подраздел 5.7), а именно, компоненты ψ_m решения задачи (7.34), соответствующие кругам $\mathbf{D}_m$, удовлетворяют системе функциональных уравнений (см. (5.79)):

$$\psi_m(z) = \rho \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, m_2}^* (W_{m_1, m_2, k} \psi_k)(z) + 1, \quad |z - a_m| \leq r_m, \quad m = \overline{1, N}, \quad (7.35)$$

где операторы $W_{m_1, m_2, k}$ определены формулами (5.78). Каждая из функций ψ_m может быть представлена сходящимся рядом

$$\psi_m(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{lm}(z - a_m)^l.$$

Тогда из свойств этих функций вытекают следующие представления (для краткости будем полагать $j = (m_1, m_2)$):

$$\sum_j (W_{j, k} \psi_k)(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\psi_{lk}} r^{2(l+1)} E_{l+2}(z - a_k), \quad z \in D_0, \quad (7.36)$$

$$\sum_j' (W_{j, k} \psi_k)(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\psi_{lk}} r^{2(l+1)} \sigma_{l+2}(z - a_k), \quad z \in Q_{(0,0)}, \quad (7.37)$$

где $E_l, (\sigma_l)$ – функция Эйзенштейна (модифицированная функция Эйзенштейна) (см. формулы (7.29), (7.30)).

Решение ψ_m системы функциональных уравнений (7.35) будем искать в виде ряда по степеням r^2 :

$$\psi_m(z) = \psi_m^{(0)}(z) + r^2 \psi_m^{(1)}(z) + r^4 \psi_m^{(2)}(z) + \dots$$

Используя (7.36), (7.37), перепишем (7.35) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} r^{2s} \psi_m^{(s)}(z) = \rho \left[\sum_{k \neq m} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \overline{\psi_{lk}^{(s)}} r^{2(s+l+1)} E_{l+2}(z - a_k) + \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \overline{\psi_{lm}^{(s)}} r^{2(s+l+1)} \sigma_{l+2}(z - a_m) \right] + 1, \quad |z - a_m| < r, \end{aligned} \quad (7.38)$$

где $\psi_{lk}^{(s)}$ – коэффициенты разложений функций $\psi_k^{(s)}(z)$ по степеням $(z - a_k)$. Для функций $\psi_k^{(s)}(z)$ получаем следующие представления:

$$\begin{aligned} \psi_m^{(0)}(z) &= 1, \\ \psi_m^{(1)}(z) &= \rho \left[\sum_{k \neq m} E_2(z - a_k) + \sigma_2(z - a_m) \right], \\ \psi_m^{(2)}(z) &= \rho^2 \left[\sum_{k \neq m} \sum_{k \neq k_1} \overline{E_2(a_k - a_{k_1})} E_2(z - a_k) + \right. \\ &\quad \left. + \rho^2 \sigma_2(0) \sum_{k \neq m} E_2(z - a_k) + \rho^2 \sigma_2(0) \sigma_2(z - a_m) \right], \\ \psi_m^{(3)}(z) &= -2\rho^2 \left[\sum_{k \neq m} \sum_{k \neq k_1} \overline{E_3(a_k - a_{k_1})} E_3(z - a_k) + \right. \\ &\quad \left. + \rho^3 \sigma_2(0) \sum_{k \neq m} \sum_{k \neq k_1} \overline{E_2(a_k - a_{k_1})} E_2(z - a_k) + \right. \\ &\quad \left. + \rho^3 (\sigma_2(0))^2 \sum_{k \neq m} E_2(z - a_k) + \rho^3 (\sigma_2(0))^2 \sigma_2(z - a_m) \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

Компоненты тензора эффективной проводимости вычисляются с использованием теоремы о среднем для гармонических функций

$$\lambda_e^x - i\lambda_e^{xy} = 1 + 2\rho \sum_{m=1}^N \int_{D_m} \psi_m(z) dx dy = 1 + \frac{2\rho v}{N} \sum_{m=1}^N \psi_m(a_m),$$

где $v = N \pi r^2$ – концентрация включений.

Коэффициент эффективной проводимости λ_e^x может быть представлен в виде ряда по концентрации v :

$$\lambda_l = 1 + 2\rho v \sum_{p=0}^s A_p v^p + o(v^{s+1}),$$

где коэффициенты $A_p = \frac{1}{\pi^p N^{p+1}} \sum_{m=1}^N \operatorname{Re} \psi_m^{(p)}(a_m)$, $p = 0, 1, 2, \dots$, вычисляются через суммы значений функций Эйзенштейна

$$E_m(z) := \sum_{m_1, m_2} (z - m_1 - im_2)^{-m}$$

и значений модифицированных функций Эйзенштейна

$$\sigma_m(z) := \sum_{m_1, m_2} (z - m_1 - im_2)^{-m} - z^{-m}.$$

Литература

1. Бахвалов, Н. С. Осреднение процессов в периодических средах : Математические задачи механики композиционных материалов / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. М., 1984.
2. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов / Г. А. Ванин. М. 1985.
3. Григолюк, Е. И. Периодические кусочно-однородные упругие структуры / Е. И. Григолюк, Л. А. Фильгитинский. М., 1992.
4. Bensoussan, A. Asymptotic analysis for periodic structures / A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou. Amsterdam, 1978.
5. Kozlov, S. M. The effective thermoconductivity and shear modulus of a lattice structure : an asymptotic analysis / S. M. Kozlov, G. Panasenko // Homogenization / Ed. : V. Berdichevsky, V. Zhikov, G. Papanicolaou. Singapore, 1997.
6. Mityushev, V. V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / V. V. Mityushev, E. V. Pesetskaya, S. V. Rogosin // Thermal Properties of Cellular and Porous Materials / Ed. : A. Öchsner, G. Murch, M. de Lemos. Amsterdam, 2007.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ.....	3
Г л а в а 1. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ	
1.1. Элементы теории поля.....	5
1.2. Соленоидальные и потенциальные поля	11
1.3. Формулы Стокса и Грина	13
1.4. Основные понятия тензорной алгебры	15
Г л а в а 2. КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ	
2.1. Определение и классификация композиционных материалов.....	26
2.2. Примеры композиционных материалов	31
2.3. Математические задачи для композиционных материалов.....	35
Г л а в а 3. ПОЛЯ В КОМПОЗИТАХ	
3.1. Основные законы механики сплошной среды	37
3.2. Физические законы для различных полей.....	39
3.3. Краевые условия на границе раздела сред	45
Г л а в а 4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	
4.1. Гармонические и аналитические функции	48
4.2. Граничные значения гармонических и аналитических функций. Преобразование Гильберта	55
4.3. Конформные отображения	65
4.4. Граничное поведение конформных отображений	68
4.5. Конформные отображения многосвязных областей	71
4.6. Группы Шоттки.....	79
Г л а в а 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ	
5.1. Функциональные пространства	83
5.2. Простейшие краевые задачи и их решение	88
5.3. Краевая задача R-линейного сопряжения.....	93
5.4. Функция Грина	102

5.5. Краевые задачи для композиционных материалов.....	105
5.6. Задача Дирихле для многосвязной области. Гармоническая мера	114
5.7. Метод функциональных уравнений	117

Г л а в а 6. ГОМОГЕНИЗАЦИЯ И ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

6.1. Принцип гомогенизации для композитов с богатой микроструктурой.....	123
6.2. Тензор эффективной проводимости.....	125
6.3. Репрезентативная ячейка.....	130

Г л а в а 7. КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

7.1. Периодические структуры	136
7.2. Двоякопериодические функции.....	140
7.3. Представление тензора эффективной проводимости для двояко- периодических композитов	145

Учебное издание

Дубатовская Марина Валерьевна
Рогозин Сергей Васильевич
Лебедь Светлана Федоровна

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. В. Павлова*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Корректор *Т. С. Петроченко*
Компьютерная верстка *Е. М. Товчковой*

Подписано в печать 20.07.2009.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,83.
Уч.-изд. л. 8,4. Тираж 100 экз.
Зак.

Белорусский
государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
220030, Минск,
проспект Независимости, 4.

Отпечатано
с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное
предприятие
«Издательский центр
Белорусского
государственного университета».
ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.